УДК 517.9

Р. М. Таранец, А. Е. Шишков
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЭФФЕКТ ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НОСИТЕЛЯ В УРАВНЕНИЯХ ТОНКИХ ПЛЕНОК

We prove the existence of the phenomenon of time delay of support propagation for "strong" solutions of the Cauchy problem for an equation of thin films and establish exact conditions for the behavior of initial function near a free boundary that guarantee the appearance of this phenomenon.

Доведено існування ефекту часової затримки розповсюдження носія „сильних" розв'язків задачі Коші для рівняння тонких плівок, встановлено точні умови на поведінку початкової функції біля вільної межі, які забезпечують виникнення цього ефекту.

1. Введение. В работе изучается стартовое поведение обобщенных решений задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения четвертого порядка вида

$$u_t + \operatorname{div}(u^n \nabla \Delta u - u^m \nabla u) + f(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0; T), \quad N \in \{1, 2, 3\}, \tag{1.1}$$

где $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{R}^+$. Уравнения такой структуры возникают при описании эволюции высоты $u(x, t)$ тонкой жидкой пленки, распространяющейся по твердой поверхности. Член четвертого порядка моделирует влияние сил поверхностного натяжения, а член второго порядка — влияние гравитации на движение пленки по горизонтальной плоскости. Младший член $f(x, t, u)$ соответствует поглощению. Уравнение (1.1) также возникает в моделях Cahn – Hilliard фазового разделения для бинарных смесей, где $u(x, t)$ играет роль концентрации одной из компонент [1], и в моделях, аналогичных эласто-вязкопластическим моделям Norton – Hoff [2] в теории пластических деформаций, где $u(x, t)$ описывает плотность дислокаций. Детальный обзор математических моделей, приводящих к различным вырождающимся параболическим уравнениям четвертого и более высокого порядков, содержится, например, в статье [3].

Математическое исследование уравнений типа (1.1) инициировано работой F. Bernis и A. Friedman [4]. В ней было введено понятие „слабого" обобщенного решения задачи Неймана для модельного уравнения тонких пленок

$$u_t + \operatorname{div}(|u|^n \nabla \Delta u) = 0 \tag{1.2}$$

при $N = 1$, а также установлено существование таких решений для $n \geq 1$ и доказано важное свойство неотрицательности этих решений при неотрицательности начальных функций. В [4 – 8] показано, что эти решения имеют ряд специфических качественных свойств, зависящих от значения показателя n. Для решений уравнения (1.2) в случае $N = 1$ доказано свойство конечности скорости распространения возмущений: при $0 < n < 2$ в [5] и [9] (для энергетических решений), при $2 \leq n < 3$ в [6, 10], при $n \geq 4$ в [7]. В [11] это же свойство установлено для $N \in \{2, 3\}$ и $1/8 < n < 2$, а также построено решение задачи Коши с начальной функцией из H^1, имеющей компактный носитель.

Первой работой по исследованию математической модели, аналогичной по структуре уравнению (1.1), в многомерном случае является [2], где рассматривается задача Неймана для уравнения

$$u_t + \operatorname{div}(m(u)(\nabla \Delta u - \nabla A(u))) = g(x, t, u). \tag{1.3}$$

В ней показано существование неотрицательных „слабых" решений для (1.3), если поведение коэффициента $m(u)$ в окрестности $u = 0$ такое же, как и степенной функции с показателем степени $n > 1$, $|A'| \leq \text{const} < \infty$, $g(x, t, u)$ имеет не более чем линейный рост, причем существует конечная постоянная $R_1 > 0$ такая, что $g(.,.,u) \geq 0$ при $u \leq R_1$. Там же установлено свойство положительности этих решений для почти всех моментов времени, если значение n достаточно велико. Уравнения типа (1.1) для $N > 1$ изучались также в работах [1, 12, 13]. В частности, в [12] построены „сильные" обобщенные решения задачи Неймана и Коши для уравнения (1.1), когда $f = 0$. Понятие „сильного" решения введено в [5] для (1.2) при $N = 1$, где под „сильным" решением понималось „слабое" решение, принадлежащее классу C^1 по x для почти всех моментов времени $t > 0$. В многомерном случае под „сильным" решением понимают „слабое" решение, удовлетворяющее некоторой интегральной („энтропийной") оценке и дополнительным условиям регулярности. Интерес к изучению этих решений вызван гипотезой о том, что класс „сильных" решений является классом единственности указанных задач (см., например, [7]). В [12] показано существование неотрицательных „сильных" решений задачи Неймана при $m > -1$, $1/8 < n$, если $N \in \{1, 2\}$, и $1/8 < n < 4$, если $N = 3$. Там же установлено, что скорость распространения возмущений для $m < 0$, $0 < m - n + 2 < 1/2$ является бесконечной, для $m > 0$, $1/8 < n < 2$ — конечной, а также найдена оценка этой скорости и доказано существование „сильных" решений задачи Коши со слабым начальным следом.

В настоящей работе установлено существование „сильных" решений задачи Коши для (1.1) и найдены точные условия на локальное поведение начальной функции вблизи границы ее носителя, обеспечивающие возникновение временной задержки распространения носителя этих решений. Для нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка с поглощением этот и аналогичные вопросы качественной теории изучались в работах многих авторов (см., например, [14 – 18]). Феномен временной задержки распространения возмущений, т. е. „инерции", описан в [19] для одномерного уравнения пористой среды без абсорбции. Отметим, что в приведенных выше работах использовалась „барьерная техника", связанная с построением различных суб- и суперрешений. В силу этого она неприменима к уравнениям общего вида, в том числе и высокого порядка. Для изучения локализационных свойств энергетических обобщенных решений некоторых общих параболических уравнений второго порядка при наличии абсорбционного члена применялся также метод локальных энергетических оценок (см., например, [20 – 24]). В работах [25, 26] для энергетических решений дивергентных уравнений высокого порядка предложен метод установления временной задержки распространения носителя. Этот метод является некоторой адаптацией метода локальных энергетических оценок. Он основан на изучении свойств решений специальных функциональных неравенств (см., например, [27]). С помощью этого метода в [28] описан эффект „инерции" для „сильных" неотрицательных решений уравнения (1.2) при $N = 1$ и $0 < n < 3$, а также при $N \in \{2, 3\}$ и $1/8 < n < 2$.

2. Существование „сильных" решений. Рассмотрим задачу Коши (в дальнейшем обозначаемую через (C)) вида

$$u_t + \operatorname{div}(u^n \nabla \Delta u - u^m \nabla u) + f(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+,$$
$$u(0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N), \tag{2.1}$$

где $u_0(x)$ — неотрицательная функция с компактным носителем, а функция $f(x, t, z) \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ и удовлетворяет условию

$$d_1 |z|^{\lambda+1} \leq f(x, t, z) z \leq d_2 |z|^{\lambda+1} \quad \forall\, (x, t, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^1,$$
$$0 < d_1 < d_2 < \infty, \quad \lambda \geq 1. \tag{2.2}$$

Решение задачи (C) будем понимать в следующем смысле.

Определение 1. *Пусть* $m > 0$, $n > 0$, $\lambda \geq 1$. *Неотрицательную функцию* $u \in L^{\infty}_{\rm loc}(\mathbb{R}^+; H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)) \cap L^{\lambda+1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$ *назовем решением задачи* (C), *если*:

i) $\chi_{\rm P} u^{n-2}|\nabla u|^3$, $\chi_{\rm P} u^{n-1}|\nabla u|^2$, $u^n|\nabla u|$ *и* $u^m|\nabla u|$ *принадлежат пространству* $L^1_{\rm loc}([0;\infty); L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N))$, *где* $\chi_{\rm P}$ — *характеристическая функция множества* ${\rm P} := \{u > 0\}$;

ii) $\forall \zeta \in C^{\infty}_c(\mathbb{R}^+ \times [0;\infty))$, *где* C^{∞}_c — *пространство функций из* C^{∞}, *имеющих компактный носитель, справедливо равенство*

$$-\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u\zeta_t\,dx\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0\zeta(x,0)\,dx = \frac{n(n-1)}{2}\iint\limits_{\rm P} u^{n-2}|\nabla u|^2\nabla u\nabla\zeta\,dx\,dt +$$
$$+\frac{n}{2}\iint\limits_{\rm P} u^{n-1}|\nabla u|^2\Delta\zeta\,dx\,dt + n\iint\limits_{\rm P} u^{n-1}\langle\nabla u, D^2\zeta, \nabla u\rangle\,dx\,dt -$$
$$-\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^m\nabla u\nabla\zeta\,dx\,dt + \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^n\nabla u\nabla\Delta\zeta\,dx\,dt - \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f\zeta\,dx\,dt;$$

iii) $u(.,t) \to u_0(.)$ *в* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *при* $t \to 0$.

***Замечание* 1.** Удовлетворяющие определению 1 решения называют „слабыми" энтропийными (см. [5]).

В многомерном случае концепция „слабых" решений предложена в работах [1, 2, 12]. В частности, в [12] построены „слабые" решения, обладающие дополнительной регулярностью, и такие решения были названы „сильными".

Одним из результатов данной статьи является локальная теорема о существовании „сильных" решений задачи (C).

Теорема 1. *Пусть* $N \in \{1, 2, 3\}$, $m > 0$, $n \in (1/8; 2)$ $\forall\lambda: 1 \leq \lambda$ *для* $N \in \{1, 2\}$, *и* $1 \leq \lambda \leq 11/4$ *для* $N = 3$, *а также* $n \in (3\lambda/2 - 4; 2)$ $\forall\lambda \in (11/4; 3)$ *для* $N = 3$, *при этом* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$ *и является неотрицательной функцией с компактным носителем. Тогда для* $T = T(u_0)$ *решение* $u(x,t)$, *соответствующее определению* 1, *обладает такими свойствами*:

i) $\operatorname{supp} u(t)$ *компактен для почти всех* $0 < t < T$;

ii) $\forall q' \in \left(1; \dfrac{4N}{2N + (N-2)n}\right)$ *при* $N \in \{2, 3\}$, $q' = 2$ *при* $N = 1$ *выполняется соотношение*

$$u_t = -\operatorname{div} J - f(x,t,u) \quad в \quad L^2([0;T]; (W^1_q(\mathbb{R}^N))'),$$

где $q = \dfrac{q'}{q'-1}$ *и* $J \in L^2([0;T]; L^{q'}(\mathbb{R}^N))$;

iii) $\forall\alpha \in \left(\max\left\{-1; \dfrac{1}{2} - n\right\}; 2 - n\right) \setminus \{0\}$, *если* $N \in \{1, 2\}$, *и* $\forall\alpha \in \left(\max\left\{-1; \dfrac{1}{2} - n; 2\lambda - 5 - n\right\}; 2 - n\right) \setminus \{0\}$, *если* $N = 3$, *справедливы включения*

$$u^{m-n+2} \in L^{\infty}([0;T]; L^1(\mathbb{R}^N)), \qquad u^{(\alpha+n+1)/2} \in L^2([0;T]; H^2(\mathbb{R}^N)),$$
$$u^{(\alpha+n+1)/4} \in L^4([0;T]; W^1_4(\mathbb{R}^N)), \qquad u^{(\alpha+m+1)/2} \in L^2([0;T]; H^1(\mathbb{R}^N));$$

iv) *для всех* α, *удовлетворяющих* iii), *существуют положительные постоянные* C_1, $C_2(\alpha, m, n)$ *такие, что*

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^4 u^{\alpha+1}(t)\,dx-\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\zeta^4)_t u^{\alpha+1}\,dx\,d\tau\;+$$

$$+\;C_1\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^4\left[\left|\nabla u^{(\alpha+m+1)/2}\right|^2+\left|\nabla u^{(\alpha+n+1)/4}\right|^4+\left|D^2u^{(\alpha+n+1)/2}\right|^2\right]dx\,d\tau\;+$$

$$+\;\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^4u^\alpha f(u)\,dx\,d\tau\;\le\;\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^4(0)u_0^{\alpha+1}(x)\,dx\;+$$

$$+\;C_2\int\limits_0^t\int\limits_{\{\zeta(t)>0\}}u^{\alpha+n+1}(|\nabla\zeta|^4+\zeta^2|\Delta\zeta|^2)\,dx\,d\tau\;+$$

$$+\;C_2\int\limits_0^t\int\limits_{\{\zeta(t)>0\}}u^{\alpha+m+1}(\zeta^2|\nabla\zeta|^2+\zeta^3|\Delta\zeta|)\,dx\,d\tau \tag{2.3}$$

$\forall\, t\in(0;T)$ *и любой неотрицательной функции* $\zeta\in C^2(\mathbb{R}^N\times[0;t])$.

Доказательство. Ввиду громоздкости преобразований мы приводим лишь набросок доказательства, подробно останавливаясь на его оригинальных по отношению к работам [1, 2, 12] фрагментах.

Для всех $\delta>0$, $\sigma>0$ и $\varepsilon>0$ рассмотрим приближающие задачи в произвольной ограниченной области из $\mathbb{R}^N$ с достаточно гладкой границей для любого конечного момента времени $T>0$ (в дальнейшем обозначаемые через $(P^{\varepsilon\delta\sigma})$) вида

$$\begin{gathered}(u_{\varepsilon\delta\sigma})_t+\operatorname{div}\{m_{\delta\sigma}(u_{\varepsilon\delta\sigma})[\nabla\Delta u_{\varepsilon\delta\sigma}-\Psi''_\varepsilon(u_{\varepsilon\delta\sigma})\nabla u_{\varepsilon\delta\sigma}]\}\;+\\ +\;f(x,t,u_{\varepsilon\delta\sigma})=0\quad\text{в}\quad\Omega\times(0;T),\\ \nabla u_{\varepsilon\delta\sigma}\cdot\bar n=\nabla\Delta u_{\varepsilon\delta\sigma}\cdot\bar n=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\times(0;T),\\ u_{\varepsilon\delta\sigma}(.,0)=u_{0\delta\sigma}(.):=u_0(x)+\delta^{\theta_1}+\sigma^{\theta_2}\quad\text{в}\quad\Omega,\end{gathered}\tag{2.4}$$

где $\bar n$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $0<\theta_1<\dfrac{1}{s-(\alpha+n+1)}$, $\theta_2>0$ и $0\le$ $\le u_0(x)\in H^1(\Omega)$. Также предполагаем, что $\|\Psi_0(u_0)\|_{L^1(\Omega)}<\infty$. Коэффициенты $m_{\delta\sigma}(z)$ и $\Psi''_\varepsilon(z)$ выбираются специальным образом:

$$m_{\delta\sigma}(z)=\frac{|z|^{n+s}}{\delta|z|^n+|z|^s+\sigma|z|^{n+s}},\qquad \Psi''_\varepsilon(z)=\frac{|z|^{m-n}}{1+\varepsilon|z|^{m-n}}.$$

Не уменьшая общности, будем полагать, что $s>n$. Функции $m_{\delta\sigma}(z)$ и $\Psi''_\varepsilon(z)$ таковы:

$$0\le m_{\delta\sigma}(z)\le\frac{1}{\sigma},\qquad 0\le\Psi''_\varepsilon(z)\le\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.5}$$

Кроме того, поведение $m_{\delta\sigma}(z)$ в окрестности нуля аналогично $|z|^s/\delta$. Такой выбор коэффициентов при достаточно большом значении s обеспечивает существование положительного для почти всех $t\in(0;T)$ решения задачи $(P^{\varepsilon\delta\sigma})$.

Условно доказательство можно разделить на три основных этапа.

1 *этап*. Построим вспомогательную невырожденную задачу с коэффи-

циентом диффузии $m_\gamma(z) = m_{\delta\sigma}(z) + \gamma$. Ее решение будем искать методом **Фаэдо – Галеркина** в виде

$$u_\gamma^N(x,t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t)\varphi_i(x) \quad \forall t \in [0;T],$$

где в качестве базиса $\{\varphi_i\}$ выберем собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа (см. [1, 2]), т. е.

$$-\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\nabla\varphi_i \cdot \bar{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \in C^{1,1},$$

где $\{\varphi_i\}$ — ортогональны в $H^1(\Omega)$ и $(\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$.

В силу теоремы Пеано существует решение $(c_1^N(t), \ldots, c_N^N(t))$ задачи Коши на интервале $(0; t_N)$ для такой системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(u_\gamma^N, \varphi_j) - (m_\gamma(u_\gamma^N)(\nabla\Delta u_\gamma^N - \Psi_\varepsilon''(u_\gamma^N)\nabla u_\gamma^N), \nabla\varphi_j) = \\ = -(f(x,t,u_\gamma^N), \varphi_j), \qquad j = \overline{1, N}, \\ u_\gamma^N(x,0) = \sum_{i=1}^N (u_{0\delta\sigma}, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}\varphi_i(x).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Для ее разрешимости на едином фиксированном временном интервале необходимо найти дополнительные априорные оценки. Умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ наше уравнение относительно u_γ^N на $-\Delta u_\gamma^N + u_\gamma^N$. После простых алгебраических преобразований получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\gamma^N(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + c_1\gamma\int_\Omega |\nabla\Delta u_\gamma^N|^2 dx + d_1\int_\Omega |u_\gamma^N|^{\lambda+1} dx \le$$

$$\le c_2\|u_\gamma^N(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega f(.,.,u_\gamma^N)\Delta u_\gamma^N dx.$$

Оценим второе слагаемое справа с помощью неравенства Коши с „ ε" и применим условие (2.2). Тогда

$$\int_\Omega f(.,.,u_\gamma^N)\Delta u_\gamma^N dx \le \varepsilon\int_\Omega |\Delta u_\gamma^N|^2 dx + c(\varepsilon)\int_\Omega f(.,.,u_\gamma^N) dx \le$$

$$\le \tilde{\varepsilon}\int_\Omega |\nabla\Delta u_\gamma^N|^2 dx + c(\tilde{\varepsilon})\int_\Omega |u_\gamma^N|^{2\lambda} dx \le \tilde{\varepsilon}\int_\Omega |\nabla\Delta u_\gamma^N|^2 dx + c(\tilde{\varepsilon})\|u_\gamma^N(t)\|^{2\lambda}_{H^1(\Omega)},$$

где $\lambda \ge 1$ при $N \in \{1, 2\}$ и $1 \le \lambda \le 3$ при $N = 3$. Здесь мы воспользовались неравенством Пуанкаре для интегрального среднего, учитывая, что $\int_\Omega \Delta u_\gamma^N dx = 0$, и вложением $H^1(\Omega) \subset L^{2\lambda}(\Omega)$. Таким образом, после выбора $\tilde{\varepsilon}$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\gamma^N(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \tilde{c}_1\gamma\int_\Omega |\nabla\Delta u_\gamma^N|^2 dx + d_1\int_\Omega |u_\gamma^N|^{\lambda+1} dx \le$$

$$\le c_2\|u_\gamma^N(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + c_3\|u_\gamma^N(t)\|^{2\lambda}_{H^1(\Omega)}.$$

где $1 \le \lambda$ (и при этом $\lambda \le 3$ в случае $N = 3$). Отсюда после интегрирования по времени и применения нелинейной леммы Гронуолла следует соотношение

$$\|u_\gamma^N(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \bar{c}_1\gamma \iint_{Q_t} |\nabla\Delta u_\gamma^N|^2\,dx\,d\tau + \bar{d}_1 \iint_{Q_t} |u_\gamma^N|^{\lambda+1}\,dx\,d\tau \le C(T)$$

$$\forall t: 0 \le t \le T = \frac{1}{2c_2(\lambda-1)} \ln\left(1 + \frac{c_2}{c_3}\|u_{0\delta\sigma}\|_{H^1(\Omega)}^{1-\lambda}\right). \tag{2.7}$$

Пусть Π_N — проекция $L^2(\Omega)$ на линейную оболочку $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)\}$. Тогда, используя неравенства Гельдера и (2.5), (2.7), для всех $\varphi \in L^2((0;T); H^1(\Omega))$ получаем

$$\left|\iint_{Q_T} (u_\gamma^N)_t \varphi\,dx\,dt\right| = \left|\iint_{Q_T} (u_\gamma^N)_t \Pi_N\varphi\,dx\,dt\right| =$$

$$= \left|\iint_{Q_T} m_\gamma(u_\gamma^N)(\nabla\Delta u_\gamma^N - \Psi_\varepsilon''(u_\gamma^N)\nabla u_\gamma^N)\nabla\Pi_N\varphi\,dx\,dt - \iint_{Q_T} f(x,t,u_\gamma^N)\Pi_N\varphi\,dx\,dt\right| \le$$

$$\le c_1\left|\iint_{Q_T} |\nabla\Pi_N\varphi|^2\,dx\,dt\right|^{1/2} + c_2\iint_{Q_T} |u_\gamma^N|^\lambda |\Pi_N\varphi|\,dx\,dt \le c_1\left|\iint_{Q_T} |\nabla\Pi_N\varphi|^2\,dx\,dt\right|^{1/2} +$$

$$+ c_2\left(\int_0^T\left(\int_\Omega |u_\gamma^N|^{\lambda+1}\,dx\right)^{2\lambda/(\lambda+1)} dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\left(\int_\Omega |\Pi_N\varphi|^{\lambda+1}\,dx\right)^{2/(\lambda+1)} dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le c_1\|\varphi\|_{L^2((0;T);H^1(\Omega))} + c_2\left(\int_0^T \|u_\gamma^N\|_{L^{\lambda+1}(\Omega)}^{2\lambda}\,dt\right)^{1/2}\|\varphi\|_{L^2((0;T);L^{\lambda+1}(\Omega))}.$$

Из вложения $H^1(\Omega) \subset L^{\lambda+1}(\Omega)$ и (2.7) следует необходимая априорная оценка

$$\|\partial_t u_\gamma^N\|_{L^2((0;T);(H^1(\Omega))')} \le C$$

$\forall\lambda \ge 1$ при $N \in \{1, 2\}$ и $\lambda \in [1; 5]$ при $N = 3$, где C не зависит от N и γ.

Полученные априорные оценки и леммы о компактности (см., например, следствие 4 [29, с. 85]) позволяют перейти к пределу при $N \to +\infty$ (подробно см. [1, 2]), а также показать справедливость равенства

$$\int_0^T \langle (u_\gamma)_t(t), \zeta(t)\rangle_{(H^1)', H^1}\,dx =$$

$$= \iint_{Q_T} m_\gamma(u_\gamma)(\nabla\Delta u_\gamma - \Psi_\varepsilon''(u_\gamma)\nabla u_\gamma)\nabla\zeta\,dx\,dt - \iint_{Q_T} f(x,t,u_\gamma)\zeta\,dx\,dt, \tag{2.8}$$

где $\zeta \in L^2((0;T); H^1(\Omega))$, $\nabla\zeta \cdot \bar{n} = 0$ на $\partial\Omega \times (0;T)$.

Для осуществления предельного перехода в случае, когда $\gamma \to 0$, необходима дополнительная информация относительно L^2-нормы Δu_γ. С этой целью выберем в качестве пробной функции в (2.8) $\zeta = u_\gamma - \Delta u_\gamma + g_\gamma(u_\gamma)$, где

$$g_\gamma(z) = \int_1^z \frac{d\varsigma}{m_\gamma(\varsigma)} \quad \text{и} \quad G_\gamma'(z) = g_\gamma(z).$$

В итоге после простых преобразований получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\gamma\right\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega G_\gamma(u_\gamma)dx +$$

$$+ c\int\limits_\Omega \left[m_\gamma(u_\gamma)\left|\nabla\Delta u_\gamma\right|^2 + \left|\Delta u_\gamma\right|^2 + \Psi''_\varepsilon(u_\gamma)\left|\nabla u_\gamma\right|^2 + \left|u_\gamma\right|^{\lambda+1}\right]dx \le$$

$$\le c\left\|u_\gamma\right\|^2_{H^1(\Omega)} + \int\limits_\Omega f(.,.,u_\gamma)\Delta u_\gamma\, dx - \int\limits_\Omega f(.,.,u_\gamma)g_\gamma(u_\gamma)dx := c\left\|u_\gamma\right\|^2_{H^1(\Omega)} + I_1 - I_2.$$

Применяя к I_1 неравенство Коши с „ε" и используя вложение $H^1(\Omega)\subset$ $\subset L^{2\lambda}(\Omega)$, делаем вывод, что

$$I_1 \le \tilde{\varepsilon}\int\limits_\Omega \left|\Delta u_\gamma\right|^2 dx + c(\tilde{\varepsilon})\left\|u_\gamma\right\|^{2\lambda}_{H^1(\Omega)}$$

для всех $\lambda\ge 1$ при $N\in\{1,2\}$ и $1\le\lambda\le 3$ при $N=3$. Теперь оценим интеграл $-I_2$. В случае, когда $u_\gamma\ge 1$ или $u_\gamma\le 0$,

$$-I_2 \le 0,$$

а для $0<u_\gamma\le R<1$

$$0 < -I_2 \le \begin{cases} c_1 & \text{при } \lambda\ge s-1; \\ c_2 G_{\delta\sigma}(u) & \text{при } 1\le\lambda<s-1. \end{cases}$$

Если же $R<u_\gamma<1$, то

$$0 < -I_2 \le c_3.$$

Постоянные c_i, $i=1,2,3$, не зависят от γ.

При исследовании поведения $-I_2$ для малых значений u_γ было использовано такое простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть*

$$g_\gamma(z) = \int\limits_1^z \frac{d\varsigma}{m_{\delta\sigma}(\varsigma)+\gamma}, \qquad g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) = \int\limits_1^z \frac{\varsigma^{\alpha+n-1}}{m_{\delta\sigma}(\varsigma)}d\varsigma$$

и

$$G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) = \int\limits_1^z g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(\varsigma)d\varsigma, \qquad G_\gamma(z) = \int\limits_1^z g_\gamma(\varsigma)d\varsigma.$$

Тогда существуют постоянные $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2>0$ *и* $0<R<1$ *такие, что*

$$-zg_\gamma(z) \le \tilde{c}_1 G_\gamma(z) \qquad \forall\, 0<z<R,\ n>0,$$

$$-zg^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) \le \tilde{c}_2 G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) \qquad \forall\, 0<z<R,\ s>\alpha,$$

где $\gamma,\delta,\sigma\ge 0$, *причем* R — *фиксированное число, зависящее от известных величин и не зависящее от параметров* γ,δ,σ.

Вследствие приведенных выше оценок после применения нелинейной леммы Гронуолла в случае, когда $1\le\lambda<s-1$, и соответствующего выбора $\tilde{\varepsilon}$ получим основную априорную оценку

$$\frac{1}{2}\|u_\gamma\|^2_{H^1(\Omega)} + \int\limits_\Omega G_\gamma(u_\gamma)\,dx +$$

$$+ \; c \iint\limits_{Q_t} \left[m_\gamma(u_\gamma)\left|\nabla\Delta u_\gamma\right|^2 + \left|\Delta u_\gamma\right|^2 + \Psi''_\varepsilon(u_\gamma)\left|\nabla u_\gamma\right|^2 + \left|u_\gamma\right|^{\lambda+1}\right] dx\,d\tau \;\le\; C \tag{2.9}$$

$$\forall t:\, 0 < t < T = T(u_0),$$

где C не зависит от γ и ε.

Эта оценка с учетом равномерной ограниченности $(u_\gamma)_t$ в $L^2((0;\,T);\,(H^1(\Omega))')$ позволяет перейти к пределу по γ [2] на основании соответствующих лемм о компактности [29].

Так же, как в работе [2], используя равномерную ограниченность члена $\int_\Omega G_\gamma(u_\gamma)\,dx$, можно показать положительность решения задачи $(P^{\varepsilon\delta\sigma})$ для $\lambda \ge 1$ и достаточно больших значений показателя s в коэффициенте $m_{\delta\sigma}(z)$. Таким образом, получена аппроксимация решений задачи $(P^{\varepsilon\delta\sigma})$ положительными решениями регуляризованной задачи.

2 *этап.* Осуществим предельные переходы по ε, δ и σ с помощью необходимых для этого априорных оценок.

Умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ уравнение (2.4) на функцию $-\Delta u + \Psi'_\varepsilon(u) + g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u)$. Тогда для $\alpha \in \left(\frac{1}{2} - n;\, 2 - n\right)$ выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \Psi_\varepsilon(u) + G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u)\right] dx + \int\limits_\Omega m_{\delta\sigma}(u)\left|\nabla\Delta u - \Psi''_\varepsilon(u)\nabla u\right|^2 dx \;+$$

$$+ \; c_1 \int\limits_\Omega \left[\left|D^2 u^{(\alpha+n+1)/2}\right|^2 + \left|\nabla u^{(\alpha+n+1)/4}\right|^4\right] dx + c_2 \int\limits_\Omega u^{\alpha+n-1}\Psi''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2\,dx \;\le$$

$$\le\; -\int\limits_\Omega f(.,..u)\,g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u)\,dx - \int\limits_\Omega f(.,..,u)\Psi'_\varepsilon(u)\,dx + \int\limits_\Omega f(.,..,u)\Delta u\,dx \;+$$

$$+ \;\tilde c \int\limits_\Omega u^{\alpha+n+1}\,dx \;:=\; J_1 + J_2 + J_3 + \tilde c \int\limits_\Omega u^{\alpha+n+1}\,dx, \tag{2.10}$$

где $c_1 = c_1(\alpha, n)$, $\tilde c = 0$, если Ω выпуклая,

$$g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) \;=\; \int\limits_1^z \frac{\varsigma^{\alpha+n-1}}{m_{\delta\sigma}(\varsigma)}\,d\varsigma \quad \text{и} \quad G^{(\alpha)}_{\delta\sigma} \;=\; \int\limits_1^z g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(\varsigma)\,d\varsigma.$$

Подробную информацию о получении этого неравенства в случае, когда $f = 0$, можно найти в работе [30].

Относительно J_1 и J_2 проводим те же рассуждения с использованием леммы 1, что и для интеграла $-I_2$ на первом этапе доказательства теоремы, а слагаемое J_3 оценим так:

$$J_3 \;\le\; \tilde c_1 \int\limits_\Omega u^{(2\lambda-n-\alpha+1)/2}\left|\Delta u^{(\alpha+n+1)/2}\right| dx + \tilde c_2 \int\limits_\Omega u^{\lambda-1}|\nabla u|^2\,dx \;\le$$

$$\le\; \tilde{\tilde\varepsilon} \int\limits_\Omega \left(\left|D^2 u^{(\alpha+n+1)/2}\right|^2 + \left|\nabla u^{(\alpha+n+1)/4}\right|^4\right) dx + c(\tilde{\tilde\varepsilon}) \int\limits_\Omega u^{2\lambda-n-\alpha+1}\,dx.$$

Отсюда в силу вложения $H^1(\Omega) \subset L^{2\lambda-n-\alpha+1}(\Omega)$ для всех λ таких, что $1 \le \lambda$, если $N \in \{1, 2\}$, и $1 \le \lambda \le \dfrac{n+\alpha+5}{2}$, если $N = 3$, после применения нелинейной леммы Гронуолла получим первую априорную оценку.

Из равномерной ограниченности потока $\bar{J}_{\varepsilon\delta\sigma}(u) = m_{\delta\sigma}(u)(\nabla\Delta u - \Psi''_{\varepsilon}(u)\nabla u)$ в $L^2((0;T);L^{q'}(\Omega))$, где $q' = 2$ при $N = 1$ и $q' \in \left(1; \dfrac{4N}{2N+(N-2)n}\right)$ при $N \geq 2$, доказательство которой проводится так же, как в [12, 30], следует оценка

$$\left|\iint\limits_{Q_T} u_t\varphi\,dx\,dt\right| = \left|\iint\limits_{Q_T} J_{\varepsilon\delta\sigma}\nabla\varphi\,dx\,dt - \iint\limits_{Q_T} f(x,t,u)\varphi\,dx\,dt\right| \leq$$

$$\leq \|J_{\varepsilon\delta\sigma}\|_{L^2((0;T);L^{q'}(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L^2((0;T);L^q(\Omega))} + d_2\iint\limits_{Q_T} u^{\lambda}|\varphi|\,dx\,dt \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi\|_{L^2((0;T);L^q(\Omega))} + d_2\left(\int\limits_0^T \|u\|^{2\lambda}_{L^{\lambda+1}(\Omega)}dt\right)^{1/2}\|\varphi\|_{L^2((0;T);L^{\lambda+1}(\Omega))},$$

где $q = \dfrac{q'}{q'-1} > 2$. В силу равномерной ограниченности решений в $L^\infty((0;T);$ $H^1(\Omega))$, вложений $H^1(\Omega) \subset L^{\lambda+1}(\Omega)$ и $W^1_q(\Omega) \subset L^{\lambda+1}(\Omega)$ получим неравенство

$$\|\partial_t u\|_{L^2((0;T);(W^1_q(\Omega))')} \leq C$$

для $\lambda \geq 1$ при $N \in \{1, 2\}$ и $\lambda \in [1;3]$ при $N = 3$, причем C не зависит от ε, δ и σ.

Найденные оценки дают возможность осуществить предельные переходы относительно ε, δ и σ по схеме, предложенной в [12]. В этой работе важную роль играет аналог леммы о компактности, доказанный в лемме 1.5 [30, с. 10], который в нашем случае можно доказать тем же способом и сформулировать так.

Лемма 2. *Пусть при* $N \in \{1, 2\}$, $0 < n$, $1 \leq \lambda$ $\beta \in \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{2}\right)$, *а при* $N = 3$, $0 < n < 4$, $1 \leq \lambda < 7$ $\beta \in \left(\dfrac{3}{4}; \min\left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{6}{\lambda+1}\right\}\right)$, *и пусть* $\Im$ — *ограниченное подмножество в* $L^\infty((0;T);H^1(\Omega))$ *такое, что выполняются условия:*

i) $\forall u \in \Im$ $\exists J(u)$: $u_t = -\operatorname{div} J - f(x,t,u)$ в $L^2((0;T);(W^1_q(\Omega))')$,

$\{J(u)\}_{u\in\Im}$ *ограничено в* $L^2((0;T);L^{q'}(\Omega))$ $\forall q' < \dfrac{4N}{2N+(N-2)n}$,

$\{u^{\lambda+1}\}_{u\in\Im}$ *ограничено в* $L^1(Q_T)$;

ii) $\{u^\beta\}_{u\in\Im}$ *ограничено в* $L^2((0;T);H^2(\Omega))$.

Тогда $\{u^\beta\}_{u\in\Im}$ *является относительно компактным в* $L^2((0;T);H^1(\Omega))$.

3 *этап.* Так же, как в работе [12, с. 1518] (см. предложение 3.1), на основе локальной энтропийной оценки (2.3) покажем, что полученные выше „сильные" решения задачи Неймана имеют конечную скорость распространения. Этот факт позволяет построить соответствующие „сильные" решения задачи Коши (см.[12, с. 1529], теорема 4.1).

Замечание 2. Если $f(x,t,z) \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^1)$, удовлетворяет (2.2) и условиям

$$d'_1|z|^{\lambda-1} \leq f_z(x,t,z) \leq d'_2|z|^{\lambda-1} \quad \forall\,(x,t,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^1, \quad 0 < d'_1 < d'_2 < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{N} f_{x_i}^2(x,t,z) \le d|z|^{2\lambda} \quad \forall\,(x,t,z)\in \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^1, \quad 0<d<\infty,$$

то для $N\in\{1,2,3\}$, $m>0$, $n\in(1/8;2)$, $1\le\lambda$ при $N\in\{1,2\}$ и $1\le\lambda\le 5$ при $N=3$ можно доказать глобальную теорему о существовании „сильных" решений задачи (C). Схема доказательства та же, что и выше. Основное отличие состоит в оценке интегралов вида $\int_\Omega f(.,.,u)\Delta u\,dx$, для которых в силу дополнительных предположений на функцию $f(x,t,z)$ выполняются неравенства вида

$$\int\limits_\Omega f(.,.,u)\Delta u\,dx \le -C\int\limits_\Omega \left|\nabla u^{(\lambda+1)/2}\right|^2 dx + C(u_0),$$

где постоянные C и $C(u_0)$ положительны.

3. Временная задержка распространения носителя. Введем следующие обозначения:

$$\Omega(s) = \{x=(x_N,x'):\ x_N>s+a_1|x'|,\ 0<a_1<\infty\}, \qquad Q_T(s)=\Omega(s)\times(0;T),$$

$$K_T(s,\delta) = Q_T(s)\backslash Q_T(s+\delta), \qquad h_0(s)=\int\limits_{\Omega(s)} u_0^{\alpha+1}(x)\,dx \quad \forall s\in\mathbb{R}^1, \quad \delta>0.$$

Не ограничивая общности, будем предполагать, что

$$\operatorname{supp} u_0 \cap \{x_N\ge a_2|x'|\} = \varnothing,$$

где $a_2\in[0;a_1)$ — некоторое фиксированное число. Таким образом,

$$h_0(s)\equiv 0 \quad \forall s\ge 0. \tag{3.1}$$

В этом пункте будут найдены условия на поведение начальной функции $u_0(x)$ в окрестности границы ее носителя, обеспечивающие появление эффекта временной задержки распространения носителя произвольного „сильного" решения задачи Коши.

Теорема 2. *Пусть начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет* (3.1) *и для некоторого* $\alpha\in\left(\max\left\{\frac{1}{2}-n;0\right\};2-n\right)$ *при* $N\in\{1,2\}$ *и* $\alpha\in\left(\max\left\{\frac{1}{2}-n;2\lambda-5-n;0\right\};2-n\right)$ *при* $N=3$ *одному из таких условий малости в окрестности границы своего носителя:*

1) $\forall\lambda\ge 1$

$$h_0(s)\le\begin{cases} k(-s)^{N+\frac{2(\alpha+1)}{m}}, & m\le\dfrac{n}{2};\\ k(-s)^{N+\frac{4(\alpha+1)}{n}}, & m>\dfrac{n}{2};\end{cases}$$

2) $n+1<\lambda<m+1$

$$h_0(s)\le\begin{cases} k(-s)^{N+\frac{2(\alpha+1)}{m-\lambda+1}}, & m\le\dfrac{n}{2}+\lambda-1;\\ k(-s)^{N+\frac{4(\alpha+1)}{n}}, & m>\dfrac{n}{2}+\lambda-1;\end{cases}$$

3) $m+1 < \lambda < n+1$

$$h_0(s) \le \begin{cases} k(-s)^{N+\frac{2(\alpha+1)}{m}}, & m \le \dfrac{n-\lambda+1}{2}; \\ k(-s)^{N+\frac{4(\alpha+1)}{n-\lambda+1}}, & m > \dfrac{n-\lambda+1}{2}; \end{cases}$$

4) $\lambda < 1+\min\{n; m\}$

$$h_0(s) \le \begin{cases} k(-s)^{N+\frac{2(\alpha+1)}{m-\lambda+1}}, & m \le \dfrac{n+\lambda-1}{2}; \\ k(-s)^{N+\frac{4(\alpha+1)}{n-\lambda+1}}, & m > \dfrac{n+\lambda-1}{2}, \end{cases}$$

где $0 < -s \le 1$. *Тогда существует* $T^* = T^*(k) > 0$ *такое, что для любого „сильного" решения задачи* (C)

$$\operatorname{supp}_x u(.,t) \cap \Omega(0) = \varnothing, \quad 0 < t < T^*,$$

в случаях, соответствующих условиям 1 – 3, *и*

$$\operatorname{supp}_x u(.,t) \cap \Omega(0) = \varnothing \quad \forall t > 0$$

в случае, соответствующем условию 4.

***Замечание* 3.** Выбор в качестве семейства $\Omega(s)$ конусов на достаточно гладких начальных функциях позволяет установить точное условие пологости, не зависящее от размерности пространства N. Такие исчерпывающие множества были использованы в работе [31] при исследовании квазилинейных многомерных параболических уравнений высокого порядка с конвективным членом.

***Замечание* 4.** Полученное в первом случае условие малости на поведение $u_0(x)$ при $m > n/2$ совпадает с соответствующим условием из [28] для уравнения (1.2), а при $m < n/2$ в некотором смысле аналогично условию малости на поведение начальной функции для уравнения пористой среды $u_t = \operatorname{div}(u^m \nabla u)$ (см., например, [19]). Установленное в четвертом случае поведение начальной функции вблизи границы ее носителя в определенном смысле соответствует условию, полученному в [25] для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка с поглощением.

Доказательство теоремы основано на получении и дальнейшем анализе некоторого специального функционального неравенства, связанного с энергетическими функциями

$$I_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1}\,dx\,dt, \quad E_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1}\,dx\,dt,$$

где $u(x,t)$ — „сильное" решение задачи (C). Этот метод был предложен в работе [25] для изучения локализационных свойств и распространения носителей энергетических обобщенных решений задачи Коши – Дирихле для дивергентных параболических уравнений высокого порядка с поглощением. Прежде чем приступить к основному доказательству, покажем справедливость двух вспомогательных утверждений.

Лемма 3. *Пусть* $u(x,t)$ — *„сильное" решение задачи* (C). *Тогда для всех* α, *удовлетворяющих условию теоремы* 2, *выполняется неравенство*

$$\sup_{(0;T)} \int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}\,dx + \frac{1}{T} \int\limits_{Q_T(s+\delta)} \int u^{\alpha+1}\,dx\,dt \; +$$

$$+ C \int_{Q_T(s+\delta)}\int\Big[\big|\nabla u^{(\alpha+m+1)/2}\big|^2 + \big|\nabla u^{(\alpha+n+1)/4}\big|^4 + \big|D^2 u^{(\alpha+n+1)/2}\big|^2 + u^{\lambda+\alpha}\Big]dx\,dt \le$$

$$\le C\left(\delta^{-2}\int_{K_T(s,\delta)}\int u^{m+\alpha+1}\,dx\,dt + \delta^{-4}\int_{K_T(s,\delta)}\int u^{n+\alpha+1}\,dx\,dt + h_0(s)\right) = R_T(s,\delta) \quad (3.2)$$

$$\forall s\in\mathbb{R}^1, \quad \delta > 0,$$

где все постоянные зависят лишь от известных параметров задачи.

Доказательство. Введем в рассмотрение неотрицательные срезающие функции $\zeta(\tau)$, $\varphi(\tau)\in C^2(\mathbb{R}^1)$, обладающие такими свойствами:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \le 0; \\ 1, & \text{если } \tau \ge \dfrac{15}{16}, \end{cases} \quad \text{при этом} \quad 0 \le \varphi(\tau) \le 1 \quad \forall\tau\in\mathbb{R}^1,$$

$$\zeta(\tau) = \begin{cases} \tau, & \text{если } \tau \ge \dfrac{1}{8}; \\ \dfrac{1}{16}, & \text{если } \tau < \dfrac{1}{32}, \end{cases} \quad \text{при этом} \quad \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} \ge 0 \quad \forall\tau\in\mathbb{R}^1.$$

Определим семейство основных срезающих функций:

$$\varphi_{s,\delta}(x) = \varphi\left(-a_1\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) + \frac{x_N - s}{\delta}\right) \quad \forall s\in\mathbb{R}^1, \quad \delta > 0.$$

В силу приведенных выше свойств срезок $\varphi(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ функции из указанного семейства удовлетворяют таким соотношениям:

$$\varphi_{s,\delta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_N \le s + a_1\delta\zeta\left(\dfrac{|x'|}{\delta}\right); \\ 1, & \text{если } x_N \ge s + a_1\delta\left(\zeta\dfrac{|x'|}{\delta} + \dfrac{15}{16}\right), \end{cases} \quad 0 \le \varphi_{s,\delta}(x) \le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}^N,$$

$$|\nabla\varphi_{s,\delta}| \le \frac{C}{\delta}, \quad |\Delta\varphi_{s,\delta}| \le \frac{C}{\delta^2}$$

$$\forall x\colon\ s + a_1\delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) \le x_N \le s + a_1\delta\left(\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) + \frac{15}{16}\right).$$

Кроме того, легко проверить справедливость включений

$$\Omega(s+\delta) \subset \left\{x\colon x_N \ge s + a_1\delta\left(\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) + \frac{15}{16}\right)\right\} \subset$$

$$\subset \Omega\left(s + \frac{15}{16}\delta\right) \subset \left\{x\colon x_N \ge s + a_1\delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right)\right\} \subset \Omega(s),$$

$$K(s,\delta) \supset \left\{x\colon s + a_1\delta\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) \le x_N \le s + a_1\delta\left(\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) + \frac{15}{16}\right)\right\},$$

из которых следует, что $\operatorname{supp}\varphi_{s,\delta}(x) \Subset \Omega\left(s + \frac{15}{16}\delta\right)$.

Полагая в локальной энтропийной оценке (2.3) $\zeta^4(x,t) = \varphi^4_{s,\delta}(x)\exp(-tT^{-1})$, после простых преобразований получаем неравенство (3.2).

Лемма 4. *Пусть $u(x,t)$ — произвольное „сильное" решение задачи (C).*

Введем энергетические функции, связанные с этим решением:

$$I_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1}\,dx\,dt, \qquad E_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1}\,dx\,dt.$$

Тогда для всех $\lambda \geq 1$ *выполняются неравенства*

$$I_T(s+\delta) \leq C_1 T^{1-\theta_2} R_T^{1+k_2}(s,\delta), \tag{3.3}$$

$$E_T(s+\delta) \leq \tilde{C}_1 T^{1-\theta_1} R_T^{1+k_1}(s,\delta), \tag{3.4}$$

где

$$\theta_1 = \frac{mN}{mN+2(\alpha+1)}, \quad k_1 = \frac{2m}{mN+2(\alpha+1)}, \qquad \theta_2 = \frac{nN}{nN+4(\alpha+1)}, \quad k_2 = \frac{4n}{nN+4(\alpha+1)}, \tag{3.5}$$

а также

$$I_T(s+\delta) \leq C_2 R_T^{1+l_2}(s,\delta), \quad \text{если} \quad \lambda \leq n+1, \tag{3.6}$$

$$E_T(s+\delta) \leq \tilde{C}_2 R_T^{1+l_1}(s,\delta), \quad \text{если} \quad \lambda \leq m+1, \tag{3.7}$$

где

$$l_1 = \frac{2(m-\lambda+1)}{N(m-\lambda+1)+2(\alpha+1)}, \quad l_2 = \frac{4(n-\lambda+1)}{N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1)}. \tag{3.8}$$

Все постоянные не зависят от T.

Доказательство. Применяя интерполяционное неравенство (4.1), приведенное в пункте 4, к функции $v(x) = u^{(\alpha+n+1)/4}$ при $\bar{\bar{\delta}} \to \infty$ и полагая $a = d = 4$, $b = \dfrac{4(\alpha+1)}{n+\alpha+1}$, $i = 1$, получаем

$$\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{n+\alpha+1}\,dx \leq C\left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} \left|\nabla u^{(n+\alpha+1)/4}\right|^4 dx\right)^{\theta_2}\left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}\,dx\right)^{\frac{(1-\theta_2)(n+\alpha+1)}{\alpha+1}}.$$

После интегрирования по времени и использования неравенства Гельдера с показателями θ_2^{-1} и $(1-\theta_2)^{-1}$ найдем оценку

$$\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{n+\alpha+1}\,dx\,dt \leq$$

$$\leq C\left(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} \left|\nabla u^{(n+\alpha+1)/4}\right|^4 dx\,dt\right)^{\theta_2}\left(\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}\,dx\right)^{1+\frac{n}{\alpha+1}} dt\right)^{1-\theta_2},$$

откуда в силу леммы 3 следует неравенство (3.3). Аналогично поступаем и при доказательстве (3.4), применяя неравенство (4.1) к $v(x) = u^{(\alpha+m+1)/2}$ при $\bar{\bar{\delta}} \to \infty$ и полагая $a = d = 2$, $b = \dfrac{2(\alpha+1)}{m+\alpha+1}$, $i = 1$. Интегрирование полученного неравенства по времени и использование неравенства Гельдера приводят к соотношению (3.4). Применим неравенство (4.2), установленное в пункте 4, к функции $v(x) = u^{(\alpha+m+1)/2}$ при $p = 2$, $r = \dfrac{2(\lambda+\alpha)}{m+\alpha+1}$, $q = \dfrac{2(\alpha+1)}{m+\alpha+1}$, $1 - b = \dfrac{2(\alpha+1)}{N(m-\lambda+1)+2(\alpha+1)}$. Из условия $r \le p$ следует ограничение $\lambda \le m+1$. Аналогично поступаем с функцией $v(x) = u^{(\alpha+n+1)/4}$ при $p = 4$, $r = \dfrac{4(\lambda+\alpha)}{n+\alpha+1}$, $q = \dfrac{4(\alpha+1)}{n+\alpha+1}$, $1 - b = \dfrac{4(\alpha+1)}{N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1)}$ для $\lambda \le n+1$. В результате получим неравенства (3.6), (3.7).

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

Пусть выполнено условие 1. В этом случае не учитывается влияние абсорбции на распространение носителя решения.

Введем в рассмотрение вспомогательные функции, связанные с энергетическими функциями $E_T(s)$ и $I_T(s)$, а именно,

$$A_T(s) = E_T^{1+k_2}(s), \qquad B_T(s) = I_T^{1+k_1}(s),$$

где k_i, $i = 1, 2$, определены в (3.5). Для этих функций в силу (3.3) и (3.4) выполняются неравенства

$$A_T(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_1)(1+k_2)} R_T^{\beta}(s,\delta),$$

$$B_T(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} R_T^{\beta}(s,\delta) \qquad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \delta > 0,$$

где $\beta := (1+k_1)(1+k_2)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $C_T(s) = T^h A_T(s) + B_T(s)$, где $h = (1-\theta_2)(1+k_1) - (1-\theta_1)(1+k_2)$. Учитывая приведенные выше соотношения, для функции $C_T(s+\delta)$ получаем оценку

$$C_T(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} [\delta^{-4}(I_T(s) - I_T(s+\delta)) + \\ + \delta^{-2}(E_T(s) - E_T(s+\delta)) + h_0(s)]^{\beta}. \tag{3.9}$$

Из того, что $(a-b)^{\alpha+1} \le a^{\alpha+1} - b^{\alpha+1}$ $\forall \alpha > 0$, $a > b > 0$, следуют неравенства

$$C_T(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} [\delta^{-4\beta}(B_T(s) - B_T(s+\delta))^{1+k_2} + \\ + \delta^{-2\beta}(A_T(s) - A_T(s+\delta))^{1+k_1} + h_0^{\beta}(s)] \le \\ \le c[\delta^{-4\beta} T^{(1-\theta_2)(1+k_1)} (\Delta C_T(s))^{1+k_2} + \delta^{-2\beta}(\Delta C_T(s))^{1+k_1} T^{(1-\theta_2)(1+k_1) - h(1+k_1)}] + \\ + cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} h_0^{\beta}(s),$$

где $\Delta C_T(s) = C_T(s) - C_T(s+\delta)$.

Теперь выберем параметр δ, который до сих пор был произвольным. Предварительно введем такие обозначения:

$$\delta_T^1(s) := [T^{(1-\theta_2)(1+k_1) - h(1+k_1)} C_T^{k_1}(s)]^{\frac{1}{2\beta}}, \qquad \delta_T^2(s) := [T^{(1-\theta_2)(1+k_1)} C_T^{k_2}(s)]^{\frac{1}{4\beta}},$$

$$S_T^1 := \{s \in \mathbb{R}^+ : \delta_T^1(s) \ge \delta_T^2(s)\}, \qquad S_T^2 := \mathbb{R}^+ \setminus S_T^1, \qquad J_T(s) := \max_{i=1,2} \{\delta_T^i(s)\}.$$

Полагая в полученных выше неравенствах $\delta = \delta_T^1(s)$, находим оценку

$$C_T(s + \delta_T^1(s)) \le \frac{2c}{2c+1} C_T(s) + cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} h_0^{\beta}(s) \quad \forall s \in S_T^1. \tag{3.10}$$

В самом деле, если $\delta_T^1(s) \geq \delta_T^2(s) > 0$, то

$$(\delta_T^1(s))^{-4\beta} C_T^{k_2}(s) T^{(1-\theta_2)(1+k_1)} \leq (\delta_T^2(s))^{-4\beta} C_T^{k_2}(s) T^{(1-\theta_2)(1+k_1)} = 1,$$

а если $\delta_T^1(s) \geq \delta_T^2(s) = 0$, то $C_T(s) = 0$. Это означает, что $\delta_T^1(s) = 0$ и утверждение теоремы очевидно. Аналогично поступаем и в случае $\delta = \delta_T^2(s)$:

$$C_T(s + \delta_T^2(s)) \leq \frac{2c}{2c+1} C_T(s) + cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} h_0^{\beta}(s) \quad \forall s \in S_T^2. \tag{3.11}$$

Таким образом, из (3.10) и (3.11) следует

$$C_T(s + J_T(s)) = \begin{cases} C_T(s + \delta_T^1), & s \in S_T^1; \\ C_T(s + \delta_T^2), & s \in S_T^2, \end{cases}$$

откуда

$$C_T(s + J_T(s)) \leq \frac{2c}{2c+1} C_T(s) + cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} h_0^{\beta}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1.$$

Возведя обе части данного неравенства в степень $k_1(2\beta)^{-1}$ и умножив на $T^{((1-\theta_2)(1+k_1)-h(1+k_1))/(2\beta)}$, получим неравенство относительно $\delta_T^1(s)$. Теперь возведем обе части этого неравенства в степень $k_2(4\beta)^{-1}$ и умножим на $T^{((1-\theta_2)(1+k_1))/(4\beta)}$. В итоге придем к неравенству относительно $\delta_T^2(s)$. Объединив оба эти неравенства, для функции $J_T(s)$ получим основное функциональное соотношение

$$J_T(s + J_T(s)) \leq \gamma J_T(s) + \bar{c} F_T(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{3.12}$$

где

$$F_T(s) := \max\{T^{(1-\theta_1)/2} h_0^{k_1/2}(s); T^{(1-\theta_2)/4} h_0^{k_2/4}(s)\}.$$

Положим в соотношении (3.9) $s = -2\delta$, $\delta = s$ и устремим $s \to \infty$. Тогда из ограниченности функций $I_T(s)$, $E_T(s)$, $h_0(s)$ следует справедливость оценки

$$C_T(-\infty) \leq cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)} h_0^{\beta}(-\infty).$$

Таким образом, существует такое $-\infty < s_0' < 0$, что

$$J_T(s) \leq \bar{\bar{c}} F_T(s) \quad \forall s < s_0'. \tag{3.13}$$

В силу предположения на возрастание функции $h_0(s)$

$$F_T(s) \leq -ks \max\{T^{(1-\theta_1)/2}; T^{(1-\theta_2)/4}\} := -as. \tag{3.14}$$

Теперь к функциям $J_T(s)$, $F_T(s)$, которые удовлетворяют соотношениям (3.12) – (3.14), применим лемму 5, сформулированную в пункте 4. В результате получим

$$J_T(s) \equiv 0 \quad \forall s \geq 0, \qquad T^* < T^*(k),$$

что и требовалось доказать.

Пусть выполнено условие 2. Схема доказательства теоремы та же, что и в первом случае, но с учетом влияния поглощения на движение носителя решения. Будем считать, что

$$A_T(s) = E_T^{1+k_2}(s), \qquad B_T(s) = I_T^{1+l_1}(s),$$

где k_2 и l_1 определены в (3.5), (3.8). В силу неравенств (3.3), (3.7)

$$A_T(s+\delta) \le cR_T^{\beta}(s,\delta), \quad B_T(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_2)(1+l_1)}R_T^{\beta}(s,\delta),$$

где $\beta := (1+l_1)(1+k_2)$. Функция $C_T(s)$ примет вид

$$C_T(s) = A_T(s) + T^{-(1-\theta_2)(1+l_1)}B_T(s).$$

Рассуждая, как и в первом случае, придем к функциональному неравенству (3.12), где

$$J_T(s) := \max\{T^{(1-\theta_2)/4}C_T^{k_2/(4\beta)}(s); C_T^{l_1/(2\beta)}(s)\},$$

$$F_T(s) = \max\{T^{(1-\theta_2)/4}h_0^{k_2/4}(s); h_0^{l_1/2}(s)\}.$$

Применяя лемму 5 к функциям $J_T(s)$, $F_T(s)$, в итоге получаем необходимое утверждение.

Пусть выполнено условие 3. Рассуждаем аналогично предыдущим случаям, учитывая влияние абсорбции. Положим

$$A_T(s) = E_T^{1+l_2}(s), \quad B_T(s) = I_T^{1+k_1}(s),$$

где k_1 и l_2 определены в (3.5), (3.8). Из неравенств (3.4), (3.6) следует

$$A_T(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_1)(1+l_2)}R_T^{\beta}(s,\delta), \quad B_T(s+\delta) \le cR_T^{\beta}(s,\delta),$$

где $\beta := (1+k_1)(1+l_2)$. Функция $C_T(s)$ примет вид

$$C_T(s) = T^{-(1-\theta_1)(1+l_2)}A_T(s) + B_T(s).$$

Поступая, как в первом случае, получаем неравенство (3.12), где

$$J_T(s) := \max\{T^{(1-\theta_1)/2}C_T^{k_1/(2\beta)}(s); C_T^{l_2/(4\beta)}(s)\},$$

$$F_T(s) = \max\{T^{(1-\theta_1)/2}h_0^{k_1/2}(s); h_0^{l_2/4}(s)\}.$$

Применение леммы 5 приводит к необходимому результату.

Пусть выполнено условие 4. Влияние поглощения на распространение носителя в этом случае наиболее существенно, поэтому положим

$$A_T(s) = E_T^{1+l_2}(s), \quad B_T(s) = I_T^{1+l_1}(s),$$

где l_1 и l_2 определены в (3.8). Применяя неравенства (3.4), (3.6), получаем

$$A_T(s+\delta) \le cR_T^{\beta}(s,\delta), \quad B_T(s+\delta) \le cR_T^{\beta}(s,\delta),$$

где $\beta := (1+l_1)(1+l_2)$. Функция $C_T(s)$ представима в виде

$$C_T(s) = A_T(s) + B_T(s),$$

а в соответствующем неравенстве (3.12)

$$J_T(s) := \max\{C_T^{l_1/(2\beta)}(s); C_T^{l_2/(4\beta)}(s)\}, \quad F_T(s) = \max\{h_0^{l_1/2}(s); h_0^{l_2/4}(s)\}.$$

После применения леммы 5 получим требуемое утверждение.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

4. Приложение. Пусть $K(s,\bar{\delta})$ — область, введенная в третьем пункте. Тогда несложно проверить, что интерполяционное неравенство Ниренберга – Гальярдо [32] имеет вид

$$\|v\|_{a,K(s,\bar{\delta})} \le k_1 \bar{\delta}^{\frac{-N(a-b)}{ab}} \|v\|_{b,K(s,\bar{\delta})} + k_2 \|D^i v\|^{\theta}_{d,K(s,\bar{\delta})} \|v\|^{1-\theta}_{b,K(s,\bar{\delta})}, \qquad (4.1)$$

где $v(x) \in W^i_d(K(s,\bar{\delta})) \cap L^b(K(s,\bar{\delta}))$, $N \ge 1$ — размерность, $\bar{\delta} > 0$, $b > 0$, $a > 1$, $d > 1$, $\theta \in (0;1)$ и вычисляется по формуле $\theta = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{i}{N} - \frac{1}{d}\right)^{-1}$, $0 \le k_1$, $k_2 < \infty$ — постоянные, не зависящие от $\bar{\delta}$, $v(x)$.

Пусть $\Omega(s) \subset \mathbb{R}^N$ — область, рассматриваемая в третьем пункте. Тогда справедливо такое интерполяционное неравенство, доказательство которого является простым следствием неравенств Гельдера и (4.1) (см., например, [33]):

$$\int_0^T \int_{\Omega(s)} |v|^p \, dx\, dt \le$$

$$\le \tilde{C} \left(\int_0^T \int_{\Omega(s)} |\nabla v|^p \, dx\, dt \right)^b \left(\int_0^T \int_{\Omega(s)} |v|^r \, dx\, dt \right)^{1-b} \sup_{[0;T]} \left(\int_{\Omega(s)} |v|^q \, dx \right)^{(p-r)(1-b)/q}, \qquad (4.2)$$

где $v \in L^p((0;T); W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega(s)))$, $T > 0$, $1 - b = pq(pq + N(p-r))^{-1}$, $r \le p$, $q > 0$, $\tilde{C} > 0$ зависит от N, p, q, r и не зависит от T.

Лемма 5 ([26], лемма 3). *Пусть некоторая непрерывная неотрицательная невозрастающая функция $f(s)$ удовлетворяет функциональному соотношению*

$$f(s + f(s)) \le \gamma f(s) + g(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad 0 < \gamma < 1,$$

где известная неотрицательная непрерывная невозрастающая функция $g(s)$ удовлетворяет оценке

$$g(s) \le -as \quad \forall s < 0, \quad 0 < a < \infty.$$

Пусть также для некоторого $-\infty < s_0' < 0$ выполняется неравенство

$$f(s) \le kg(s) \quad \forall s < s_0' < 0, \quad k > \frac{1}{1-\gamma}.$$

Если при этом

$$a < k^{-1}(1 - \gamma - k^{-1}),$$

то $f(s) \equiv 0$ $\forall s \ge 0$.

1. *Elliot C. M., Garcke H.* On the Cahn – Hilliard equation with degenerate mobility // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – **27.** – P. 404 – 423.
2. *Grün G.* Degenerate parabolic differential equations of fourth order and plasticity model with nonlocal hardening // Z. anal. Anwendungen. – 1995. – **14.** – P. 541 – 574.
3. *Bernis F.* Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems // Free Boundary Problems: Theory and Applications / Eds J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Linan and J. L. Vazquez (Pitman Res. Notes Math.). – 1995. – **323**. – P. 40 – 56.
4. *Bernis F., Friedman A.* Higher order nonlinear degenerate parabolic equations // J. Different. Equat. – 1990. – **83**. – P. 179 – 206.
5. *Bernis F.* Finite speed of propagation and continuity of the interface for thin viscous flows // Adv. Different. Equat. – 1996. – **1**, № 3. – P. 337 – 368.
6. *Bernis F.* Finite speed of propagation for thin viscous flows when $2 \le n < 3$ // C. r. Acad. sci. Ser. Math. – 1996. – **322**. – P. 1169 – 1174.
7. *Beretta E., Bertsch M., Dal Passo R.* Nonnegative solutions of a fourth-order nonliner degenerate parabolic equation // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1995. – **129**, № 2. – P. 175 – 200.

8. *Bertozzi A. L., Pugh M.* Long-wave instabilities and saturation in thin film equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1998. – **51**. – P. 625 – 661.
9. *Kersner R., Shishkov A.* Existence of free-boundaries in tnin-film theory. – Donetsk, 1996. – **15**. – (Preprint / IAMM NASU; № 6).
10. *Hulshof J., Shishkov A.* The thin film equation with $2 \leq n < 3$: Finite speed of propagation in terms of the L^1-norm // Adv. Different. Equat. – 1998. – **3**. – P. 625 – 642.
11. *Bertsch M., Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* The thin viscous flow equation in higher space dimension // Ibid. –1998. – **3**. – P. 417 – 440.
12. *Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A.* The thin film equation with nonlinear diffusion // Communs Part. Different. Equat. – 2001. – **26**, № 9, 10. – P. 1509 – 1557.
13. *Bertozzi A. L., Pugh M.* The lubrication approximation for thin viscous films: the moving contact line with a porous media cutoff of the Van der Waals interactions // Nonlinearity. – 1994. – **7**. – P. 1535 –1564.
14. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* К вопросу пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – **12**. – С. 261 – 268.
15. *Калашников А. С.* Распространение возмущений в нелинейных средах при наличии поглощения // Там же. – 1974. – **14**. – С. 70 – 85.
16. *Калашников А. С.* О дифференциальных свойствах обобщенных решений уравнений типа нестационарной фильтрации // Вестн. Моск. ун-та. – 1974. – **29**. – С. 48 – 53.
17. *Diaz J. I., Herrero M. A.* Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1981. – **89**. – P. 249 – 258.
18. *Bertsch M., Nambu T., Peletier L. A.* Decay of solutions of a degenerate nonlinear diffusion equations // Nonlinear Anal. – 1982. – **6**. – P. 539 – 554.
19. *Knerr B. F.* The porous medium equation in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **234**. – P. 381 – 415.
20. *Антонцев С. Н.* О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6. – С. 1289 – 1293.
21. *Diaz J. I., Veron L.* Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **290**, № 2. – P. 787 – 814.
22. *Антонцев С. Н., Шмарев С. И.* Локальный энергетический метод и обращение в нуль слабых решений нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 4. – С. 777 – 781.
23. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* New results of the character of localization of solutions of elliptic and parabolic equations // Int. Ser. Numer. Math. – Basel: Birkhauser, 1992. – **106**. – P. 59 – 66.
24. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking properties for local solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption term // Ann. Fac. Sci. Toulouse. – 1995. – **4**, № 1. – P. 3 – 19.
25. *Шишков А. Е.* Динамика геометрии носителя обобщенного решения квазилинейного дивергентного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 3. – С. 537 – 547.
26. *Шишков А. Е., Щелков А. Г.* Динамика носителей энергетических решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Изв. РАН. – 1998. – **62**, № 3. – С. 175 –200.
27. *Stampacchia G.* Equations elliptiques du secont order a coefficients discontinues // Sem. Math. Super. (Ete, 1965): Les presses de L'universite de Montreal. – Montreal: Que, 1966. – **16**. – P. 326.
28. *Dal Passo R., Giacomelli L., Grün G.* A waiting time phenomenon for thin film equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. IV. – 2001. – **30**, № 2. – P. 437 – 464.
29. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. mat. Pura ed appl. – 1988. – **146**. – P. 65 – 96.
30. *Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* On a fourth-order degenerate parabolic equation: Global entropy estimates, existence and qualitative behavior of solutions // SIAM J. Math. Anal. – 1998. – **29**, № 2. – P. 321 – 342.
31. *Сапронов Д. А., Шишков А. Е.* Распространение возмущений в квазилинейных многомерных параболических уравнениях с конвективным членом // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 953 – 969.
32. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. – 1996. – **20**. – P. 733 – 737.
33. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equation with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 1986. – **104**. – P. 1 – 19.

Получено 09.07.2002