УДК 517.9

О. Б. Чернобай (Акад. держ. податк. служби України, Ірпінь)

ПРО СПЕКТРАЛЬНУ ТЕОРІЮ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЯДЕР ТЕПЛІЦА

For the Fourier transform associated with a spectral representation of positive definite generalized Toeplitz kernels, we present a criterion of its density in the space L^2.

Наведено критерій щільності у просторі L^2 перетворення Фур'є, пов'язаного зі спектральним зображенням додатно визначених узагальнених ядер Тепліца.

Дана стаття є продовженням роботи [1], в якій побудовано і досліджено інтегральне зображення узагальнених ядер Тепліца на основі теорії узагальнених власних функцій. При цьому ми розглядаємо два питання: вивчаємо умову щільності відповідного перетворення Фур'є у просторі L^2 за спектральною матричною мірою і наводимо загальний критерій самоспряженості оператора (тобто єдиності спектрального зображення).

Нехай

$$I = (-l, l), \quad 0 < l < \infty, \quad I_1 = I \cap [0, \infty), \quad I_2 = I \cap (-\infty, 0).$$

Позначимо

$$I_{\alpha\beta} = \{ t = x - y \mid x \in I_\alpha, y \in I_\beta \}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Розглянемо обмежене додатно визначене ядро

$$I \times I \ni (x, y) \mapsto K(x, y) \in \mathbb{C}^1.$$

Це ядро, за означенням, є узагальненим ядром Тепліца, якщо існують чотири неперервні функції $I_{\alpha\beta} \ni t \mapsto k_{\alpha\beta}(t) \in \mathbb{C}^1$ такі, що

$$K(x, y) = k_{\alpha\beta}(x - y), \quad \langle x, y \rangle \in I_\alpha \times I_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Для такого ядра маємо зображення [1 – 3]

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda(x-y)} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \kappa_\alpha(x) \kappa_\beta(y) \, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (x, y) \in I \times I, \tag{1}$$

де κ_α — характеристична функція інтервалу I_α, $\alpha = 1, 2$,

$$d\sigma(\lambda) = \left(d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right)_{\alpha, \beta = 1}^{2}$$

— невід'ємна скінченна матрична міра на $\mathbb{R}^1$.

На множині неперервних функцій $C(\tilde{I})$ ($\tilde{I}$ — замикання I) введемо квазіскалярний добуток

$$(f, g)_{H_K} := \int_I \int_I K(x, y) f(y) \overline{g(x)} \, dx \, dy, \quad f, g \in C(\tilde{I}), \tag{2}$$

і побудуємо відповідний гільбертовий простір H_K (див. [1, 4]). У цьому просторі буде щільною множина $C_0^\infty(I)$ фінітних нескінченне число разів диференційовних на I функцій, які анулюються в околах 0, $-l$ та l. Міра $d\sigma(\lambda)$ породжується розкладом одиниці оператора $C_0^\infty(I) \ni u \mapsto -iu'(x)$, що діє у просторі H_K. Такий розклад одиниці називають звичайним, якщо цей оператор істотно самоспряжений, і узагальненим, якщо розклад одиниці породжений істотним самоспряженим розширенням цього оператора.

Відомо [4, 5], що за довільною скінченною матричною мірою $\left(d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\right)_{\alpha,\beta=1}^{2}$ на $\mathbb{R}^1$ можна ввести простір $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$, елементами якого є двовимірні вектор-функції

$$\mathbb{R}^1 \ni \lambda \mapsto F(\lambda) = (F_1(\lambda), F_2(\lambda))$$

зі скалярним добутком

$$(F, G)_{L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))} = \int_{\mathbb{R}^1} \left(d\sigma(\lambda)F(\lambda), \overline{G(\lambda)}\right)_{\mathbb{C}^2}, \tag{3}$$

сумовні з квадратом у певному сенсі. Простір $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$ повний, у ньому щільною множиною є двовимірні неперервні обмежені вектор-функції $F(\lambda) = (F_1(\lambda), F_2(\lambda))$.

Кожній функції $f \in C(\tilde{I})$ поставимо у відповідність її перетворення Фур'є $\hat{f}(\lambda)$ — двовимірну вектор-функцію

$$C(\tilde{I}) \ni f \mapsto \hat{f}(\lambda) = \left(\hat{f}_1(\lambda), \hat{f}_2(\lambda)\right),$$

$$\hat{f}_\alpha(\lambda) = \int_{I_\alpha} f(x)e^{-i\lambda x}\, dx = \int_I f(x)\kappa_\alpha(x)e^{-i\lambda x}\, dx, \quad \alpha = 1, 2. \tag{4}$$

З (1) – (3) випливає, що для будь-яких $f, g \in C(\tilde{I})$

$$(f, g)_{H_K} = \int_I \int_I \left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{i\lambda(x-y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \kappa_\alpha(x)\kappa_\beta(y)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\right) f(y)\overline{g(x)}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(\int_I f(y)\kappa_\beta(y)e^{-i\lambda y}\, dy \int_I \overline{g(x)\kappa_\alpha(x)e^{-i\lambda x}}\, dx\right) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \hat{f}_\beta(\lambda)\,\overline{\hat{g}_\alpha(\lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^1} \left(d\sigma(\lambda)\hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right)_{\mathbb{C}^2}.$$

Цю рівність можна вважати рівністю Парсеваля для неперервних функцій f, g, тобто

$$(f, g)_{H_K} = \left(\hat{f}, \hat{g}\right)_{L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))}, \quad f, g \in C(\tilde{I}). \tag{5}$$

Оскільки у просторі H_K неперервні функції $f(x)$ утворюють щільну множину, для довільного елемента $\mathcal{A} \in H_K$ існує послідовність $f_n \in C(\tilde{I})$ така, що $f_n \to \mathcal{A}$ у просторі H_K. Тоді відповідно до рівності Парсеваля (5) $\hat{f}_n(\lambda)$ має границю у просторі $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$, яку ми позначимо через $\hat{\mathcal{A}}(\lambda)$, за означенням $\hat{\mathcal{A}}(\lambda)$ є перетворенням Фур'є елемента $\mathcal{A}$ у просторі H_K. Таким чином, рівність Парсеваля (5) переходить за допомогою граничного переходу в рівність Парсеваля для довільних елементів з H_K:

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B})_{H_K} = (\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}})_{L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))}, \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in H_K.$$

Можна сформулювати таку теорему.

Теорема 1. *Для того щоб сукупність функцій* $\left(C_0^\infty(I)\right)^\wedge$ *була щільною в* $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$, *необхідно і достатньо, щоб міра* $d\sigma(\lambda)$ *була породжена звичайним розкладом одиниці у просторі* H_K.

Розглянемо простір $C(\tilde{I}_1)$ неперервних функцій на $[0, l]$. Тоді неперервний функціонал на ньому $l(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in C(\tilde{I}_1)$, будемо називати δ-функцією $\delta_{0,1}$, зосередженою в 0 праворуч (зрозуміло, що $\delta_{0,1}$ можна ототожнити з одиничною мірою в 0).

Лема 1. δ-*Функція* $\delta_{0,1}$ *входить у простір* H_K *в такому сенсі. Існує послідовність функцій* $\omega_n(x) \in C(\tilde{I}_1)$, $n = 1, 2 \ldots$, *яка (після продовження їх нулем) збігається у просторі* H_K *до деякого вектора* $\delta_{0,1}$ *і разом з тим*

$$\int_{I_1} \omega_n(x)\varphi(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0), \qquad \varphi \in C(\tilde{I}_1). \tag{6}$$

Доведення. Ми побудуємо таку послідовність функцій ω_n, але лише обмежених. Легко бачити, що, усередивши ці функції, можна побудувати і відповідні неперервні або навіть нескінченно диференційовні функції.

Розглянемо послідовність $(\xi_n)_{n=1}^\infty$, $0 < \xi_n < l$, яка прямує до нуля. Нехай $0 < \varepsilon_n < \xi_n$. Покладемо

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2\varepsilon_n} \kappa_{(\xi_n - \varepsilon_n, \xi_n + \varepsilon_n)}(x),$$

тоді твердження (6) очевидне. З іншого боку, при $\xi_n \to 0$, $\xi_m \to 0$

$$(\omega_n, \omega_m)_{H_K} = \int_{I_1}\int_{I_1} K(x, y)\omega_n(y)\overline{\omega_m(x)}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon_n} \int_{\xi_n - \varepsilon_n}^{\xi_n + \varepsilon_n} \int_{\xi_n - \varepsilon_n}^{\xi_n + \varepsilon_n} K(x, y)\, dx\, dy \xrightarrow[n, m\to\infty]{} K(+0, +0),$$

тому скалярний добуток при $n, m \to \infty$

$$(\omega_n - \omega_m, \omega_n - \omega_m) = (\omega_n, \omega_n) - (\omega_n, \omega_m) - (\omega_m, \omega_n) + (\omega_m, \omega_m) \to 0.$$

Отже, послідовність ω_n має границю у просторі H_K, яку ми і позначимо $\delta_{0,1}$.

Аналогічно, існує δ-функція $\delta_{0,2}$, зосереджена в 0 ліворуч, тобто існує елемент типу $\delta_{0,1} \in H_K$, для якого виконується лема 1, сформульована для інтервалу I_2.

Лема 2. *Для перетворень Фур'є* δ-*функцій* $\delta_{0,1}$ *та* $\delta_{0,2}$ *маємо*

$$\hat{\delta}_{0,1}(\lambda) = (1, 0), \qquad \hat{\delta}_{0,2}(\lambda) = (0, 1).$$

Доведення. Відповідно до (4) побудуємо перетворення Фур'є для функцій $\omega_n(x)$. Згідно з лемою 1 одержимо

$$\hat{\omega}_n(\lambda) = \left(\int_{I_1} \omega_n(x) e^{-i\lambda x}\, dx, \int_{I_2} \omega_n(x) e^{-i\lambda x}\, dx\right) =$$

$$= \left(\int_{I_1} \omega_n(x) e^{-i\lambda x}\, dx, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1, 0).$$

Оскільки границя $\omega_n(x)$ є функцією $\delta_{0,1}$ у просторі H_K при $x \to 0$ праворуч, то границя $\hat{\omega}_n(\lambda)$ у просторі $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$ дорівнює $\hat{\delta}_{0,1}(\lambda)$ при $x \to 0$ праворуч. Отже, $\hat{\delta}_{0,1}(\lambda) = (1, 0)$. Аналогічно маємо $\hat{\delta}_{0,2}(\lambda) = (0, 1)$.

Лему доведено.

Розглянемо оператор

$$H_K \supset C_0^\infty(I) \ni u \mapsto A'u = -i\frac{du}{dx} \in C_0^\infty(I). \tag{7}$$

Пояснимо зв'язок між мірою $d\sigma(\lambda)$ та замиканням A цього оператора A'. З [1, 4] випливає, що міра $d\sigma(\lambda)$ однозначно відповідає самоспряженому розширенню B у просторі H_K оператора A або самому оператору A, коли він самоспряжений. Точніше, для розкладу одиниці $E(\Delta)$ оператора B встановлено формулу

$$E(\Delta) = \int_\Delta P(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{8}$$

де $P(\lambda)$ — узагальнений проектор, $d\rho(\lambda)$ — спектральна міра, а Δ — борелівська множина з $\mathbb{R}^1$. Він має ядро $\Omega(\lambda) = \Omega(\lambda; x, y)$ (див. (3.10) [1]), для якого, в свою чергу, встановлено рівність

$$\Omega(\lambda; x, y) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} e^{i\lambda(x-y)} \kappa_\alpha(x)\kappa_\beta(y)\tau_{\alpha\beta}(\lambda), \qquad x, y \in I.$$

Зауважимо, що при цьому

$$d\sigma(\lambda) = \left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda)\right)_{\alpha, \beta = 1}^{2} d\rho(\lambda),$$

і тому розклад одиниці оператора B і $d\sigma(\lambda)$ однозначно визначаються по B.

З рівності (8) та викладеного вище випливає

$$\left(E(\Delta)\mathcal{A}, \mathcal{B}\right)_{H_K} = \int_\Delta \left(d\sigma(\lambda)\hat{\mathcal{A}}(\lambda), \hat{\mathcal{B}}(\lambda)\right).$$

Покладаючи $\mathcal{A} = \delta_{0,\alpha}$, $\mathcal{B} = \delta_{0,\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, одержуємо рівність

$$\left(E(\Delta)\delta_{0,\alpha}, \delta_{0,\beta}\right)_{H_K} = \sigma_{\alpha\beta}(\Delta), \qquad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Доведення теореми. *Достатність.* Нехай $\sigma(\Delta) = \left(E(\Delta)\delta_{0,\alpha}, \delta_{0,\beta}\right)_{H_K}$, де $E(\Delta)$ — звичайний розклад одиниці оператора A, тобто цей оператор самоспряжений. Встановимо щільність елементів $\left(C_0^\infty(I)\right)^\wedge$ у просторі $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$.

У даному випадку мірі $d\sigma(\lambda)$ відповідає самоспряжений оператор A, який діє у просторі H_K; його резольвенту позначимо через $R_z (\operatorname{Im} z \neq 0)$.

Нехай $u \in C_0^\infty(I)$. Оскільки $R_z u$ належить області визначення $\operatorname{Dom}(A)$, що лежить у просторі H_K, при фіксованому z можна знайти таке $v \in C_0^\infty(I)$, що $\| R_z u - v\|_{H_K} < \varepsilon$. Перейшовши по ізометрії з простору H_K у простір $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$, одержимо, що для кожного $\hat{u}$ знайдеться елемент $\hat{v}$ такий, що

$$\left\| \frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda - z} - \hat{v}(\lambda) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))} < \varepsilon.$$

Завдяки довільності ε це означає, що будь-яку функцію $\hat{u}(\lambda)/(\lambda - z)$ можна апроксимувати елементом $\hat{v}(\lambda)$, тобто $\hat{u}(\lambda)/(\lambda - z)$ для будь-якого елемента $\hat{u}(\lambda)$ належить замиканню $\left(C_0^\infty(I)\right)^\wedge$.

Нехай

$$h(\lambda) = (h_1(\lambda), h_2(\lambda)) \in L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$$

ортогональна до $\left(C_0^\infty(I)\right)^\wedge$, а отже, і до його замикання. Потрібно довести, що $h(\lambda) = 0$ ρ-майже скрізь. Таким чином, скалярний добуток

$$\left(h, \frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda - z}\right)_{L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))} = 0$$

для будь-якого z. Відповідно до рівності (3) одержимо

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(d\sigma(\lambda)h, \frac{\hat{u}}{\lambda - \bar{z}}\right)_{\mathbb{C}^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) h_\beta(\lambda) \frac{\overline{\hat{u}_\alpha(\lambda)}}{\lambda - \bar{z}}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \tau_{\alpha\beta}(\lambda) h_\beta(\lambda) \frac{\overline{\hat{u}_\alpha(\lambda)}}{\lambda - \bar{z}}\right) d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \bar{z}} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \tau_{\alpha\beta}(\lambda) h_\beta(\lambda) \overline{\hat{u}_\alpha(\lambda)}\right) d\rho(\lambda). \tag{9}$$

Як відомо з теорії перетворень Стільтьєса, з рівності

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{d\omega(\lambda)}{\lambda - z} = 0, \qquad z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$$

де $d\omega(\lambda)$ — комплекснозначна міра, випливає $d\omega(\lambda) = 0$. Таким чином, з (9) отримуємо

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \tau_{\alpha\beta}(\lambda) h_\beta(\lambda) \overline{\hat{u}_\alpha(\lambda)} = 0$$

майже скрізь при довільному $u \in C_0^\infty(I)$. Виберемо елемент u так, щоб $\hat{u}(\lambda) = (\hat{u}_1(\lambda), 0)$. Якщо $u \in C_0^\infty(I)$, то $u(x) = 0$ для $x \in I_2$. Тоді

$$\sum_{\beta=1}^{2} \tau_{1\beta}(\lambda) h_\beta(\lambda) \overline{\hat{u}_1(\lambda)} = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Оскільки значення $u \in C_0^\infty(I)$ на I_1 довільні, u можна вибрати так, щоб $\hat{u}_1(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Таким чином,

$$\sum_{\beta=1}^{2} \tau_{1\beta}(\lambda) h_\beta(\lambda) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^1,$$

але матриця $\left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda)\right)_{\alpha,\beta=1}^{2}$ ρ-майже скрізь додатна. Тому вектор $h(\lambda) = 0$ майже скрізь. Таким чином, $\hat{H}_K = L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$, що й потрібно було довести.

Необхідність. Перейдемо по ізометрії від простору H_K до $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$. Оператор A перейде в оператор $\hat{A}$ множення на λ, визначений спочатку на $\left(C_0^\infty(I)\right)^\wedge$, а потім розширений за допомогою замикання. Згідно з конструкцією міри $d\sigma(\lambda)$ можна вважати, що вона побудована у просторі $L^2(\mathbb{R}^1, d\sigma(\lambda))$ по $\hat{A}$. Але разом з тим відомо [4, 5], що міра $d\sigma(\lambda)$ будується в цьому просторі за звичайним (самоспряженим) оператором множення на λ. Це означає, що $\hat{A}$ і є цим оператором множення, а тому є самоспряженим. Але тоді і його прообраз A самоспряжений в H_K. Теорему доведено.

Перейдемо до підрахунку індексу дефекту оператора A. Для спрощення *будемо припускати, що ядро K неперервне в $I \times I$ та невироджене, і нагадаємо наступне.* Відомо [4] (гл. 8, § 3, п. 7, зокрема, лема 3.7), що у даному разі відповідний простір H_K можна розглядати як негативний, побудований за нульовим простором $H_0 = L^2(I, dx)$ та деяким позитивним простором $H_{K,+}$:

$$H_K \supset H_0 = L^2(I, dx) \supset H_{K,+}. \tag{10}$$

Простір $H_{K,+}$ будується як поповнення $\operatorname{Ran}(C)$ відносно скалярного добутку

$$(u, v)_{H_{K,+}} = (C^{-1}u, v)_{H_0}, \quad u, v \in \operatorname{Ran}(C),$$

де оператор $C\colon H_0 \to H_0$ визначається рівністю

$$(Cf, g)_{H_0} = (f, g)_{H_K}, \quad f, g \in H_0.$$

Простір $H_{K,+}$ входить в $C(\tilde{I})$ і його можна охарактеризувати таким чином. Позначимо через $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$ повний набір ортонормованих власних функцій з H_0 ядра $K(x, y)$, які відповідають власним значенням $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_j > 0$, $j = 1, 2 \ldots$. Функція $u \in H_0$ входить в $H_{K,+}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\|u\|_{H_{K,+}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} \left|(u, \omega_j)_{H_0}\right|^2 < \infty. \tag{11}$$

Знайдемо спряжений до нього оператор A^*.

Лема 3. *Нехай* $\mathbf{I}$ *– стандартний оператор, пов'язаний з ланцюжком* (10): $\mathbf{I}H_K = H_{K,+}$. *Тоді*

$$A^*\mathcal{A} = -i\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{I}\mathcal{A})', \tag{12}$$

причому $\operatorname{Dom}(A^*)$ *складається з тих і тільки тих* $\mathcal{A} \in H_K$, *для яких* $\mathbf{I}\mathcal{A}$ *є неперервною функцією на* $\tilde{I}$, *звуження котрої на* $[-l, 0]$, $[0, l]$ *належить відповідно до* $C^1([-l, 0])$, $C^1([0, l])$.

Доведення. Нехай $\mathcal{A} \in H_K$ входить в $\operatorname{Dom}(A^*) = \operatorname{Dom}((A')^*)$, тобто завдяки (7) для будь-якого $u \in C_0^\infty(I)$

$$(-iu', \mathcal{A})_{H_K} = (u, A^*\mathcal{A})_{H_K}. \tag{13}$$

Застосовуючи загальну рівність

$$(\mathcal{B}, C)_{H_K} = (\mathcal{B}, \mathbf{I}C)_{H_0}, \quad \mathcal{B}, C \in H_K,$$

перепишемо (13) у вигляді

$$(-iu', \mathbf{I}\mathcal{A})_{H_0} = (u, \mathbf{I}A^*\mathcal{A})_{H_0}, \quad u \in C_0^\infty(I), \tag{14}$$

при цьому $\mathbf{I}\mathcal{A}, \mathbf{I}A^*\mathcal{A} \in H_{K,+} \subset C(\bar{I})$. Рівність (14) означає, що $\mathbf{I}\mathcal{A}$ є узагальненим розв'язком рівняння $-iv' = f$ на інтервалах $(-l, 0)$ і $(0, l)$, де $f = \mathbf{I}A^*\mathcal{A} \in C(\bar{I})$. З класичного результату про гладкість впритул до границі узагальнених розв'язків звичайного диференціального рівняння (див., наприклад, [6], гл. 16, теорема 6.1) випливає, що

$$(\mathbf{I}\mathcal{A}) \restriction [-l, 0] \in C^1([-l, 0]) \quad \text{і} \quad (\mathbf{I}\mathcal{A}) \restriction [0, l] \in C^1([0, l]).$$

Навпаки, нехай $\mathcal{A} \in H_K$ таке, що $\mathbf{I}\mathcal{A} \in H_{K,+} \subset C(\bar{I})$ має вказану гладкість. Тоді для будь-якого $u \in C_0^\infty(I)$

$$(-iu', \mathcal{A})_{H_K} = (-iu', \mathbf{I}\mathcal{A})_{H_0} = (u, -i(\mathbf{I}\mathcal{A})')_{H_0}, \tag{15}$$

де функція $-i(\mathbf{I}\mathcal{A})'$ неперервна на $[-l, 0]$ і $[0, l]$ і тим самим входить в H_K. Рівність (15) можна тепер продовжити за допомогою оператора $\mathbf{I}$:

$$(-iu', \mathcal{A})_{H_K} = (u, -i(\mathbf{I}\mathcal{A})')_{H_0} = (u, \mathbf{I}^{-1}(-i(\mathbf{I}\mathcal{A})'))_{H_K}, \quad u \in C_0^\infty(I),$$

а це означає, що $\mathcal{A} \in \operatorname{Dom}(A^*)$ і $A^*\mathcal{A} = \mathbf{I}^{-1}(-i(\mathbf{I}\mathcal{A})')$, тобто справедлива рівність (12).

Лему доведено.

Тепер неважко підрахувати дефектний підпростір оператора A, який відповідає точці $z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$. Він складається з тих $\phi \in \operatorname{Dom}(A^*) \subset H_K$, для яких $A^*\phi = \bar{z}\phi$. На підставі леми 3 і рівності (12) отримуємо $-i\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{I}\phi)' = \bar{z}\phi$, тобто для будь-якого $x \in [-l, 0]$

$$-i(\mathbf{I}\phi)'(x) = \bar{z}(\mathbf{I}\phi)(x) \tag{16}$$

і ця ж рівність має місце при $x \in [0, l]$. Таким чином,

$$(\mathbf{I}\phi)'(x) = c_1 e^{i\bar{z}x}, \quad x \in [-l, 0] \quad \text{і} \quad (\mathbf{I}\phi)'(x) = c_2 e^{i\bar{z}x}, \quad x \in [0, l],$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^1$. Але функція $(\mathbf{I}\phi)(x)$ неперервна на $\bar{I}$ (оскільки $H_{K,+} \subset C(\bar{I})$), тому $c_1 = c_2$. Таким чином, *дефектний простір* N_z *максимально одновимірний і складається з тих* $\phi \in H_K$, *для яких*

$$(\mathbf{I}\phi)'(x) = ce^{i\bar{z}x}, \quad x \in \bar{I}, \quad c \in \mathbb{C}^1.$$

Оскільки оператор A дійсний відносно інволюції $*$, породженої відображенням $f(x) \mapsto \overline{f(-x)}$, то його дефектні числа рівні і згідно з доведеним вище індекс дефекту може бути $(0, 0)$ або $(1, 1)$.

Пояснимо, що, на перший погляд, дефектний простір N_z міг би бути і двовимірним, оскільки розглядають незалежні рівняння (16) на $[-l, 0]$ і $[0, l]$. Його максимальна одновимірність є наслідком припущення про неперервність ядра $K(x, y)$ на $I \times I$, яка привела до того, що простір $H_{K,+}$ складається з неперервних функцій на $\bar{I}$.

Поєднуючи отриманий результат для N_z і умову (11), приходимо до такої теореми.

Теорема 2. *Припустимо, що ядро K неперервне в $I \times I$, невироджене і $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$ — введений вище повний набір його власних функцій із відповідними власними значеннями $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Тоді для самоспряженості оператора A достатньо при деякому $z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ і необхідно, щоб при довільному такому z мало місце співвідношення*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} \left| \int_{-l}^{l} e^{izx} \omega_j(x)\, dx \right|^2 = \infty.$$

Для доведення потрібно лише зауважити, що включення ϕ в N_z еквівалентне тому, що $\mathbf{I}^{-1} e^{izx} \in H_K$, тобто тому, що $e^{izx} \in H_{K,+}$. Тепер потрібно скористатися умовою (11).

Таким чином, самоспряженість A і, отже, єдиність спектрального зображення (1) залежить від поведінки власних функцій ядра K.

Подібну теорему доведено у роботі [7]. Наведене вище доведення більш повне, і його можна узагальнити на випадок не неперервного на $(-l, l) \times (-l, l)$ ядра K. У цьому випадку дефектний підпростір N_z може бути і двовимірним. Аналог теореми 2 тепер формулюється більш складно, при цьому можна навести умови того, що індекс дефекту оператора A дорівнює $(0, 0)$, $(1, 1)$ або $(2, 2)$.

1. *Berezansky Yu. M., Chernobai O. B.* On the theory of generalized Toeplitz kernels // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1458 – 1472.
2. *Cotlar M., Sadosky C.* On the Helson – Szegö theorem and related class of modified Toeplitz kernels // Proc. Symp. Pure Math. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1979. – **35**, Pt 1. – P. 383 – 407.
3. *Bruzual R.* Local semigroups of contractions and some applications to Fourier representations theorems // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1987. – **10**. – P. 780 – 801.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с. (англ. пер.: Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators. – R. I.: Amer. Math. Soc., 1968).
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
6. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
7. *Беккер М. Б.* К задаче продолжения с полуоси непрерывного положительно определенного обобщенного теплицевского ядра // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 3 – 6.

Одержано 01.10.2001