УДК 519

Р. Ф. Шамоян (Брян. ун-т, Россия)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТИПА ХАРДИ – СОБОЛЕВА В ПОЛИКРУГЕ*

We present the description of dual spaces of the Hardy – Sobolev type classes of functions $F_l^{p,q}(U^n)$ holomorphic in a polydisk for $0<p\le 1$, $q\in(0,\infty)$ and for $p\in(1,\infty)$, $q=1$.

Наведено опис спряжених просторів класів типу Харді – Соболева $F_l^{p,q}(U^n)$ голоморфних у полікрузі функцій при $0<p\le 1$, $q\in(0,\infty)$ та при $p\in(1,\infty)$, $q=1$.

Введение. Пусть $U^n=\{z\in C^n,\ z=(z_1,\ldots,z_n):|z_j|<1,\ j=1,\ldots,n\}$ — единичный поликруг комплексного пространства C^n, $T^n=\{z\in C^n,\ |z_j|=1,\ j=1,\ldots$ $\ldots,n\}$ — его остов, $H(U^n)$ — пространство всех голоморфных в U^n функций, $m_n(\xi)$ и $m_{2n}(z)$ — нормированные меры Лебега на остове T^n и в поликруге U^n. Рассмотрим далее классы типа Харди – Соболева $F_\alpha^{p,q}(U^n)$ голоморфных в поликруге функций

$$F_\alpha^{p,q}(U^n)=\left\{f\in H(U^n):\|f\|^p_{F_\alpha^{p,q}}=\int\limits_{T^n}\left(\int\limits_{I^n}|f(R\xi)|^q(1-R)^\alpha R\,dR\right)^{p/q}dm_n(\xi)<\infty,\right.$$

$$\left.0<p,\quad q<\infty,\quad -1<\alpha<\infty\right\},$$

где

$$I^n=[0,1]^n,\qquad dR=dR_1\ldots dR_n,\qquad Rz=(R_1z_1,\ldots,R_nz_n),$$

$$R\in I^n,\quad z\in U^n,\qquad |z_1-z_2|^\gamma=\prod_{k=1}^n\left|z_1^k-z_2^k\right|^\gamma,\quad \gamma\in R,$$

$$z_1,z_2\in C^n,\qquad z_j=(z_j^1,\ldots,z_j^n),\qquad j=1,2,\quad z_1^k\ne z_2^k.$$

Нетрудно заметить, что [1] $F_{2\alpha-1}^{p,2}=H_\alpha^p(U)$, $0<p<\infty$, а $F_\alpha^{p,p}(U^n)=$ $=A_\alpha^p(U^n)$, $0<p<\infty$, где $H_\alpha^p(U)$ и $A_\alpha^p(U^n)$ — известные классы Харди – Соболева и Бергмана – Джрбашяна в круге U и в поликруге U^n соответственно [2]. Введенные классы типа Харди – Соболева $F_\alpha^{p,q}(U^n)$ или их гладкостные аналоги в круге U и в различных многомерных областях сравнительно мало изучены в отличие от пространств A_α^p или классов со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}$ (см. [2 – 5] и имеющуюся там библиографию). Заметим, что в R^n подробно исследованы аналоги пространств $F_\alpha^{p,q}(U^n)$ — классы $F_\alpha^{p,q}(R^n)$ [6].

Цель данной статьи — описание сопряженных классов пространств $F_\alpha^{p,q}$ в поликруге U^n комплексного пространства C^n при некоторых ограничениях на $p,\ q$.

Отметим работы [7 – 12], в которых, фактически, положено начало исследо-

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00992).

ваниям свойств голоморфных функций класса $F_\alpha^{p,q}$ в круге U, в шаре B^n, поликруге U^n и их гладкостных аналогов.

В первом пункте работы приведены формулировки основных результатов. Вспомогательные утверждения, необходимые для их доказательства, изложены во втором пункте. В третьем пункте представлены доказательства основных результатов.

1. Формулировки основных результатов. Для изложения результатов работы нам понадобится понятие интегро-дифференциального оператора. С каждой функцией f, $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$, $f(z) \in H(U^n)$, свяжем операторы дробного дифференцирования и интегрирования

$$D^\alpha f(z) = \sum_{\|m\|\geq 0} \frac{\Gamma(\alpha+m+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m+1)} a_m z^m$$

и

$$D^{-\alpha} f(z) = \sum_{\|m\|\geq 0} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} a_m z^m, \quad \alpha \geq 0,$$

соответственно, где $\Gamma(m+\alpha+1) = \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j+\alpha+1)$, Γ — известная функция Эйлера. Легко видеть, что $D^\alpha f$ и $D^{-\alpha} f$ принадлежат $H(U^n)$, если $f \in H(U^n)$.

Через $C, C_1, C_2, C(\alpha), C(\alpha, p, q), \ldots$ будем в дальнейшем обозначать различные положительные константы. Всюду, где не оговорено иначе, под F_α^{pq} будем понимать классы $F_\alpha^{pq}(U^n)$.

Пусть $0 < p \leq 1$, $0 < q < \infty$, $-1 < l < \infty$. Обозначим через $S_{l,\beta}^{p,q}(U^n)$ множество всех голоморфных в U^n функций таких, что для любого β, $\beta > \frac{l+1}{q} + \frac{1}{p}$,

$$\|f\|_{S_{l,\beta}^{p,q}(U^n)} = \sup_{z\in U^n} \left\{ \left| D^{\beta+1} g(z) \right| (1-|z|)^{\beta+2-(l+1)/q-1/p} \right\} < \infty.$$

Легко видеть, что относительно нормы $\|\cdot\|_{S_{l,\beta}^{p,q}(U^n)}$ пространство $S_{l,\beta}^{p,q}$ является банаховым.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на пространстве $F_l^{p,q}(U^n)$, $0 < p < 1 < q < +\infty$ или $0 < p, q \leq 1$, $g(z) = \Phi(l_z)$, где $l_z(w) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-w_k z_k}$, $w, z \in U^n$. Тогда $g \in S_{l,\beta}^{p,q}(U^n)$ и функционал Φ представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \int_{T^n} f(\rho\xi) g(\rho\bar{\xi})\, dm_n(\xi). \tag{1}$$

Наоборот, любая функция $g \in S_{l,\beta}^{p,q}(U^n)$ по формуле (1) порождает линейный непрерывный функционал на $F_l^{p,q}(U^n)$. Более того, справедливы оценки

$$C_1(l,p,q)\|\Phi\| \leq \|g\|_{S_{l,\beta}^{p,q}} \leq C_2(l,p,q)\|\Phi\|. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на пространстве $F_l^{p,1}(U^n)$, $1 < p < \infty$, $-1 < l < \infty$,*

$$g(z) = \Phi(l_z) = \Phi\left(\frac{1}{1-zw}\right), \quad \frac{1}{1-zw} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z_k w_k},$$

где $w, z \in U^n$. *Тогда*

$$g \in F_l^{p',\infty}(U^n),$$

$$F_l^{p',\infty}(U^n) = \left\{ g \in H(U^n) : \left(\int\limits_{T^n} \left(\sup_{r \in I^n} \left| D^{l+1}(D_l^1 g(r\xi)) \right| (1-r) \right)^{p'} dm_n(\xi) \right)^{1/p'} < \infty \right\},$$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

и функционал Φ *представим в виде* (1). *Наоборот, любая функция* g, $g \in F_l^{p',\infty}(U^n)$, *порождает линейный непрерывный функционал по формуле* (1) *на пространстве* $F_l^{p,1}(U^n)$, $1 < p < \infty$, $-1 < l < \infty$, *для которого справедливы оценки*

$$C_1(p,q)\|g\|_{F_l^{p',\infty}(U^n)} \le \|\Phi\| \le C_2(p,q)\|g\|_{F_l^{p',\infty}(U^n)}. \tag{3}$$

Приведенные утверждения обобщают и дополняют известные результаты о представлении функционалов в голоморфных классах типа Лизоркина – Трибеля F^{pq} в шаре B^n и в поликруге U^n комплексного пространства C^n.

В единичном шаре B^n и в поликруге U^n описания сопряженных классов пространств F^{pq} при $p = q$, $0 < q < \infty$, и их многочисленные приложения хорошо известны (см., например, [2, 3]). В работах [9, 10] установлены описания функционалов в голоморфных классах F^{pq} в шаре B^n при $1 \le p < \infty$, $1 \le q < < \infty$.

Однако вопрос о представлении функционалов в классах типа Лизоркина – Трибеля F^{pq} даже в случае круга оставался открытым при $0 < p < 1$ или при $0 < q < 1$. Теорема 1 заполняет этот пробел существенным образом. Отметим, что случай $q = 1$, $p \in (1, \infty)$ для шара рассмотрен в [10]. Полученное там представление при $n = 1$ отличается от нашего.

2. Доказательство вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $f \in F_\alpha^{p,q}$, $\max(p,q) \le s \le 1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left(\int\limits_{U^n} |f(w)|^s (1-|w|)^{s((\alpha+1)/q+1/p)-2} \, dm_{2n}(w) \right)^{1/s} \le C\|f\|_{F_\alpha^{p,q}}.$$

Доказательство леммы 1 содержится в работе [12].

Лемма 2. *Пусть* $f \in H(U^n)$. *Тогда*

$\|f\|_{F_\alpha^{p,q}} \le C\|f\|_{F_\alpha^{q,q}}$ *при* $0 < p < q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$

и

$\|f\|_{F_\alpha^{p,q}} \le C\|f\|_{F_{p\alpha/q}^{p,p}}$ *при* $0 < q \le p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$.

Доказательство леммы 2 легко следует из неравенства Гельдера.

***Следствие* 1.** *Пусть* $r \in (0,1)$. *Тогда* $\|f_r - f\|_{F_\alpha^{p,q}} \to 0$ *при* $r \to 1$, $0 < < p, q < \infty$ *и* $\lim_{r \to 1} \|f_r\|_{F_\alpha^{p,q}} = \|f\|_{F_\alpha^{p,q}}$ *при* $r \to 1$, $0 < p, q < \infty$, *где* $f_r(z) = f(rz)$, $r \in I$.

Лемма 3. *При* $\min(p,q) \le 1$ *пространства* $F_\alpha^{p,q}$ *являются полными метрическими пространствами с метрикой* $\rho(f,g) = \|f - g\|^{\min\{p,q\}}$,

$$\|f-g\|^p = \int_{T^n}\left(\int_{I^n}|(f-g)(z)|^q(1-|z|)^{\alpha}|z|d|z|\right)^{p/q} dm_n(\xi),$$

а при $\min\{p, q\} > 1$ *относительно нормы* $\|f\|_{F^{p,q}_{\alpha}}$ *эти пространства — банаховы.*

Доказательство леммы следует из следствия 1.

В теории аналитических функций известна фундаментальная роль формулы Литтлвуда – Пэли, позволяющей заменять интегралы по границе интегралами по площади (см. [13]). В простейшем случае для функции g из класса H^1 эта формула имеет вид

$$\frac{2}{\pi}\int_U |g'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\, dm_2(z) = \int_T \left|g(e^{it})-g(0)\right|^2 dm(t),$$

где $g(0) = \int_T g(\varphi)\,dm(\varphi)$ — ее среднее значение [13, с. 237]. Приложения различных аналогов этой формулы хорошо известны (см., например, [14]).

В следующей лемме, представляющей самостоятельный интерес, мы приводим новые аналоги формул Литтлвуда – Пэли, которые будут использованы в п. 3.

Лемма 4. *Пусть*

$$f, g \in H(U), \quad r\in(0,1), \quad f(z) = \sum_{k\ge 0} a_k z^k,$$

$$g(z) = \sum_{k\ge 0} b_k z^k, \quad -1 < l < \infty, \quad 0<\alpha<\infty, \quad s>-1,$$

$$\rho R = \rho_1\ldots\rho_n R_1\ldots R_n, \quad f(\rho R\xi) = f(\rho_1 R_1\xi_1,\ldots,\rho_n R_n\xi_n),$$

$$R_i\rho_i\in I, \quad i=1,\ldots,n.$$

Тогда:

1) $$\int_{T^n} f(r\bar{t})g(rt)\,dm_n(t) = C_{l,\gamma}\int_{I^{2n}}\int_{T^n} f(r\sqrt{(1-\rho)R}\xi)(D^{\gamma+l+1}g)(r\sqrt{(1-\rho)R}\bar{\xi})\times$$
$$\times(1-R)^{\gamma-1}(R\rho)^l R\,dR\,d\rho\,dm_n(\xi), \tag{4}$$

где $C_{l,\gamma} = \dfrac{\Gamma(\gamma+l+2)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(l+1)}$, $\gamma>0$;

2) $$\int_{T^n} f(r\bar{t})g(rt)\,dm_n(t) = C_{\alpha,\gamma}\int_{I^{2n}}\int_{T^n} g(r\sqrt{(1-\rho)R}\xi)D^{\gamma+1}f(r\sqrt{(1-\rho)R}\xi)\times$$
$$\times(1-R)^{\gamma-\alpha}(R\rho)^{\alpha-1} R\,dR\,d\rho\,dm_n(\xi), \tag{5}$$

где $C_{\alpha,\gamma} = \dfrac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}$, $\gamma>\alpha-1$;

3) $$\int_{T^n} f(rt)g(r\bar{t})\,dm_n(t) = r^{-2(s+2)}\left(\frac{s+2}{\pi}\right)\int_0^r\int_{T^n} g(\rho\bar{\xi})D^{s+2}f(\rho\xi)(r^2-\rho^2)^{s+1}\times$$
$$\times\rho\,d\rho\,dm_n(\xi). \tag{6}$$

Доказательство. Приведенные формулы сначала естественно устанавливаются для полиномов. Нам потребуется следующая формула Лиувилля [15, с. 405]:

$$\int_{I^n} \varphi(r_1 \ldots r_n)(1-r_1)^{p_1-1} \ldots (1-r_n)^{p_n-1} r_2^{p_1} r_3^{p_1+p_2} \ldots r_n^{p_1+\ldots+p_{n-1}} dr_1 \ldots dr_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)} \int_0^1 \varphi(r)(1-r)^{p_1+\ldots p_n-1} dr, \qquad p_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где интеграл справа предполагается сходящимся.

Докажем равенства леммы для $n = 1$. Общий случай исчерпывается стандартным наращиванием числа переменных.

1. Запишем

$$\int_T f(r\bar{t}) g(rt)\, dm(t) = \sum_{k \geq 0} a_k b_k r^{2k}.$$

Преобразуем правую часть доказываемого равенства:

$$C_{l,\gamma} \int_0^1 \int_0^1 \int_T f(r\sqrt{(1-\rho)R}\xi) D^{\gamma+l+1} g(r\sqrt{(1-\rho)R}\bar{\xi})(1-R)^{\gamma-1}(R\rho)^l R\, dR\, d\rho\, dm(\xi) =$$

$$= C_{l,\gamma} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k\geq 0} a_k b_k \frac{\Gamma(\gamma+l+2+k)}{\Gamma(\gamma+l+2)\Gamma(k+1)} r^{2k}(1-\rho)^k R^{k+1}(R\rho)^l (1-R)^{\gamma-1} dR\, d\rho =$$

$$= C_{l,\gamma} \sum_{k\geq 0} a_k b_k r^{2k} \frac{\Gamma(\gamma+l+2+k)}{\Gamma(\gamma+l+2)\Gamma(k+1)} \int_0^1 \int_0^1 R^l \rho^l (1-\rho)^k (1-R)^{\gamma-1}(R^{k+1})\, dR\, d\rho =$$

$$= \sum_{k\geq 0} a_k b_k r^{2k}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой Лиувилля при $n = 2$, $\varphi(r) = r^l$, $l > -1$ и известным равенством [3]

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^\beta dx = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+\beta+1)}, \qquad \gamma > 0, \quad \beta > -1. \tag{7}$$

Действительно,

$$\int_0^1 \int_0^1 (R\rho)^l (1-\rho)^k (1-R)^{\gamma-1} R^{k+1} dR\, d\rho = \left(\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(k+1+\gamma)}\right) \int_0^1 r^l (1-r)^{k+\gamma} dr =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\gamma+k+1)} \frac{\Gamma(\gamma+k+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\gamma+l+2+k)}.$$

2. Преобразуем правую часть соответствующего равенства:

$$C_{\alpha,\gamma} \int_0^1 \int_0^1 \int_T g(r\sqrt{(1-\rho)R}\xi) D^{\gamma+1} f(r\sqrt{(1-\rho)R}\bar{\xi})(1-R)^{\gamma-\alpha}(R\rho)^{\alpha-1} R\, dR\, d\rho\, dm(\xi) =$$

$$= C_{\alpha,\gamma} \sum_{k\geq 0} a_k b_k r^{2k} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma(\gamma+k+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+2)} (1-R)^{\gamma-\alpha}(1-\rho)^k (R\rho)^{\alpha-1} R^{k+1} dR\, d\rho.$$

Остается заметить, что

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-R)^{\gamma-\alpha}(R\rho)^{\alpha-1}(1-\rho)^k R^{k+1} d\rho\, dR = \left(\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(\gamma+k+2)}\right)\left(\frac{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+2)}\right)$$

в силу формулы Лиувилля

$$\int_0^1\int_0^1 (R\rho)^{\alpha-1}(1-\rho)^k(1-R)^{\gamma-\alpha}R^{k+1}\,d\rho\,dR = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+k+2-\alpha)}\times$$

$$\times\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{k+\gamma-\alpha+1}\,du, \quad \gamma>\alpha-1, \quad \alpha>0,$$

и равенства (7).

3. Приведенное равенство установлено в работе [12].

***Следствие* 2.** *Выполняя замену переменных* $\sqrt{1-\rho}=R_1$, $\sqrt{R}=R_2$ *и учитывая, что в свертках* $\int_T f(\tilde{R}_1 t)g(\tilde{R}_2\bar{t})\,dm(t)$ *переменные* $\tilde{R}_1$ *и* $\tilde{R}_2$ *можно „переставлять", легко получить „новые" формулы типа Литтлвуда – Пэли. Например, из* (4) *выводим равенство*

$$\int_T f(r\bar{t})g(rt)\,dm(t) = \frac{4\Gamma(\gamma+l+2)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(l+1)}\int_T\left(\int_0^1 f_r(R_1^2\xi)(1-R_1^2)R_1\,dR_1\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^1 D^{\gamma+l+1}g_r(R_2^2\bar{\xi})(1-R_2^2)^{\gamma-1}R_2^{2l+3}\,dR_2\right)dm(\xi) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+l+2)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(l+1)}\int_T\left(\int_0^1 f_r(\tilde{\rho}_1\xi)(1-\tilde{\rho}_1)^l\,d\tilde{\rho}_1\right)\int_0^1 (D^{\gamma+l+1}g_r(\tilde{\rho}_2\bar{\xi})(1-\tilde{\rho}_2)^{\gamma-1}\tilde{\rho}_2^{l+1}\,d\tilde{\rho}_2)\,dm(\xi).$$

Наращивая общее число переменных, можно вывести аналогичную формулу и в поликруге U^n:

$$\int_{T^n} f(r\bar{t})g(rt)\,dm_n(t) = \left(\frac{\Gamma(\gamma+l+2)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(l+1)}\right)^n\int_{T^n}\left(\int_{I^n}(f_r(\tilde{\rho}_1\xi))(1-\tilde{\rho}_1)^l\,d\tilde{\rho}_1\right)\times$$

$$\times\int_{I^n}(D^{\gamma+l+l}g_r(\tilde{\rho}_2\bar{\xi})(1-\tilde{\rho}_2)^{\gamma-1}\tilde{\rho}_2^{l+1}\,d\tilde{\rho}_2)\,dm_n(\xi). \tag{8}$$

***Замечание* 1.** Используя лемму 4 (следствие 2), нетрудно получить новое интегральное представление классов $A^p_\alpha(U)$ [3]:

$$f(z) = \gamma(\gamma+1)\int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{f(r\xi)}{(1-z\rho\bar{\xi})^{\gamma+2}}(1-\rho)^{\gamma-1}\,dm(\xi)\rho\,d\rho\,dr, \quad 0<\gamma<\infty, \quad z\in U.$$

Лемма 5. 1. *Пусть* $\alpha>-1$, $\beta>\alpha$, $\omega\in U^n$. *Тогда*

$$\int_{I^n}\frac{(1-R)^\alpha\,dR}{|1-\omega R|^{(\beta+1)}} \le \frac{C(\beta,\alpha)}{|1-\omega|^{\beta-\alpha}}, \quad |1-\omega R| = \prod_{k=1}^n|1-\omega_k R_k|, \quad \omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n).$$

2. *Пусть* $f_r(z)=\dfrac{1}{(1-rz)^{\beta+2}}$, *где* β — *такое число, что* $\beta>\dfrac{l+1}{q}+\dfrac{1}{p}-2$, $r\in I^n$. *Тогда*

$$\|f_r(z)\|_{F_l^{p,q}(U^n)} \le \frac{C(p,q,l)}{(1-r)^{\beta+2-(l+1)/q-1/p}}.$$

Доказательство п. 1 леммы 5 приведено в [12]. Вторая оценка в лемме следует из первой.

Лемма 6. 1. *Справедлива оценка*

$$M_\infty(D^\alpha g,(Rr)^2) \le C(\alpha)(1-rR)^{-\alpha}M_\infty(g,r), \quad g\in H(U^n), \quad \alpha>0, \quad r,R\in I^n,$$

где

$$(Rr)^2 = ((R_1 r_1)^2, \ldots, (R_n r_n)^2), \quad r, R \in I^n, \qquad M_\infty(f, r) = \sup_{\substack{|z_j| = r_j \\ j = 1, \ldots, n}} |f(z)|, \quad r \in I^n.$$

2. *Пусть*

$$f \in H^q(U^n), \quad f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, \quad 0 < q \leq \infty,$$

$$D^1_{\alpha-1} f = \sum_{k \geq 0} (k + \alpha + 1) a_k z^k, \quad \alpha > 0.$$

Тогда

$$\int_{T^n} \left(\sup_{r \in I^n} \left| D^1_{\alpha-1} f(r\xi) \right| (1 - r) \right)^q dm_n(\xi) \leq C(\alpha, q) \| f \|^q_{H^q(U^n)}.$$

Оценка в п. 1 установлена в [16]. Неравенство в п. 2 вытекает непосредственно из лемм 1 и 2 той же работы.

Лемма 7. 1. *Пусть* $s, t \in R$, $\alpha, \beta > 0$, $s - t = \alpha - \beta$. *Тогда* $H^{\infty,\infty,\alpha}_s(U) = H^{\infty,\infty,\beta}_t(U)$, *где*

$$H^{\infty,\infty,\alpha}_s(U) = \left\{ f \in H(U) \colon \sup_{r \in U} \left| D^s g(z) \right| (1 - |z|)^\alpha < \infty, \ \alpha \geq 0, \ s \in R \right\},$$

дифференциальный оператор

$$D^s \colon H(U) \to H(U), \quad D^s g = \sum_{k \geq 0} (k+1)^s a_k z^k, \quad s \in R, \quad g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k r^k.$$

2. $D^s g \in H^{\infty,\infty,\alpha}_0(U)$ *в том и только в том случае, если* $D^s g \in H^{\infty,\infty,\alpha}_0(U)$, $\alpha > 0$, $s \in R$.

Доказательство утверждений, содержащихся в пп. 1 и 2, следует из результатов работ [4] и [5] соответственно.

В дальнейшем будем обозначать через $H^p(U^n)$ класс Харди в поликруге U^n [17].

Лемма 8. *Пусть* $0 < p < \infty$, $l > -1$, $D^{l+1} f \in F^{p,1}_l$. *Тогда* $f \in H^p(U^n)$, *причем справедлива оценка*

$$\| f \|^p_{H^p} \leq C(p, l) \int_{T^n} \left(\int_{I^n} (1 - t)^l \left| D^{l+1} f(te^{i\varphi}) \right| dt \right)^p dm_n(\varphi).$$

Доказательство. Заметим, что

$$f(r_1 \xi_1, \ldots, r_n \xi_n) = C_l \int_0^1 \ldots \int_0^1 (D^{l+1} f_r)(t_1 \xi_1, \ldots, t_n \xi_n)(1 - t_1)^l \ldots (1 - t_n)^l \, dt_1 \ldots dt_n,$$

где $f_r(z) = f(rz)$, $C_l = l + 1$, $r \in I^n$. Следовательно,

$$\int_{T^n} | f(r\xi) |^p \, dm_n(\xi) \leq C \int_{T^n} \left(\int_{I^n} (1 - t)^l \left| (D^{l+1} f_r)(t\xi) \right| dt \right)^p dm_n(\xi), \quad 0 < p < \infty.$$

Учитывая, что $D^{l+1} f \in F^{p,1}_l$, и используя следствие леммы 2, перейдем в этом неравенстве к пределу при $r \to 1$. Получим

$$\lim_{r\to 1}\int_{T^n}|f_r(\xi)|^p\,dm_n(\xi) \le C\left\|D^{l+1}f\right\|^p_{F_l^{p,1}(U^n)},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Пусть G — измеримая функция такая, что $\|G\|_{L^p(T^n)}<\infty$, $1<$ $<p<\infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\int_{T^n}\left|\int_{T^n}\frac{G(\xi)\,dm_n(\xi)}{1-\bar{\xi}t}\right|^p dm_n(t) \le C(p)\int_{T^n}|G(t)|^p\,dm_n(t),$$

где внутренний интеграл (по каждой переменной) понимается в смысле главного значения (см. [18]).

Доказательство. При $n=1$ утверждение леммы хорошо известно [18]. Для доказательства утверждения в общем случае необходимо использовать индукцию по n.

Лемма 10. *Пусть $g\in H(U^n)$, $g(z)=\sum_{|k|\ge 0}c_kz^k$, β — такое число, что $\beta>\dfrac{1}{p}+\dfrac{l+1}{q}$, $\gamma<l+2$. Тогда*

$$S=\sup_{R\in I^n}M_\infty(D^{\beta+l+1}D^{-\gamma}g,R)(1-R)^{\beta+1-1/p-\gamma+(l+1)/q'}\cong$$

$$\cong\sup_{R\in I^n}M_\infty(D^{\beta+1}g,R)(1-R)^{\beta+2-1/p-(l+1)/q}=J.$$

Здесь и в дальнейшем запись $A\cong B$ означает, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что $C_1A\le B\le C_2A$.

Доказательство. Заметим, что при $n=1$ утверждение леммы следует из теоремы о замкнутом графике и леммы 7. Действительно, из леммы 7 следует

$$S\cong\sup_{R\in I}M_\infty(D^{\beta+l+1}(D^{-\gamma}g),R)(1-R)^{\beta+1-1/p-\gamma+(l+1)/q'}\cong$$

$$\cong\sup_{R\in I}M_\infty(D^{\beta+1}g,R)(1-R)^{\beta+2-(l+1)/q-1/p}\cong J,\qquad \beta>\frac{1}{p}+\frac{l+1}{q},\quad \gamma<l+2.$$

Далее ограничимся рассмотрением функций трех переменных. Общий случай можно доказать аналогично. Применив индукцию по числу переменных, предположим, что утверждение леммы справедливо для $n=1$ и $n=2$. Тогда

$$S=\sup_{R_3\in I}\sup_{|z_3|=R_3}\left(\sup_{R_1,R_2\in I}\sup_{\substack{|z_1|=R_1\\|z_2|=R_2}}\left|D^{\beta+l+1}D^{-\gamma}g(z_1,z_2,z_3)\right|(1-|z_1|)^t(1-|z_2|)^t\right)(1-|z_3|)^t\le$$

$$\le C\sup_{R_3\in I}\sup_{|z_3|=R_3}\left(\sup_{R_1,R_2\in I}\sup_{\substack{|z_1|=R_1\\|z_2|=R_2}}\left|D^{\beta+1}_{z_1,z_2}f(z_1,z_2,z_3)\right|((1-|z_1|)(1-|z_2|))^{\beta+2-\frac{1}{p}-\frac{l+1}{q}}\right)(1-|z_3|)^t,$$

где

$$D^{\beta+1}_{z_1,z_2}f(z_1,z_2,z_3)=\sum_{k_1\ge0}\sum_{k_2\ge0}\sum_{k_3\ge0}\frac{\Gamma(\beta+2+k_1)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(k_1+1)}\frac{\Gamma(\beta+2+k_2)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(k_2+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\beta+l+2+k_3)}{\Gamma(\beta+l+2)\Gamma(k_3+1)}\frac{\Gamma(k_3+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(k_3+\gamma+1)}c_{k_1k_2k_3}z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3},$$

$$t = \beta + 1 - \frac{1}{p} - \gamma + \frac{l+1}{q'}.$$

Следовательно,

$$S \le C(\beta, l, q, p) \sup_{R_1, R_2 \in I} \sup_{|z_j| = R_j} \Bigg(\sup_{R_3 \in I} \sup_{|z_3| = R_3} \left| D_{z_3}^{\beta+l+1} D_{z_3}^{-\gamma} \varphi(z_3) \right| \times$$

$$\times (1-|z_3|)^t ((1-|z_1|)(1-|z_2|))^{\beta+2-\frac{1}{p}-\frac{l+1}{q}} \Bigg) \le C(\beta, l, q, p) J,$$

где

$$D_{z_3}^{-\gamma} D_{z_3}^{\beta+l+1} \varphi_{z_2, z_1}(z_3) =$$

$$= D_{z_3}^{-\gamma} D_{z_3}^{\beta+l+1} \left(\sum_{k_3 \ge 0} \left(\sum_{k_2 \ge 0} \sum_{k_1 \ge 0} \frac{\Gamma(\beta+2+k_1)}{(\Gamma(\beta+2))^2} \frac{\Gamma(\beta+2+k_2)}{\Gamma(k_1+1)\Gamma(k_2+1)} c_{k_1 k_2 k_3} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \right) z_3^{k_3} \right).$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Справедлива оценка*

$$\left| \lim_{r \to 1} \int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t})\, dm_n(t) \right| \le C(\beta) \int_{U^n} \left| D^\beta D^1_{\beta-1} f(\overline{\omega}) \right| |g(\omega)| (1-|\omega|)^\beta\, dm_{2n}(\omega),$$

$$w = R\xi, \quad \beta > 0, \quad f,\ g \in H(U^n),$$

$$(D^1_{\beta-1} f)(z) = \sum_{|k| \ge 0} (k+\beta+1) a_k z^k, \qquad \beta > 0.$$

Доказательство. Несложно доказать справедливость равенства

$$\int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t})\, dm_n(t) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \int_{T^n} \left(D^\beta f_r(\xi \sqrt{R}) \right) \left(D^1_\beta g_r(\bar{\xi} \sqrt{R}) \right) (1-R)^\beta\, dR\, dm_n(\xi).$$

Действительно, при $n = 1$

$$\int_0^1 \int_T \left(D^1_\beta D^\beta f_r(\bar{\xi} \sqrt{R}) \right) \left(g_r(\xi \sqrt{R}) \right) (1-R)^\beta\, dR\, dm(\xi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} a_k b_k \left(\int_0^1 R^k (1-R)^\beta\, dR \right) (k+1+\beta) \left(\frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} \right) =$$

$$= \beta \sum_{k=0}^{+\infty} r^{2k} a_k b_k \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\beta+1)} \frac{(k+1+\beta)}{(k+1+\beta)} \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} r^{2k} a_k b_k.$$

Общий случай можно доказать стандартным наращиванием числа переменных. Лемма доказана.

3. Доказательства основных теорем о представлении линейных непрерывных функционалов в пространствах $F_l^{p,q}$. Использовав утверждения, установленные в предыдущем пункте, дадим (при некоторых ограничениях на p, q, l) полное описание линейных непрерывных функционалов в пространствах $F_l^{p,q}$, т. е. доказательства утверждений, приведенных в п. 1.

Вначале заметим, что сформулированное в теореме 1 утверждение обобщает известный результат о представлении линейных непрерывных функционалов в пространстве Харди – Соболева H_α^p.

Действительно, пусть X^* — сопряженное к пространству $X, X \subset H(U)$, пространство. Учитывая, что [1] $F^{p,2}_{2\alpha-1}(U) = H^p_\alpha(U)$, $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < \infty$, где $H^p_\alpha = \{(D^\alpha g)(z), \|g\|_{H^p} < \infty\}$, $\|f\|_{H^p_\alpha} = \|D^{-\alpha} f\|_{H^p}$, и описание линейных непрерывных функционалов пространств $H^p(U)$, $0 < p < 1$ (см. [13, 14, 16, 19, 20]), получаем равенство

$$(F^{p,2}_{2\alpha-1}(U))^* = (H^p_\alpha(U))^* =$$

$$= \left\{ g \in H(U) \colon \sup_{z \in U^n} \left\| D^\alpha D^\beta g \right\| (1-|z|)^{\beta - 1/p + 1} < \infty, \ \beta > \frac{1}{p} - 1 \right\}.$$

Таким образом, пространства линейных непрерывных функционалов классов $F^{p,2}_{2\alpha-1}(U)$ и $H^p_\alpha(U)$ совпадают. Далее учтем, что в силу леммы 7

$$\sup_{z \in U} \left| D^\alpha (D^\beta g)(z) \right| (1-|z|)^{\beta - 1/p + 1} \cong \sup_{z \in U} \left| D^{\alpha+\beta} g(z) \right| (1-|z|)^{\beta - 1/p + 1} \cong$$

$$\cong \sup_{z \in U} \left| D^{\beta+1} g(z) \right| (1-|z|)^{\beta + 2 - 1/p - \alpha} \cong \sup_{z \in U} \left| D^{\beta+1} g(z) \right| (1-|z|)^{\beta + 2 - 1/p - \alpha},$$

$$\beta > \alpha + \frac{1}{p} - 2.$$

Следовательно,

$$(F^{p,2}_{2\alpha-1}(U))^* = \left\{ g \in H(U) \colon \sup_{z \in U} \left| D^{\beta+1} g(z) \right| (1-|z|)^{\beta + 2 - 1/p - \alpha} < \infty \right\}, \quad \beta > \alpha + \frac{1}{p},$$

что совпадает с описанием класса $F^{p,2*}_{2\alpha-1}$ при $n = 1$.

***Доказательство теоремы* 1 *при* $0 < p < 1 < q < +\infty$.** Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на пространстве $F^{p,q}_l(U^n)$. Заметим, что по лемме 2

$$\|g\|_{F^{p,q}_l(U^n)} \le C \|g\|_{F^{q,q}_l(U^n)}, \quad 0 < p < 1 < q < \infty. \tag{9}$$

Следовательно, учитывая равенство $l_z(\omega) = \sum_{|k| \ge 0}^{+\infty} (z\omega)^k$ и тот факт, что этот ряд сходится к функции $l_z(\omega)$ в пространстве $F^{q,q}_l(U^n)$, а поэтому, ввиду (9), и в $F^{p,q}_l(U^n)$, при любом $z \in U^n$ получаем

$$g(z) = \Phi(l_z) = \sum_{|k| \ge 0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) z^k,$$

где $\delta_k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, $(k_1, \ldots, k_n) \in Z^n_+$. Поэтому $g \in H(U^n)$. Далее, используя оценку из леммы 5, получаем

$$\left| D^{\beta+1} g(z) \right| = \left| \Phi(D^{\beta+1} l_z(\omega)) \right| \le \|\Phi\| \left\| D^{\beta+1} l_z \right\|_{F^{p,q}_l} \le$$

$$\le \frac{C\|\Phi\|}{\prod_{k=1}^n (1-|z_k|)^{\beta + 2 - (l+1)/q - 1/p}}, \qquad \beta > \frac{l+1}{q} + \frac{1}{p} - 2.$$

Следовательно, $g \in S^{p,q}_{l,\beta}(U^n)$ и $\|g\|_{S^{p,q}_{l,\beta}(U^n)} \le C\|\Phi\|$. Для доказательства представления функционала (1) (см. формулировку теоремы) достаточно учесть, что в силу следствия леммы 2 $\|f_\rho - f\|_{F_l^{p,q}} \to 0$ при $\rho \to 1-0$, вывести равенство

$$\Phi(f_\rho) = \sum_{|k|\geq 0}^{\infty} a_k \rho^k \Phi(\delta_k), \quad \rho^k = \rho_1^{k_1} \ldots \rho_n^{k_n}, \quad f(z) = \sum_{|k|\geq 0} a_k z^k,$$

и провести стандартные рассуждения (см., например, теорему 6.9 в [3]).

Докажем вторую часть теоремы 1 и правую оценку, содержащуюся в ней. Используя следствие 3 леммы 4, получаем

$$|\Phi(f)| = \left| \lim_{r\to 1} \int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t})\, dm_n(t) \right| \leq$$

$$\leq C(\beta, l) \left| \lim_{r\to 1} \int_{T^n} \int_{I^n} \int_{I^n} f_r(R\rho\bar{\xi})(D^{\beta+l+1} g_r(R\rho\bar{\xi}))(1-\rho^2)^l (1-R^2)^{\beta-1} \rho R^{2l+3}\, dR\, dm_n(\xi) \right|,$$

$$\rho = \rho_1 \ldots \rho_n, \quad \rho^{2l+3} = (R_1 \ldots R_n)^{2l+3}.$$

Далее, с помощью неравенства Гельдера имеем

$$|\Phi(f)| = \left| \lim_{r\to 1} \int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t})\, dm_n(t) \right| \leq$$

$$\leq C_1(\beta, l) \int_{T^n} \int_{I^n} \left(\int_{I^n} |f(R\rho\bar{\xi})|^q (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q} \left(\int_{I^n} |D^{\beta+l+1} g(R\rho\bar{\xi}))|^{q'} (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q'} \times$$

$$\times (1-R)^{\beta-1} R\, dR_1 \ldots dR_n\, dm_n(\xi) \leq$$

$$\leq C_1(\beta, l) \sup_{R\in I^n} \left(\int_{I^n} (M_\infty(D^{\beta+l+1} g_R, \rho))^{q'} (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q'} (1-R)^{\beta+1-1/p} \times$$

$$\times \int_{T^n} \int_{I^n} \left(\int_{I^n} |f(\rho R\xi)|^q (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q} (1-R)^{1/p-2} R\, dR\, dm_n(\xi).$$

Из леммы 6 следует

$$(M_\infty(D^{\beta+l+1} g_R, \rho))^{q'} \leq (M_\infty(D^{\beta+l+1} D^{-\gamma} g_R), \rho)^{q'} (1-\rho R)^{-\gamma q'},$$

где γ — такое число, что $\dfrac{l+1}{q'} < \gamma < l+2$, $l > -1$, $\beta > \dfrac{1}{p} + \dfrac{l+1}{q}$. Поэтому

$$|\Phi(f)| \leq$$

$$\leq C_2(\beta, l) \tilde{S} \sup_{R\in I^n} \left(\int_{I^n} (M_\infty(D^{\beta+l+1} D^{-\gamma} g_R, \rho))^{q'} (1-\rho R)^{-\gamma q'} (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q'} (1-R)^{\beta+1-1/p},$$

где

$$\tilde{S} = \int_{U^n} \left(\int_{I^n} |f(\rho R\xi)|^q (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q} (1-R)^{1/p-2} R\, dR\, dm_n(\xi), \quad 0 < p < 1 < q < \infty.$$

Далее, учитывая, что $M_\infty(G, R\rho) \leq M_\infty(G, R)$, $G \in H(U^n)$, $\rho, R \in I^n$, записываем

$$|\Phi(f)| \leq$$

$$\leq C(\beta, l) \tilde{S} \sup_{R\in I^n} \left(M_\infty(D^{\beta+l+1} D^{-\gamma} g, R) \left(\int_{I^n} (1-\rho R)^{-\gamma q'} (1-\rho)^l\, d\rho \right)^{1/q'} (1-R)^{\beta+1-1/p} \right).$$

Используя элементарную оценку

$$\int_0^1 (1-Rr)^{-\lambda}(1-r)^t\,dr \le C(\lambda, t)(1-R)^{-\lambda+t+1}, \quad t>-1, \quad \lambda>t+1, \quad R\in(0,1),$$

получаем

$$|\Phi(f)| \le C(\beta, l)\tilde{S} \sup_{R\in I^n} M_\infty(D^{\beta+l+1}D^{-\gamma}g, R)(1-R)^{\beta+1-1/p-\gamma+(l+1)/q'},$$

где $\frac{l+1}{q'}<\gamma<l+2$. Учитывая, что в силу леммы 10 при $\beta > \frac{1}{p}+\frac{l+1}{q}$, $\gamma\in \in\left(\frac{l+1}{q'}, l+2\right)$

$$\sup_{R\in I^n} M_\infty(D^{\beta+l+1}D^{-\gamma}g, R)(1-R)^{\beta+1-1/p-\gamma+(l+1)/q'} \cong$$

$$\cong \sup_{R\in I^n} M_\infty(D^{\beta+1}g, R)(1-R)^{\beta+2-1/p-(l+1)/q},$$

получаем

$$|\Phi(f)| \le C(\beta, l)\|g\|_{S^{p,q}_{l,\beta}(U^n)}\tilde{S}. \tag{10}$$

Покажем далее справедливость неравенства

$$\tilde{S} \le C\|f\|_{F_l^{p,q}}, \quad 0<p<1<q<\infty. \tag{11}$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением, установленным в работе [20, с. 45].

Предложение 1. *Пусть X — локально выпуклое пространство и μ — положительная конечная борелевская мера на U, $0<p<1$. Предположим, что неравенство $\mu\{z\in D: |z-\xi|<r\}\le Cr^{1/p}$ справедливо для всех $\xi\in T$ и всех $r>0$. Тогда*

$$\left(\int_U \|F(z)\|_X\,d\mu(z)\right) \le C(p, X)\left(\int_T \|F(\xi)\|_X^p\,dm(\xi)\right)^{1/p}, \quad F\in H^p(X), \tag{12}$$

где $H^p(X)$ — пространство Харди со значениями в квазинормированном пространстве X [20], *$F_z(\rho)$ — голоморфная в U функция, принимающая значения из X.*

Пусть X — класс всех измеримых на $[0,1]$ функций G таких, что

$$\left(\int_0^1 (G(\rho))^q(1-\rho)^l\,d\rho\right)^{1/q} < \infty, \quad 1<q<\infty, \quad -1<l<\infty.$$

Функция $f(\rho R\xi)=f(z\rho)=f_z(\rho)$ — X-значная, мера $\mu(z)=(1-|z|)^{1/p-2}\,dm(z)$, $0<p<1$, удовлетворяет условию в приведенном выше предложении, следовательно,

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 |f(\rho R\xi)|^q(1-\rho)^l\,d\rho\right)^{1/q}(1-R)^{1/p-2}R\,dR\,m_n(\xi) \le$$

$$\le C(l, p, q)\left(\int_T\left(\int_0^1 |f(\rho\xi)|^q(1-\rho)^l\,d\rho\right)^{p/q} dm_n(\xi)\right)^{1/p}.$$

Итак, неравенство (11) при $n = 1$ установлено. Применим индукцию для получения неравенства (11) при любом n. Пусть X — класс всех измеримых на I^n функций G таких, что

$$\left(\int_{I^n} (G(\rho))^q (1-\rho)^l \, d\rho\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 < q < \infty.$$

Рассуждая так же, как и выше, получаем неравенство

$$\int_U \left(\int_{I^n} |f(r_1 z_1, \ldots, r_n z_n)|^q (1-r_1)^l \ldots (1-r_n)^l \, dr_1 \ldots dr_n\right)^{1/q} (1-|z_n|)^{1/p-2} \, dm_2(z_n) \le$$

$$\le C(p,q,l)\left(\int_T \left(\int_{I^n} |f(r_1\xi_1, \ldots, r_n\xi_n)|^q (1-r_1)^l \ldots (1-r_n)^l \, dr_1 \ldots dr_n\right)^{p/q} dm(\xi_n)\right)^{1/p}, \tag{13}$$

$0 < p < 1 < q < \infty$, при любых $z_1, \ldots, z_{n-1} \in U$. Предположим, что верно следующее неравенство (индукционное предположение):

$$\int_{U^{n-1}} \left(\int_{I^n} |f(r_1 z_1, \ldots, r_n z_n)|^q [(1-r_1)\ldots(1-r_n)]^l \, dr\right)^{1/q} \times$$

$$\times [(1-|z_1|)\ldots(1-|z_{n-1}|)]^{1/p-2} \, dm_2(z_1)\ldots dm_2(z_{n-1}) \le$$

$$\le C_1(p,q,l)\left(\int_{T^{n-1}} \left(\int_{I^n} |f(r_1\xi_1, \ldots, r_{n-1}\xi_{n-1}, r_n\xi_n)|^q \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times (1-r_1)^l \ldots (1-r_n)^l \, dr_1 \ldots dr_n\right)^{p/q} dm(\xi_1)\ldots dm(\xi_{n-1})\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Умножая обе части неравенства (14) на $(1-|z_n|)^{1/p-2}$, интегрируя его по U и применяя неравенство Минковского и неравенство (13), получаем

$$\int_{U^n} \left(\int_{I^n} |f(\rho R\xi)|^q (1-\rho)^l \, d\rho\right)^{1/q} (1-R)^{1/p-2} \, dR \, dm(\xi) \le C\|f\|_{F_l^{p,q}(U^n)},$$

что и требовалось доказать. Из неравенств (10) и (11) вытекает оценка $\|\Phi\| \le$ $\le C\|g\|_{S_{l,\beta}^{p,q}(U^n)}$.

Теорема 1 доказана при $0 < p < 1 < q < \infty$.

Доказательство теоремы 1 при $0 < p, q \le 1$. Доказательство первой части утверждения и левую оценку легко получить, повторяя соответствующие рассуждения, проведенные при доказательстве первой части теоремы 1 для случая $0 < p < 1 < q < \infty$. Далее из лемм 1 и 4 получаем

$$\left|\int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t}) \, dm_n(t)\right| \le \frac{C_4(\beta, p)}{r_1^{2(\beta+1)} \ldots r_n^{2(\beta+1)}} \int_{U^n} \left|D^{\beta+1} g(\overline{\omega})\right| (1-|\omega|)^\beta |f(\omega)| \, dm_{2n}(\omega) \le$$

$$\le \frac{C_4}{r^{2(\beta+1)}} \sup_{z \in U^n} \left\{\left|D^{\beta+1} g(z)\right| (1-|z|)^{\beta+2-1/p-(\alpha+1)/q}\right\} \times$$

$$\times \int_{U^n} |f(\omega)| (1-|\omega|)^{(\alpha+1)/q+1/p-2} \, dm_{2n}(\omega) \le$$

$$\le \frac{C_5}{(r_1 \dots r_n)^{2(\beta+1)}} \| g \|_{S^{p,q}_{\alpha,\beta}} \| f \|_{F^{p,q}_{\alpha}}, \quad \beta > \frac{\alpha+1}{q} + \frac{1}{p}.$$

Отсюда легко вывести, что любая функция $g \in S^{p,q}_{l,\beta}(U^n)$ по формуле (1) порождает линейный непрерывный функционал на $F^{p,q}_l$ и справедлива оценка справа, содержащаяся в формулировке теоремы 2.

Теорема 1 доказана полностью.

***Замечание* 2.** Теорема 1 при $0 < p, q \le 1$ была анонсирована в работе [11].

***Замечание* 3.** По-видимому, подход, предложенный при доказательстве теоремы 1, опирающийся на формулу типа Литтвуда – Пэли и векторнозначную теорему вложения, можно применить для описания функционалов классов $L^{\alpha}_{p,q,s}(U^n)$ и $H^{p_1,\dots p_n}(U^n)$ [8, 21] в том случае, когда параметры p и q $(p_1, \dots, p_n)$ лежат „по разные стороны" от единицы. Здесь необходимо надлежащим образом „подобрать" теорему вложения и формулу Лиувилля.

***Замечание* 4.** Отметим, что справедливость второй части утверждения теоремы 1 при $0 < p < 1$, $q = 1$ можно доказать, опираясь на предложение 1. Рассмотрим для простоты случай круга U. Действительно, замечая, что верно неравенство

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 |f(\rho R \xi)| (1-\rho)^l \, d\rho \right)^{1/q} (1-R)^{1/p-2} R \, dR \, dm_n(\xi) \le$$

$$\le C(l, p) \left(\int_T \left(\int_0^1 |f(\rho\xi)| (1-\rho)^l \, d\rho \right)^p dm(\xi) \right)^{1/p}, \quad 0 < p < 1 \qquad (15)$$

(где X в (12) — класс всех измеримых функций G таких, что $\int_0^1 (G(\rho))(1-\rho)^l \, d\rho < \infty$), достаточно повторить проведенные при доказательстве теоремы 1 рассуждения, учитывая при этом, что

$$|\Phi(f)| = \left| \lim_{r \to 1} \int_T f(rt) g(r\bar{t}) \, dm(t) \right| \le$$

$$\le C_1(\beta, l) \int_T \int_I \left(\int_I \left| f(\rho R \bar{\xi}) \right| (1-\rho)^l \, d\rho \right) (1-R)^{1/p-2} R \, dR \, dm(\xi) \times$$

$$\times \sup_{R \in I} M_\infty(D^{\beta+l+1} g, R)(1-R)^{\beta+1-1/p} \le C(\beta, l) \| f \|_{F^{p,1}_l} \| g \|_{S^{p,1}_{l,\beta}(U)},$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались леммой 7 и оценкой (11).

***Доказательство теоремы* 2.** Сначала докажем второе утверждение теоремы и оценку справа в (3). Легко видеть, что из леммы 11 следует

$$|\Phi(f)| = \left| \lim_{r \to 1} \int_{T^n} f(rt) g(r\bar{t}) \, dm_n(t) \right| \le$$

$$\le C(l) \int_{U^n} \left| D^{l+1} D_l^1 g(\omega) \right| |f(\omega)| (1-|\omega|)^{l+1} \, dm_2(\omega), \quad l > -1.$$

Далее, учитывая неравенство Гельдера, получаем

$$|\Phi(f)| \le C(l) \left(\int_{T^n} \left(\sup_{|\omega| \in I^n} \left| D^{l+1}(D_l^1 g(\omega)) \right| (1-|\omega|) \right)^{p'} dm_n(\xi) \right)^{1/p'} \times$$

$$\times\left(\int_{T^n}\left(\int_{I^n}|f(\omega)|(1-|\omega|)^l\,d|\omega|\right)^p dm_n(\xi)\right)^{1/p} \le C(p,l)\|g\|_{F_l^{p',\infty}}\|f\|_{F_l^{p,1}}.$$

Отсюда вытекает второе утверждение теоремы и правая оценка в (3).

Докажем теперь обратное утверждение теоремы и левую оценку в (3). Заметим, что из леммы 8 следует неравенство

$$\|D^{-l-1}g\|_{H^p(U^n)} \le C(l,p)\int_{T^n}\left(\int_{I^n}|g(R\xi)|(1-R)^l\,dR\right)^p dm_n(\xi),$$

$$0<p<\infty,\quad -1<l<\infty.$$

Следовательно, функционал Φ можно продолжить на пространство

$$H^p_{-l-1}(U^n) = \left\{g\in H(U^n): \left|D^{-l-1}g\right|_{H^p(U^n)} < \infty\right\}$$

непрерывным образом. Далее, учитывая вид линейного непрерывного функционала в классах $H^p(U^n)$, можно легко вывести представление

$$\Phi(f) = \lim_{r\to 1}\int_{T^n} f(rt)g(r\bar t)\,dm_n(t),\quad f\in F_l^{p,1},\quad \|D^{l+1}g\|_{H^{p'}}<\infty.$$

Заметим, что

$$\|g\|_{F_l^{p,1}} \le C\|g\|_{F_{pl}^{p,p}},\quad p\in(1,\infty). \tag{16}$$

Следовательно, учитывая, что $l_z(\omega)=\sum_{|k|\ge 0}(z\omega)^k$ и ряд сходится к функции $l_z(\omega)$ в пространстве $F_{pl}^{p,p}$, $1<p<\infty$, а поэтому, в силу (16), и в $F_l^{p,1}$, при любом $z\in U^n$ получаем

$$g(z) = \Phi(l_z) = \sum_{|k|\ge 0}\Phi(\delta_k)z^k.$$

Следовательно, $g(z)\in H(U^n)$. Далее, воспользовавшись леммами 6 и 9, получаем окончательно (для $z=Rt$)

$$|D^{l+1}g(z)| = |\Phi(D^{l+1}l_z(\omega))| = \left|\lim_{r\to 1}\int_{T^n}\frac{D^{l+1}G(r\xi)}{(1-Rrt\bar\xi)}\,dm_n(\xi)\right|,$$

$$\left(\int_{T^n}\left(\sup_{|z|\in I^n}\left|D^{l+1}(D_l^1 g(z))\right|(1-|z|)\right)^{p'} dm_n(\xi)\right)^{1/p'} \le C(l)\|D^{l+1}g\|_{H^{p'}(U^n)} =$$

$$= C(l)\sup_{R\in I}\left(\int_{T^n}\left|D^{l+1}g(Rt)\right|^{p'} dm_n(t)\right)^{1/p'} \le$$

$$\le C(l)\sup_{R\in I}\lim_{r\to 1}\left[\int_{T^n}\left|\int_{T^n}\frac{(D^{l+1}G(r\xi))}{(1-Rrt\bar\xi)}\,dm_n(\xi)\right|^{p'} dm_n(t)\right]^{1/p'} \le$$

$$\le C(l)\sup_{R\in I}\lim_{r\to 1}\left(\int_{T^n}\left|D^{l+1}G(Rr\xi)\right|^{p'} dm_n(\xi)\right)^{1/p'} \le C(l)\|D^{l+1}G\|_{H^{p'}(U^n)}<\infty,$$

$$(1-Rrt\bar\xi) = \prod_{k=1}^n(1-R_kr_kt_k\bar\xi_k),\qquad R,\ r\in I^n,\quad t,\ \xi\in T^n.$$

Чтобы получить представление (1) для функционала Φ, достаточно учесть, что $\|g\|_{F_l^{p,1}} \le C\|g\|_{F_{pl}^{p,p}}$, $1 < p < \infty$, следствие леммы 2 и провести стандартные рассуждения (см., например, [3], теорему 6.9).

Теорема 2 доказана.

1. *Fefferman C., Stein E.* H^p spaces of several variables // Acta Math. – 1972. – **192**. – P. 137 – 173.
2. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. мат. – М.: ВИНИТИ, 1985. – **23**. – С. 3 – 124.
3. *Djrbashian A., Shamoian F.* Topics in the theory of A_α^p spaces // Teubner-Texte zur Math. – 1988. – **105**. – P. 200.
4. *Yevtic M., Pavlovic M.* Coefficient multipliers on spaces of analytic functions // Acta Sci. Math. – 1998. – **64**. – P. 531 – 545.
5. *Buckley S. M., Koskela P., Vucotić D.* Fractional integration, differentiation and weighted Bergman spaces // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1999. – № 2. – P. 377 – 385.
6. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
7. *Вербицкий И. Э.* Теоремы вложения для пространств аналитических функций со смешанной нормой. – Кишинев, 1987. – 41 с. – (Препринт / Ин-т географии и геологии, № 44).
8. *Гулиев В. С., Лизоркин П. И.* Классы голоморфных и гармонических функций в поликруге в связи с их граничными значениями // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1993. – **204**. – С. 137 – 159.
9. *Ortega J., Fabrega J.* Holomorphic Triebel – Lizorkin spaces // J. Function. Anal. – 1997. – **151**. – P. 177 – 212.
10. *Ortega J., Fabrega J.* Hardy's inequality and embeddings in holomorphic Triebel – Lizorkin spaces // Ill. J. Math. – 1999. – **43**, № 4. – P. 733 – 751.
11. *Шамоян Р. Ф.* Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса голоморфных в полидиске функций // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 7. – С. 67 – 69.
12. *Шамоян Р. Ф.* О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в поликруге // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1405 – 1415.
13. *Garnett J. B.* Bounded analytic functions. – Orlando: Acad. Press, 1981. – 467 p.
14. *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. – 1985. – **8**. – С. 115 – 186.
15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т. 3. – 655 с.
16. *Гварадзе М. И.* Множители одного класса аналитических функций, определенных на полидиске // Тр. Тбил. мат. ин-та. – 1980. – **66**. – С. 15 – 21.
17. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
18. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
19. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
20. *Aleksandrov A. B.* Essays on non localy convex Hardy classes // Complex Anal. and Spectral Theory: Lect. Notes Math. – 1981. – **844**. – P. 1 – 90.
21. *Шамоян Ф. А., Ярославцева О. В.* Непрерывные проекторы, двойственность и диагональное отображение в весовых пространствах голоморфных функций со смешанной нормой // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1997. – **247**. – С. 268 – 276.

Получено 23.02.2001,
после доработки — 16.09.2002