УДК 519.65

С. А. Бельский (Днепропетр. ун-т)

О КУСОЧНО-ПОСТОЯННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ

We consider the approximation by piecewise constant functions of classes of multivariable functions that are determined by modules of continuity of the form $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_n(\delta_n)$, where $\omega_i(\delta_i)$ are ordinary modules of continuity depending on one variable. In the case where $\omega_i(\delta_i)$ are convex upwards, we obtain exact estimates of an error: 1) in the integral metric L_2 for $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_n(\delta_n)$; 2) in the integral metric L_p $(p \ge 1)$ for $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = c_1\delta_1 + \ldots + c_n\delta_n$; 3) in the integral metric $L_{(2, \ldots, 2, 2r)}$ $(r = 2, 3, \ldots)$ for $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_{n-1}(\delta_{n-1}) + c_n\delta_n$.

Розглянуто наближення кусково-сталими функціями класів функцій багатьох змінних, визначених модулями неперервності вигляду $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_n(\delta_n)$, де $\omega_i(\delta_i)$ — звичайні модулі неперервності, що залежать від однієї змінної. При опуклих вгору $\omega_i(\delta_i)$ отримано точні оцінки похибки: 1) в інтегральній метриці L_2 для $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_n(\delta_n)$; 2) в інтегральній метриці L_p, $p \ge 1$, для $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = c_1\delta_1 + \ldots + c_n\delta_n$; 3) в інтегральній метриці $L_{(2, \ldots, 2, 2r)}$, $r = 2, 3, \ldots$, для $\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_{n-1}(\delta_{n-1}) + c_n\delta_n$.

Во вступительной части настоящей статьи приведены сведения об основных результатах по тематике кусочно-постоянного приближения. Пункт 1 содержит постановку решаемой задачи. В п. 2 доказано несколько вспомогательных утверждений. В пп. 3 и 4 доказаны основные результаты теорем 1 – 4.

Главные результаты по тематике кусочно-постоянного приближения принадлежат Н. П. Корнейчуку. Кратко расскажем о них.

Пусть класс функций одной переменной $H^\omega[a, b]$ задан модулем непрерывности $\omega(\delta)$ (определенной на полупрямой $\delta \ge 0$ неотрицательной неубывающей полуаддитивной функцией, в нуле равной нулю) по правилу

$$H^\omega[a, b] = \{x : [a, b] \to R : \forall u, v \in [a, b] \, |x(u) - x(v)| \le \omega(|u - v|)\}; \qquad (1)$$

при этом класс, заданный модулем непрерывности $\omega(\delta) = c\delta$ $(c > 0)$, будем обозначать через $cH^1[a, b]$. Пусть $S_{N,0}[a, b]$ — класс кусочно-постоянных функций, заданных на $[a, b]$, с возможными разрывами только в узлах разбиения $[a, b]$ на N равных отрезков. Поставим в соответствие непрерывной на $[a, b]$ функции $x(t)$ кусочно-постоянную функцию $\psi_N(x, t)$ из $S_{N,0}[a, b]$, в каждой точке t из $[a, b]$ равную среднему интегральному x по тому отрезку разбиения, которому принадлежит t.

Н. П. Корнейчук вычислил для выпуклых вверх модулей непрерывности $\omega(\delta)$ величины погрешностей при аппроксимации класса $H^\omega[a, b]$ подпространством $S_{N,0}[a, b]$ в интегральной метрике L_p для $p \ge 1$ и линейным методом $\psi_N(x)$ для $0 < p \le 3$ [1. с. 320 – 324; 333 – 335]. При этом для $1 \le p \le 3$ приближение методом $\psi_N(x)$ на всем классе $H^\omega[a, b]$ не уступает приближению подпространством $S_{N,0}[a, b]$.

Н. П. Корнейчук также доказал [1, с. 368 – 371; 2], что в пространстве $L_p[a, b]$ для выпуклого вверх $\omega(\delta)$ при всех $p \ge 1$ подпространство $S_{N,0}[a, b]$

реализует N-поперечник по Колмогорову класса $H^{\omega}[a,b]$, а при $1 \le p \le 3$ линейный метод $\psi_N(x)$ реализует линейный N-поперечник класса $H^{\omega}[a,b]$. Этот факт вызывает особый интерес к аппроксимации кусочно-постоянными функциями.

В работах [3 – 5] О. В. Черницкая исследовала кусочно-постоянное приближение функций одной переменной в пространствах Орлича.

Работа Н. П. Корнейчука [6] содержит результаты о кусочно-постоянном приближении классов функций n переменных, определенных модулем непрерывности $\omega(\delta)$ по правилу

$$H^{n;\omega}_{a,\rho}([0,a]^n) = \{ f\colon [0,a]^n \to R : \forall u, v \in [0,a]^n \; |f(u)-f(v)| \le \omega(\rho(u,v))\}, \quad (2)$$

где ρ — расстояние, определенное в пространстве R^n.

Разрежем $[0,a]^n$ на N^n равных малых кубов $\{I_k\}$ со сторонами длиной a/n. Пусть $S^0_{N^n}$ — класс кусочно-постоянных на $[0,a]^n$ функций, принимающих постоянные значения внутри каждого из кубов $\{I_k\}$. Поставим в соответствие непрерывной на $[0,a]^n$ функции $x(t)$ кусочно-постоянную функцию $\psi_N(f,t)$ из $S^0_{N^n}$, в каждой точке t из $[0,a]^n$ равную среднему интегральному f по тому из кубов $\{I_k\}$, которому принадлежит t.

Н. П. Корнейчук для расстояний $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$, соответствующих метрическим пространствам R^n_1, R^n_2, R^n_∞, и выпуклых вверх модулей непрерывности $\omega(\delta)$ в [6] получил величины погрешностей при аппроксимации класса $H^{n,\omega}_{a,\rho_i}([0,a]^n)$ классом $S^0_{N^n}$ в интегральной метрике L_p для $p \ge 1$ и линейным методом $\psi_N(f)$ для $0 < p \le 3$. Отметим, что для $1 \le p \le 3$ приближение линейным методом $\psi_N(f)$ на всем классе $H^{n,\omega}_{a,\rho_i}([0,a]^n)$ не уступает приближению подпространством $S^0_{N^n}$.

В данной работе мы рассмотрим приближение классов функций n переменных, определенных модулями непрерывности другого вида, и применим другой способ при доказательствах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим куб $I^n_a = [0,a]^n \subset R^n$. Пусть N_1, $N_2, \ldots, N_n$ — натуральные числа, $N = (N_1, N_2, \ldots, N_n)$. Положим $h_i = a/N_i$, $\tau_{i,j} = j h_i$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0, N_i}$. Плоскости размерности $n-1$

$$t_i = \tau_{i,j}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0,N_i}, \quad (3)$$

параллельные граням куба I^n_a, разрезают его на

$$M = N_1 N_2 \ldots N_n \quad (4)$$

равных параллелепипедов $\{P_k\}$, имеющих соответствующие длины сторон $h_1, \ldots, h_n$ и объем

$$V_N = h_1 \ldots h_n. \quad (5)$$

Параллелепипед

$$P_0 := [0,h_1] * \ldots * [0,h_n]. \quad (6)$$

Норма функции в пространстве $L_p(I^n_a)$

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{I_a^n} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p},$$

в $L_p(P_0)$ — аналогично.

Мы будем изучать приближение классов

$$H^{n,\omega}(I_a^n) = \{ f \in C(I_a^n) : \forall t, t+u \in I_a^n \ |f(t+u) - f(t)| \le \omega(|u_1|, \ldots, |u_n|) \}, \quad (7)$$

определенных модулем непрерывности специального вида

$$\omega(\delta) = \omega(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_n(\delta_n), \quad (8)$$

где ω_i — одномерные модули непрерывности, а $\delta_i \ge 0$. Классы $H^{n,\omega}(P_0)$ определяются аналогично.

Отметим, что условие $f \in H^{n,\omega}(I_a^n)$ эквивалентно тому, что для всех i при любых фиксированных значениях $t_1, \ldots, t_{i-1}$, $t_{i+1}, \ldots, t_n$ из $[0, a]$ функция f по i-й переменной принадлежит классу $H^{\omega_i}[0, a]$.

Через $S_N^0(I_a^n)$ будем обозначать подпространство кусочно-постоянных функций, определенных на I_a^n и совпадающих внутри каждого параллелепипеда P_k с некоторой константой; поскольку мы будем изучать приближение в интегральной метрике, значения кусочно-постоянных на границах параллелепипедов можно задавать произвольным образом. Функции $f(t) \in C(I_a^n)$ поставим в соответствие кусочно-постоянную $\psi_N(f, t)$, в каждой точке t равную среднему интегральному f по параллелепипеду P_k, которому t принадлежит.

В данной статье рассмотрен ряд задач (для различных ω и p):

1) об оценке приближения в интегральной метрике L_p класса $H^{n,\omega}(I_a^n)$ подпространством $S_N^0(I_a^n)$;

2) об оценке приближения в L_p функций класса $H^{n,\omega}(I_a^n)$ интерполяционным методом $\psi_N(f)$.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $x(t)$ — неотрицательная функция из $C[0, h]$, mes — обычная линейная мера Лебега на отрезке $[a, b]$,

$$r(x, t) = \inf \{ y : \text{mes} \{ y : x(u) > y \} \le t \} \quad (9)$$

— убывающая перестановка функции $x(t)$ в смысле Харди ([2], гл. 10).

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная непрерывная на $[0, h]$ функция,

$$x_+(t) = \max\{x(t), 0\}, \qquad x_-(t) = \max\{-x(t), 0\}, \quad t \in [0, h].$$

Убывающая перестановка функции, сохраняющая ее среднее значение, определяется следующим образом:

$$\pi(x, t) = r(x_+, t) - r(x_-, h - t). \quad (10)$$

Лемма 1. *Рассмотрим множество всех невозрастающих неотрицательных функций $x(t)$ из класса $cH^1[0, h]$, $c > 0$, с одинаковым средним значением*

$$\alpha = \hat{x} = \frac{1}{h} \int\limits_0^h x(t) \, dt.$$

Среди функций этого множества максимальное значение $\|x\|_p$ при всех $p \ge 1$ достигается для функции

$$\eta(t) = \begin{cases} c(m - t), & 0 \le t \le l, \\ 0, & l \le t \le h, \end{cases} \qquad m = \sqrt{\frac{2\alpha h}{c}}, \quad l = \min\{m, h\}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — другая функция из указанного множества. Очевидно, существует точка $t^* \in [0, h]$ (может быть, не единственная) такая, что $x(t^*) = \eta(t^*)$. Тогда $x(t) \le \eta(t)$ для $0 \le t \le t^*$ и $x(t) \ge \eta(t)$ для $t^* \le t \le h$. Докажем, что для всех $t \in [0, h]$

$$\int_0^t x(u)\,du \le \int_0^t \eta(u)\,du.$$

Предположим обратное, т. е. для некоторой точки t_0 из $(t^*, h]$ выполняется обратное неравенство. Но тогда

$$\int_0^h x(u)\,du = \int_0^{t_0} x(u)\,du + \int_{t_0}^h x(u)\,du > \int_0^{t_0} \eta(u)\,du + \int_{t_0}^h \eta(u)\,du = \int_0^h \eta(u)\,du.$$

Получаем противоречие с условием леммы.

Для непрерывной неотрицательной неубывающей функции $x(t)$ верно равенство $x(t) = r(x, t)$, поэтому для всех $t \in [0, h]$

$$\int_0^t r(x, u)\,du \le \int_0^t r(\eta, u)\,du.$$

Из теоремы о сравнении перестановок функций [2, с. 113] при $p \ge 1$ $\|\eta\|_p \ge \ge \|x\|_p$.

Лемма 2. *Если* $x \in cH^1[0, h]$, $c > 0$, $\hat{x} = \alpha$, *то*

$$\int_0^h |x(t)|^p\,dt \le \int_0^h |\xi(t)|^p\,dt, \qquad p \ge 1, \tag{12}$$

где $\xi(t) = \alpha + c(t - h/2) = \alpha + x_\omega(t)$.

Доказательство. Легко показать, что если $x \in cH^1[0, h]$, то и $\pi(x, t) \in \in cH^1[0, h]$. Для $x(t) \in [0, h]$ имеет место равенство

$$\int_0^h \pi(x, u)\,du = \int_0^h x(u)\,du.$$

Поэтому при доказательстве можно ограничиться рассмотрением невозрастающих функций x. Положим

$$m_1 = \sqrt{\frac{2\hat{x}_+ h}{c}},\ l_1 = \min\{m_1, h\},\ m_2 = \sqrt{\frac{2\hat{x}_- h}{c}},\ l_2 = h - \min\{m_2, h\}, \tag{13}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} c(m_1 - t), & 0 \le t \le l_1, \\ 0, & l_1 \le t \le l_2, \\ c(h - m_2 - t), & l_2 \le t \le h \end{cases} \tag{14}$$

(положительная и отрицательная части функции $x(t)$ заменены линейными убывающими участками так, что их средние значения сохраняются).

В силу леммы 1

$$\int_0^h |x(t)|^p\,dt = \int_0^h |x_+(t)|^p\,dt + \int_0^h |x_-(t)|^p\,dt \le$$

$$\le \int_0^h |x_{1+}(t)|^p\,dt + \int_0^h |x_{1-}(t)|^p\,dt = \int_0^h |x_1(t)|^p\,dt,$$

$$|x_1(t)| \le \left|\alpha + c\left(\frac{h}{2} - t\right)\right| \Rightarrow \int_0^h |x_1(t)|^p\, dt \le$$

$$\le \int_0^h \left|\alpha + c\left(\frac{h}{2} - t\right)\right|^p dt = \int_0^h |\xi(t)|^p\, dt.$$

Лемма 3. *Если* $x \in H^{\omega}[0, h]$, $\hat{x} = \alpha$, *то*

$$\int_0^h x^2(t)dt \le \int_0^h \xi^2(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^h \omega^2(t)dt + h\alpha^2, \tag{15}$$

где $\xi(t) = \alpha + x_{\omega}(t)$.

Доказательство. Рассмотрим $x_1(t) = x(t) - \alpha$. Поскольку $\hat{x}_1 = 0$, $x_1 \in$ $\in H^{\omega}[0, h]$, в силу леммы 7.3.3 из [1, с. 333], получаем:

$$\int_0^h x_1^2(t)dt \le \frac{1}{4}\int_0^h \omega^2(x_1, t)dt \le \frac{1}{4}\int_0^h \omega^2(t)dt = \int_0^h x_{\omega}^2(t)dt,$$

$$\int_0^h x_1^2(t)dt = \int_0^h (x(t) - \alpha)^2\, dt = \int_0^h x^2(t)dt - 2\alpha\int_0^h x(t)dt + h\alpha^2 =$$

$$= \int_0^h x^2(t)dt - h\alpha^2 \Rightarrow \int_0^h x^2(t)dt = h\alpha^2 + \int_0^h x_1^2(t)dt \le$$

$$\le h\alpha^2 + \int_0^h x_{\omega}^2(t)dt = \int_0^h \xi^2(t)dt.$$

Лемма 4. *Пусть* f *определена на* P_0 *и при любых допустимых значениях* $t_1, \ldots, t_{k-1}$, $t_{k+1}, \ldots, t_n$ *функция* f *по* k*-й переменной принадлежит классу* $H^{\omega_k}[0, h_k]$. *Для* $j \ne k$ *положим*

$$\psi_j(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{h_j}\int_0^{h_j} f(t_1, \ldots, t_n)dt_j. \tag{16}$$

Тогда при любых допустимых значениях $t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n$ *функция* ψ_j *по* k*-й переменной принадлежит классу* $H^{\omega_k}[0, h_k]$.

Доказательство этого факта тривиально.

3. Определим на параллелепипеде P_0 функцию

$$f_0(t) = f_0(t_1, \ldots, t_n) = x_{\omega_1}(t_1) + \ldots + x_{\omega_n}(t_n), \tag{17}$$

где

$$x_{\omega_i}(t_i) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\omega_i(h_i - 2t_i), & 0 \le t_i \le \dfrac{h_i}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\omega_i(2t_i - h_i), & \dfrac{h_i}{2} \le t_i \le h_i. \end{cases} \tag{18}$$

Для непрерывной функции f положим

$$\eta(f) = \frac{1}{V_N}\int_{P_0} f(t)dt. \tag{19}$$

Теорема 1. 1) *При*

$$\omega(\delta) = \omega(\delta_1, \ldots, \omega_n) = c_1\delta_1 + \ldots + c_n\delta_n, \quad c_i > 0, \quad p \ge 1,$$

имеет место равенство

$$\sup_{f\in H^{n,\omega}(P_0)} E_0(f)_p = \sup_{f\in H^{n,\omega}(P_0)} \|f-\eta(f)\|_p = \|f_0\|_p; \tag{20}$$

2) *при*

$$\omega(\delta) = \omega_1(\delta_1)+\ldots+\omega_n(\delta_n), \quad p=2$$

для $f\in H^{n,\omega}(P_0)$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_{P_0} |f(t)-\eta(f)|^p\,dt \le \int\limits_{P_0} |f_0(t)|^p\,dt = \frac14\sum_{i=1}^n \frac{V_N}{h_i}\int\limits_0^{h_i}\omega_i^2(u)du. \tag{21}$$

Если все ω_i *— выпуклые вверх модули непрерывности, то имеет место равенство*

$$\sup_{f\in H^{n,\omega}(P_0)} E_0(f)_p = \sup_{f\in H^{n,\omega}(P_0)} \|f-\eta(f)\|_p = \|f_0\|_p. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $f\in H^{n,\omega}(P_0)$. Докажем неравенство

$$\int\limits_{P_0} |f(t)-\eta(f)|^p\,dt \le \int\limits_{P_0} |f_0(t)|^p\,dt$$

одновременно для случаев 1 и 2. Доказать эту оценку достаточно при $\eta(f)=0$. Действительно, если оценка верна для функции $f-\eta(f)$, имеющей нулевое среднее значение, то она верна и для f.

Итак, пусть $\eta(f)=0$.

Рассмотрим последовательность функций $g_0, g_1, \ldots, g_n$, построенную по правилу

$$g_0(t) = f(t), \quad g_i(t_1,\ldots,t_n) = \frac{1}{h_i}\int\limits_0^{h_i} g_{i-1}(t_1,\ldots,t_n)dt_i + x_{\omega_i}(t_i), \quad i=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Иными словами,

$$g_i(t_1,\ldots,t_n) = \frac{1}{h_1\ldots h_i}\int\limits_0^{h_1}\ldots\int\limits_0^{h_i} f(t_1,\ldots,t_n)dt_i\ldots dt_1 + x_{\omega_1}(t_1)+\ldots+x_{\omega_i}(t_i), \quad i=\overline{1,n}.$$

Функция g_i в силу леммы 4 для всех $k>i$ по k-й переменной принадлежит классу $H^{\omega_k}[0,h_k]$. Применяя леммы 2 и 3 соответственно для рассматриваемых случаев 1 и 2, для любых допустимых значений $t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n$ получаем

$$\int\limits_0^{h_1}|g_{i-1}(t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_n)|^p dt_i \le \int\limits_0^{h_1}|g_i(t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_n)|^p dt_i \Rightarrow \int\limits_{P_0}|g_{i-1}(t)|^p\,dt \le$$

$$\le \int\limits_{P_0}|g_i(t)|^p\,dt \Rightarrow \int\limits_{P_0}|g_0(t)|^p\,dt \le \int\limits_{P_0}|g_n(t)|^p\,dt,$$

т. е.

$$\int\limits_{P_0}|f(t)|^p\,dt \le \int\limits_{P_0}|f_0(t)|^p\,dt.$$

Неравенство доказано.

В случае 1, а также в случае 2, если все ω_i выпуклы вверх, то каждая функция $x_{\omega_i}\in H^{\omega_i}[0,h_i]$. Поэтому $f_0\in H^{n,\omega}(P_0)$. Для f_0 в силу ее нечетности относительно точки $(h_1/2, \ldots, h_n/2)$ наилучшая константа приближения в L_p равна нулю. Получаем ряд оценок

$$\|f_0\|_P \leq \sup_{f \in H^{n,\omega}(P_0)} E_0(f)_p \leq \sup_{f \in H^{n,\omega}(P_0)} \|f - \eta(f)\|_p \leq \|f_0\|_P.$$

Определим на кубе I_a^n функцию

$$f_N^0(t_1, \ldots, t_n) = x_{N_1,0}(t_1) + \ldots + x_{N_n,0}(t_n), \tag{24}$$

где $x_{N_i,0}(t_i)$ построена на $[\tau_{i,k}, \tau_{i,k+1}]$ так же, как $x_{\omega_i}(t_i)$ на $[0, h_i]$, с точностью до переменного знака, зависящего от четности k.

Теорема 2. 1) *При*

$$\omega(\delta) = \omega(\delta_1, \ldots, \omega_n) = c_1\delta_1 + \ldots + c_n\delta_n, \quad c_i > 0, \quad p \geq 1$$

имеет место равенство

$$E\left(H^{n,\omega}(I_a^n), S_N^0(I_a^n)\right)_{L_p} = \sup_{f \in H^{n,\omega}(I_a^n)} \|f - \psi_N(f)\|_p = \|f_N^0\|_p. \tag{25}$$

2) *При*

$$\omega(\delta) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_n(\delta_n), \quad p = 2$$

для $f \in H^{n,\omega}(I_a^n)$ *имеет место оценка*

$$\int_{I_a^n} |f(t) - \psi_N(f, t)|^p \, dt \leq \int_{I_a^n} |f_N^0(t)|^p \, dt = \frac{M}{4} \sum_{i=1}^n \frac{V_N}{h_i} \int_0^{h_i} \omega_i^2(u) du. \tag{26}$$

Если все ω_i *— выпуклые вверх модули непрерывности, то имеет место равенство*

$$E\left(H^{n,\omega}(I_a^n), S_N^0(I_a^n)\right)_{L_p} = \sup_{f \in H^{n,\omega}(I_a^n)} \|f - \psi_N(f)\|_p = \|f_N^0\|_p. \tag{27}$$

Для доказательства теоремы 2 надо применить на каждом параллелепипеде P_k оценку из теоремы 1.

4. Получим результат, относящийся к приближению в смешанной метрике $L_{(2, \ldots, 2, 2r)}$, $r \in N$. Пусть $P = [a_1, b_1] * \ldots * [a_n, b_n]$ — произвольный параллелепипед. Известно, что для $f \in L_{(2, \ldots, 2, 2r)}(P)$ [7; 8, с. 9]

$$\|f\|_{(2, \ldots, 2, 2r), P} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f^2(t_1, \ldots, t_n) \, dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n \right)^{1/2r}. \tag{28}$$

Теорема 3. *Для*

$$\omega(\delta) = \omega_1(\delta_1) + \ldots + \omega_{n-1}(\delta_{n-1}) + c\delta_n, \quad c > 0,$$

имеет место оценка

$$\sup_{f \in H^{n,\omega}(P_0)} \|f - \eta(f)\|_{(2, \ldots, 2, 2r), P_0} \leq \|f_0\|_{(2, \ldots, 2, 2r), P_0} = \tag{29}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^r C_r^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{V_N}{h_i h_n} \int_0^{h_i} \omega_i^2(t) dt \right)^k \frac{V_N^{r-k} h_n^{r-k+1} c^{2r-2k}}{2r - 2k + 1} \right)^{1/2r}.$$

Если все ω_i *выпуклы вверх, то имеет место равенство*

$$\sup_{f\in H^{n,\omega}(P_0)} E_0(f)_{(2,\ldots,2,2r),P_0} = \sup_{f\in H^{n,\omega}(P_0)} \| f-\eta(f)\|_{(2,\ldots,2,2r),P_0} =$$
$$= \| f_0 \|_{(2,\ldots,2,2r),P_0}. \tag{30}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для $f\in H^{n,\omega}(P_0)$ при $\eta(f) = 0$ имеет место неравенство

$$\| f\|_{(2,\ldots,2,2r),P_0} \le \| f_0\|_{(2,\ldots,2,2r),P_0}.$$

Положим

$$\psi_1(t) = f(t), \qquad \psi_i(t_i,\ldots,t_n) = \frac{1}{h_{i-1}}\int_0^{h_{i-1}} \psi_{i-1}(t_{i-1},t_i,\ldots,t_n)\,dt_{i-1}, \qquad i=\overline{2,n}. \tag{31}$$

По лемме 3

$$\int_0^{h_{n-1}}\cdots\int_0^{h_1} f^2(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_{n-1} \le$$
$$\le \int_0^{h_{n-1}}\cdots\int_0^{h_2}\left[\frac{1}{4}\int_0^{h_1}\omega_1^2(t)\,dt + h_1\psi_2^2(t_2,\ldots,t_n)\right]dt_2\ldots dt_{n-1} =$$
$$= \frac{V_N}{h_1h_n}\int_0^{h_1}\omega_1^2(t)\,dt + h_1\int_0^{h_{n-1}}\cdots\int_0^{h_2}\psi_2^2(t_2,\ldots,t_n)\,dt_2\ldots dt_{n-1}.$$

Продолжая применять лемму 3, получаем

$$\int_0^{h_{n-1}}\cdots\int_0^{h_1} f^2(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_{n-1} \le \sum_{i=1}^{n-1}\frac{V_N}{h_ih_n}\int_0^{h_i}\omega_i^2(t)\,dt + \frac{V_N}{h_n}\psi_n^2(t_n).$$

Из этого следует

$$\| f\|^{2r}_{(2,\ldots,2,2r),P_0} \le \int_0^{h_n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{V_N}{h_ih_n}\int_0^{h_i}\omega_i^2(t)\,dt + \frac{V_N}{h_n}\psi_n^2(t_n)\right]^r dt_n =$$
$$= \int_0^{h_n}\left[\sum_{k=0}^{r} C_r^k\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{V_N}{h_ih_n}\int_0^{h_i}\omega_i^2(t)\,dt\right)^k\left(\frac{V_N}{h_n}\right)^{r-k}\psi_n^{2r-2k}(t_n)\right]dt_n.$$

Воспользуемся леммой 2: если $\psi_n\in cH^1[0,h_n]$, $\hat\psi_n=0$, то

$$\int_0^{h_n}\psi_n^{2r-2k}(t_n)\,dt_n \le \int_0^{h_n} x_\omega^{2r-2k}(t_n)\,dt_n = \int_0^{h_n}\left(c\left(t_n-\frac{h_n}{2}\right)\right)^{2r-2k}dt_n = \frac{c^{2r-2k}h_n^{2r-2k+1}}{(2r-2k+1)2^{2r-2k}}.$$

Поэтому

$$\| f\|^{2r}_{(2,\ldots,2,2r),P_0} \le \frac{1}{2^{2r}}\sum_{k=0}^{r}C_r^k\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{V_N}{h_ih_n}\int_0^{h_i}\omega_i^2(t)\,dt\right)^k\frac{V_N^{r-k}h_n^{r-k+1}c^{2r-2k}}{2r-2k+1} =$$
$$= \| f_0\|^{2r}_{(2,\ldots,2,2r),P_0}$$

(последнее равенство проверяется непосредственно).

Теорема 4. *Для*

$$\omega(\delta) = \omega_1(\delta_1)+\ldots+\omega_{n-1}(\delta_{n-1}) + c\delta_n \qquad (c>0)$$

имеет место оценка

$$\sup_{f\in H^{n,\omega}(I_a^n)} \| f-\psi_N(f)\|_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n} \le \| f_N^0\|_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(N_1^r \ldots N_{n-1}^r N_n \sum_{k=0}^{r} C_r^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{V_N}{h_i h_n} \int_0^{h_i} \omega_i^2(t)\,dt \right)^k \frac{V_N^{r-k} h_n^{r-k+1} c^{2r-2k}}{2r-2k+1} \right)^{1/2r}. \tag{32}$$

Если все ω_i *выпуклы вверх, то имеет место равенство*

$$E\left(H^{n,\omega}(I_a^n), S_N^0(I_a^n)\right)_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n} =$$

$$= \sup_{f\in H^{n,\omega}(I_a^n)} \| f-\psi_N(f)\|_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n} = \| f_N^0\|_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n}. \tag{33}$$

Доказательство. Положим $K = N_1 \ldots N_{n-1}$. Пусть D_i при $i = \overline{1,K}$ — $(n-1)$-мерные параллелепипеды вида $[\tau_{1,i_1}, \tau_{1,i_1+1}] * \ldots * [\tau_{n-1,i_{n-1}}, \tau_{n-1,i_{n-1}+1}]$;

$$\| f-\psi_N(f)\|^{2r}_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n} = \int_0^a \left[\int_{[0,a]^{n-1}} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n =$$

$$= \int_0^a \left[\sum_{i=1}^{K} \int_{D_i} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n =$$

$$= \sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_K):\, l_1+\ldots+l_K=r \\ l_i\in\{0,1,\ldots,r\}}} \int_0^a \left[\int_{D_1} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^{l_1} \ldots$$

$$\ldots \left[\int_{D_K} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^{l_K} dt_n. \tag{34}$$

Применим к последнему выражению неравенство Гельдера для нескольких функций: если $1/p_1 + \ldots + 1/p_L = 1$, $p_1 > 1$, то [8, с. 18]

$$\int_0^a g_1(t) \ldots g_L(t)\,dt \le \| g_1\|_{p_1} \ldots \| g_L\|_{p_L}.$$

В выражении (34) те сомножители под интегралом, для которых $l_i = 0$, равны 1. В качестве $g_1, \ldots, g_L$ возьмем те сомножители, для которых $l_i \ne 0$, и положим для них $p_i = r/l_i$. Получаем

$$\| f-\psi_N\|^{2r}_{(2,\ldots,2,2r),\,I_a^n} \le \sum_{l_1+\ldots+l_K=r} \left(\int_0^a \left[\int_{D_1} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n \right)^{l_1/r} \ldots$$

$$\ldots \left(\int_0^a \left[\int_{D_K} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n \right)^{l_K/r} =$$

$$= \sum_{l_1+\ldots+l_K=r} \left(\sum_{r=1}^{N_n} \int_{\tau_{n,r-1}}^{\tau_{n,r}} \left[\int_{D_1} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n \right)^{l_1/r} \ldots$$

$$\ldots \left(\sum_{r=1}^{N_n} \int_{\tau_{n,r-1}}^{\tau_{n,r}} \left[\int_{D_K} [f(t)-\psi_N(f,t)]^2 dt_1 \ldots dt_{n-1} \right]^r dt_n \right)^{l_K/r}.$$

Применяя на каждом параллелепипеде P_k оценку из теоремы 3, получаем, что последнее выражение не превышает

$$K^r\left(N_n \frac{1}{2^{2r}} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{V_N}{h_i h_n} \int_0^{h_i} \omega_i^2(t)\,dt\right)^k \frac{V_N^{r-k} h_n^{r-k+1} c^{2r-2k}}{2r-2k+1}\right)^{(l_1+\ldots+l_K)/r} =$$

$$= \frac{1}{2^{2r}} N_1^r \ldots N_{n-1}^r N_n \frac{1}{2^{2r}} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{V_N}{h_i h_n} \int_0^{h_i} \omega_i^2(t)\,dt\right)^k \frac{V_N^{r-k} h_n^{r-k+1} c^{2r-2k}}{2r-2k+1} =$$

$$= \| f_N^0 \|_{(2,\ldots,2,2r),\, I_a^n}^{2r}$$

(последнее равенство проверяется непосредственно).

Если все ω_i выпуклы вверх, то $f_N^0 \in H^{n,\omega}(I_a^n)$. Для нее наилучшая кусочно-постоянная функция из $S_N^0(I_a^n)$ совпадает с нулем. Поэтому имеет место ряд оценок

$$\| f_N^0 \|_{(2,\ldots,2,2r),\, I_a^n} \le E\big(H^{n,\omega}(I_a^n), S_N^0(I_a^n)\big)_{(2,\ldots,2,2r),\, I_a^n} \le$$

$$\le \sup_{f \in H^{n,\omega}(I_a^n)} \| f - \psi_N(f) \|_{(2,\ldots,2,2r),\, I_a^n} \le \| f_N^0 \|_{(2,\ldots,2,2r),\, I_a^n}.$$

Автор выражает благодарность проф. С. А. Пичугову за руководство и помощь в работе.

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
2. *Корнейчук Н. П.* О линейных поперечниках классов H^{ω} // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1255–1264.
3. *Черницкая О. В.* Об аппроксимации непрерывных функций кусочно-постоянными в интегральных метриках // Вестн. Днепропетр. ун-та. – 1998. – **3**. – С. 128–137.
4. *Tchernitskaya O. V.* Approximation of continuous functions classes by step functions in integral metrics // East J. Approx. – 1999. – **5**, № 4. – P. 403–418.
5. *Черницкая О. В.* Поперечники классов $H^{\omega}[a, b]$ в пространствах Орлича // Вестн. Днепропетр. ун-та. – 1999. – **4**. – С. 101–105.
6. *Корнейчук Н. П.* Перестановки и кусочно-постоянное приближение непрерывных функций n переменных // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7 – С. 907–918.
7. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

Получено 11.04.00