УДК 517.5

О. Д. Желнов (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ СТАЛІ УІТНІ ОБМЕЖЕНІ ДВІЙКОЮ ДЛЯ $k = 5, 6, 7$

Let $f \in C[0, 1]$, $k = 5, 6, 7$. We prove that if $f(i/(k-1)) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, then

$$|f(x)| \le 2 \sup_{x,\, x+kh \in [0,1]} \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x + jh) \right|.$$

Нехай $f \in C[0, 1]$, $k = 5, 6$ або 7. Доведено, що якщо $f(i/(k-1)) = 0$, $i = 0, 1, \dots, k-1$, то

$$|f(x)| \le 2 \sup_{x,\, x+kh \in [0,1]} \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x + jh) \right|.$$

1. Вступ. Нехай $C[0, 1]$ — простір неперервних на $[0, 1]$ функцій, $\mathcal{P}_k$ — простір алгебраїчних многочленів степеня $\le k$. Для функції $f \in C[0, 1]$ покладемо

$$\omega_k(f) := \sup_{x,\, x+kh \in [0,1]} \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x + jh) \right|.$$

Позначимо через $L_{k-1}(x; f)$ інтерполяційний поліном Лагранжа степеня $\le k-1$ по рівномірній сітці вузлів $0,\ 1/(k-1),\ 2/(k-1), \dots,\ 1$.

У 1957 р. Уітні довів [1], що для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$W_k' := \sup\left\{ \max_{x \in [0,1]} |f(x) - L_{k-1}(x; f)| : f \in C[0,1],\ \omega_k(f) \le 1 \right\} < \infty.$$

Сталі W_k' називають інтерполяційними сталими Уітні.

У тій же роботі Х. Уітні отримав оцінки $W_k' \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$, $W_1' = W_2' = 1$, $16/15 \le W_3' \le 14/9$, $W_4' \le 3,25$, $W_5' \le 10,4$.

Ю. А. Брудний [2] та Б. Сендов [3] оцінили сталі W_k' для всіх $k \in \mathbb{N}$: $W_k' \le (k+1)k^k$.

У 1982 р. Б. Сендов [4] запропонував числовий метод оцінки сталих W_k' та отримав результати, які до останнього часу залишалися найкращими: $W_4' \le 2,84$, $W_5' \le 3,46$, $W_6' \le 5,36$. Там же Б. Сендов висунув гіпотезу: $W_k' \le 2$, $k \in \mathbb{N}$.

У 1989 р. Б. Сендов та В. Попов [5] показали, що $W_k' = O(\ln k)$. У 1992 р. М. Такев [6] довів абсолютну обмеженість інтерполяційних сталих Уітні: $W_k' \le 36$, $k \in \mathbb{N}$. У 1995 р. Ю. В. Крякін та М. Такев [7] отримали оцінку $W_k' \le 5$, $k \in \mathbb{N}$. Оцінку $W_k' \le 6$, $k \in \mathbb{N}$, було отримано іншим шляхом у 1998 р. Б. Бояновим [8]. У 1998 р. І. Г. Даниленко [9] дав ствердну відповідь на гіпотезу Сендова для частинного випадку $k = 4$: $W_4' \le 2$.

Нещодавно Я. Гілевич, Ю. В. Крякін та І. О. Шевчук [10] довели, що $W_k' \le 3$, $k \in \mathbb{N}$. У даній роботі доводиться справедливість гіпотези Сендова для $k = 5, 6, 7$, а саме встановлюється така теорема.

Теорема 1. *Для* $k = 5, 6, 7$ *має місце оцінка* $W_k' \le 2$.

2. Допоміжні твердження. Нехай $f \in C[0, 1]$, $\omega_k(f) = 1$. Нерівність $|f(x) -$

$-L_{k-1}(x;f)| \le 2\omega_k(f)$, $x \in [1/k, 1-1/k]$, є відомою; її доведення можна знайти, наприклад, в [5]. Тому для доведення теореми 1 достатньо показати, що

$$\max_{x\in[0,1/k]} |f(x) - L_{k-1}(x;f)| \le 2.$$

(Доведення цієї нерівності для відрізка $[1-1/k, 1]$ є аналогічним.)

Для цього, наслідуючи Ю. В. Крякіна [11], використаємо інтерполяційний у середньому многочлен $Q_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}$, тобто $Q_{k-1}(x;f)$ — многочлен, що визначається з умови

$$\int_0^{i/k} (f(x) - Q_{k-1}(x;f))\,dx = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Сформулюємо допоміжні твердження щодо цих многочленів.

Теорема А [12]. *Виконуються такі нерівності*:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - Q_{k-1}(x;f)| \le \omega_k(f), \qquad k = 5, 6, 7.$$

Лема 1 [13]. *Нехай* $x \in [0,1]$, $0 \le m \le k$, $|h| \le 1/k$ *та* $x - mh$, $x + (k-m)h \in [0,1]$. *Тоді виконується нерівність*

$$|f(x) - Q_{k-1}(x;f)| \le \binom{k}{m}^{-1} \left(1 + \frac{1}{|h|} \sum_{j=0, j\ne m}^{k} \frac{1}{|j-m|} \binom{k}{j} |B_k(x + (j-m)h)| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|h|} \binom{k}{m} |\sigma_{k-m} - \sigma_m|\, |B_k(x)| \right) \omega_k(f), \qquad (1)$$

де

$$B_k(x) := \frac{k^k x(x-1/k)\ldots(x-1)}{k!}, \qquad \sigma_0 := 0, \quad \sigma_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Нехай $l_{k-1,i}(x) = \prod_{j=0, j\ne i}^{k-1} \dfrac{(k-1)x - j}{i-j}$ — фундаментальні многочлени Лагранжа. За теоремою А для $x \in [0, 1/k]$, $k = 5, 6, 7$, маємо

$$|f(x) - L_{k-1}(x;f)| \le |f(x) - Q_{k-1}(x;f)| + |L_{k-1}(x;f) - Q_{k-1}(x;f)| \le$$

$$\le 1 + |L_{k-1}(x; f - Q_{k-1}(f))| \le 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \left| f\left(\frac{i}{k-1}\right) - Q_{k-1}\left(\frac{i}{k-1}; f\right)\right| |l_{k-1,i}(x)|.$$

Для оцінки останньої суми будуть потрібні наступні леми.

Для $k = 5, 6$ використаємо таку лему Сендова.

Лема 2 [5]. *Якщо для* $c_{k,i} \ge 0$ *виконується нерівність* $c_{k,i} \le \binom{k-1}{i}^{-1}$, *то*

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i} |l_{k-1,i}(x)| \le 1, \qquad x \in \left[0, \frac{1}{k-1}\right].$$

Для $k = 7$ потрібний дещо підсилений варіант леми Сендова.

Лема 3. *Якщо для* $c_{k,i} \ge 0$ *виконується нерівність*

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{c_{k,i}}{i} \le \sigma_{k-1},$$

то

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_{k,i} |l_{k-1,i}(x)| + |l_{k-1,0}(x)| \le 1, \qquad x \in \left[0, \frac{1}{k-1}\right].$$

Доведення. Згідно з лемою 2 [7]

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_{k,i} |l_{k-1,i}(x)| + |l_{k-1,0}(x)| \le e^{-(k-1)x(\sigma_{k-1}-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{(k-1)x}{i} c_{k,i} +$$

$$+ e^{-(k-1)x\sigma_{k-1}} \le e^{-(k-1)x\sigma_{k-1}} + \sigma_{k-1}(k-1)xe^{-(k-1)x(\sigma_{k-1}-1)} =: \varphi(y),$$

де $y := (k-1)x$, $\varphi(y) := e^{-y\sigma_{k-1}} + \sigma_{k-1} y e^{-y(\sigma_{k-1}-1)}$.

Оскільки $\varphi(0) = 1$, для завершення доведення леми досить довести, що функція φ є незростаючою на $[0, 1]$. Справді,

$$\varphi'(y) = \sigma_{k-1} e^{-y\sigma_{k-1}} \left(-1 + e^{y}(1 - (\sigma_{k-1} - 1)y)\right) =: \sigma_{k-1} e^{-y\sigma_{k-1}} \psi(y).$$

Далі, $\psi(0) = 0$, $\psi'(y) = e^{y}(2 - \sigma_{k-1} - (\sigma_{k-1} - 1)y) \le 0$, $y \in [0, 1]$.

Тому $\psi(y) \le 0$, $y \in [0, 1]$, а отже, і $\varphi'(y) \le 0$, $y \in [0, 1]$.

Лему доведено.

3. Доведення теореми 1. Зауважимо, що права частина (1) є симетричною відносно точки $x = 1/2$. Тому з леми 1 отримуємо оцінки $|f(i/(k-1)) - Q_{k-1}(i/(k-1); f)| \le c_{k,i}$, $0 \le i \le k-1$, в яких можна вважати, що $c_{k,i} = c_{k,k-1-i}$. Числа $c_{k,i}$ обчислюємо за лемою 1 при значеннях параметрів $h_{k,i}$ та $m_{k,i}$, наведених у таблиці.

i	$m_{5,i}$	$h_{5,i}$	$c_{5,i}$	$m_{6,i}$	$h_{6,i}$	$c_{6,i}$	$m_{7,i}$	$h_{7,i}$	$c_{7,i}$
0	0	1/5	1	0	1/6	1	0	1/7	1
1	2	0,125	0,227	2	0,1	0,197	2	0,0833	0,177
2	2	0,1	0,145	3	0,1	0,081	3	0,0952	0,055
3							3	0,0714	0,043

Легко пересвідчитись, що для $k = 5, 6$ виконується умова леми 2, а для $k = 7$ — умова леми 3, а тому

$$|f(x) - L_{k-1}(x; f)| \le 1 + \sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i} |l_{k-1,i}(x)| \le 2, \qquad x \in \left[0, \frac{1}{k}\right],$$

що й доводить теорему.

Зауваження. Користуючись методом, запропонованим Х. Уітні в [1], та результатами роботи [12], можна довести, що $1{,}2 \le W_3' \le 181/120$. (З приводу оцінки знизу див. [14].) Для цього розглянемо функцію $f \in C[0, 1]$. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\omega_3(f) \le 1$. Нехай $p \in \mathcal{P}_2$ — поліном найкращого наближення функції $f \in C[0, 1]$. У роботі [12] показано, що

$$a := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \le \frac{181}{270}.$$

Оцінимо $f(x) - L_2(x; f)$:

$$|f(x)-L_2(x;f)| \le |f(x)-p(x)| + |L_2(x;f-p)| \le$$

$$\le a + a\left(2\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right| + 4|x(x-1)| + 2\left|x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\right) \le a + \frac{5}{4}a = \frac{9}{4}a \le \frac{181}{120}.$$

Автор висловлює подяку професору І. О. Шевчуку за постановку задачі та цінні зауваження до роботи.

1. *Whitney H.* On function with bounded n-th differences // J. math. pures et appl. – 1957. – **36**. – P. 67–95.
2. *Брудный Ю. А.* Приближение функций n переменных квазиполиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **34**. – С. 564–583.
3. *Sendov B.* Modifying Steklov means // C. r. Acad. Bulg. sci. – 1983. – **36**. – P. 315–317.
4. *Sendov B.* On the constants of H. Whitney // Ibid. – 1982. – **35**. – P. 431–434.
5. *Sendov B., Popov V.* The average moduli of smoothness. – New York: J. Wiley & Sons, 1989.
6. *Takev M.* On the theorem of Whitney–Sendov // Constr. Theory Functions. – Sofia, 1992. – P. 269–275.
7. *Крякин Ю. В., Такев М. Д.* Интерполяционные константы Уитни // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1038–1043.
8. *Bojanov B.* Remarks on the Jackson and Whitney constants // Recent Progr. Inequalit. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – P. 161–174.
9. *Даниленко І. Г.* До проблеми Сендова про інтерполяційну сталу Уітні // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 5. – С. 732–734.
10. *Gilewicz J., Kryakin Yu. V., Shevchuk I. A.* Boundedness by 3 of Whitney interpolation constant // J. Approxim. Theory. – 2002. – **119**. – P. 271–290.
11. *Крякин Ю. В.* О функциях с ограниченной n-й разностью // РАН. Сер. мат. – 1997. – **61**, № 2. – С. 95–110.
12. *Zhelnov O. D.* Whitney constants are bounded by 1 for $k = 5, 6, 7$ // E. J. Approxim. – 2002. – **8**, № 1. – P. 1–14.
13. *Крякин Ю. В.* О теореме и константах Уитни // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 3. – С. 25–40.
14. *Желнов О. Д.* Про сталу Уітні W_3 // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика та механіка. – 2003. – Вип. 9. – С. 36–39.

Одержано 08.08.2001