УДК 517.5

Л. Н. Божуха (Днепродзерж. техн. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ДЖЕКСОНА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ СУММИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

We establish a statement on exact inequalities between deviations of functions from their linear methods (in the metric of L_2) with multipliers defined by a continuous function and majorants determined as scalar products of a squared module of continuity (of order r) in L_2 for l th derivative of the function by some weight function θ. We derive a number of corollaries of the general theorem.

Встановлено твердження про точні нерівності між відхиленнями функцій від лінійних методів (у метриці L_2) з мультиплікаторами, визначеними неперервною функцією, і мажорантами, що є скалярним добутком квадрата модуля неперервності (r-го порядку) в L_2 l-ї похідної функції і деякої вагової функції θ. Виведено кілька наслідків із загальної теореми.

Пусть L_2 — пространство измеримых 2π-периодических функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\right\}^{1/2},$$

L_2^l, $l > 0$, — множество l-х 2π-периодических интегралов от функций $f \in L_2$ таких, что $f \perp 1$.

Определим r-й модуль непрерывности $f(x)$ равенством

$$\omega_r(f, h) = \sup_{|t| \le h} \Delta_r(f, h),$$

где

$$\Delta_r(f, t) = \left\|\Delta_t^r f(\cdot)\right\|_2,$$

$$\Delta_t^1 f(x) = f\left(x + \frac{t}{2}\right) - f\left(x - \frac{t}{2}\right), \qquad \Delta_t^r f(x) = \Delta_t^1\left(\Delta_t^{r-1} f(x)\right).$$

Как обычно,

$$E_n(f)_2 = \inf_{t_{n-1} \in T_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_2$$

— наилучшее приближение функции тригонометрическими полиномами T_{n-1} порядка $\le n-1$ в метрике L_2.

Пусть

$$f(x) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k)$$

— разложение в ряд Фурье функции $f \in L_2$.

В дальнейшем будем считать, что непрерывная на $[0; 1]$ функция $\Phi(x)$ отображает отрезок $[0; 1]$ на $[0; 1]$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(1) = 1$. Каждой 2π-периодической функции поставим в соответствие полином

$$L_n(\Phi; f; x) = \frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \rho_k \cos(kx + \varphi_k),$$

где

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(\Phi) = 1 - \sqrt{\Phi\left(\frac{k}{n}\right)} \tag{1}$$

— мультипликатор метода суммирования $L_n(\Phi; f)$.

Для $\theta \in L_1[0; h]$, $\theta(y) \geq 0$, $y \in [0; h]$, определим на $(0; \infty)$ функцию $F(x) = F_{h,\theta}^{r,l}(x)$ равенством

$$F(x) = 2^r x^{2l} \int_0^h (1 - \cos xy)^r \theta(y)\, dy. \tag{2}$$

Во многих работах (см., например, [1 – 7]) исследовался вопрос о связи погрешности приближения функций в метрике L_2 различными методами суммирования функций и мажорантами, зависящими от модуля непрерывности в пространстве L_2.

В настоящей работе продолжаются эти исследования. После формулировки основной теоремы мы укажем ее связь с предыдущими результатами.

Теорема. *Пусть* $l = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < h \leq \pi$, $0 < y \leq h$, $L_n(\Phi; f)$ — *линейный метод суммирования рядов Фурье с мультипликаторами* $\Lambda_n = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{n-1}$ *вида* (1). *Пусть функция* $F(x)$ *определена равенством* (2), *выполнено условие*

$$\inf_{x \geq 1} F(x) = F(1) \tag{3}$$

и, кроме того, верно неравенство

$$\Phi(x) \leq \frac{\Phi(1) F(x)}{F(1)}, \quad x \in [0; 1]. \tag{4}$$

Тогда

$$\sup_{\substack{f \in L_2^l \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\| f - L_n(\Phi; f; \cdot) \|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2 (f^{(l)}; y/n)_2\, \theta(y)\, dy} = \frac{1}{n^{2l}} \frac{\Phi(1)}{F(1)}. \tag{5}$$

Если неравенство (4) *не выполняется хотя бы для одного* x *и* $x_0 = \arg\max \{\Phi(x)/F(x) \mid x \in [0; 1]\}$, *то при* $n \to \infty$

$$\sup_{\substack{f \in L_2^l \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\| f - L_n(\Phi; f; \cdot) \|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2 (f^{(l)}; y/n)_2\, \theta(y)\, dy} = \frac{1}{n^{2l}} \frac{\Phi(x_0)}{F(x_0)} + o\left(\frac{1}{n^{2l}}\right). \tag{6}$$

Доказательству теоремы предпошлем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть* $l = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < h < \pi$, $0 < y \leq h$, $r > 0$, $L_n(\Phi; f)$ — *линейный метод суммирования рядов Фурье с мультипликаторами* $\Lambda_n = \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{n-1}$ *вида* (1). *Тогда*

$$\frac{\Phi(1)}{F(1)} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^l \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2l} \| f - L_n(\Phi; f; \cdot) \|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2 (f^{(l)}; y/n)_2\, \theta(y)\, dy} \leq \frac{1}{\min\left\{ \inf\limits_{0 < x < 1} F(x)/\Phi(x),\ \inf\limits_{x \geq 1} F(x) \right\}}. \tag{7}$$

В случае, когда $\Phi(x) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$, метод $L_n(0; f)$ есть частичные суммы ряда Фурье $S_n(f)$. Для них утверждение леммы получено в работе А. А. Лигуна [3] и имеет вид

$$\frac{1}{2^r B_{l,r}(h,\theta,1)} \le \sup_{\substack{f\in L_2^l \\ f\ne \text{const}}} \frac{n^{2l}\|f - S_n(f;\cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2(f^{(l)}; y/n)_2\,\theta(y)\,dy} \le \frac{1}{2^r \inf\limits_{x\ge 1} B_{l,r}(h,\theta,x)}, \tag{8}$$

где

$$B_{l,r}(h,\theta,x) = x^{2l}\int_0^h (1-\cos xy)^r\,\theta(y)\,dy\,.$$

Эти неравенства обращаются в равенства, если функция $\theta(y)$, $0\le y\le h$, такая, что

$$\inf_{x\ge 1} B_{l,r}(h,\theta,x) = B_{l,r}(h,\theta,1).$$

Важные случаи, когда оценки сверху и снизу в неравенстве (8) совпадают, изучены в работах Н. И. Черных [1] и Л. В. Тайкова [2]. В нашей терминологии результаты Н. И. Черных и Л. В. Тайкова принимают соответственно вид

$$\sup_{\substack{f\in L_2^l \\ f\ne \text{const}}} \frac{n^{2l}\|f - S_n(f;\cdot)\|_2^2}{\int_0^\pi \omega_1^2(f^{(l)}; y/n)_2 \sin y\,dy} = \frac{1}{4}, \tag{9}$$

$$\sup_{\substack{f\in L_2^l \\ f\ne \text{const}}} \frac{n^{2l}\|f - S_n(f;\cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_1^2(f^{(l)}; y)_2\,dy} = \frac{1}{2}\,\frac{n}{nh-\sin nh}, \qquad 0 < h < \frac{3\pi}{4}. \tag{10}$$

Так, равенства, аналогичные (9) и (10), были получены (здесь также речь идет о суммах Фурье) и для других весов θ. Например, $\theta(y) = \chi_{[\pi-\delta_l;\pi]}(y)$, где $\chi_E(y)$ — характеристическая функция множества E и δ_l — корень уравнения $2^{2l}(x-\sin x) = x+\sin x$ (см. [3]); $\theta(y) = (1+a_l(y-\pi))\chi_{[\pi-\sigma_l;\pi+\sigma_l]}(y)$, где σ_l — корень уравнения

$$2^{2l-1}(2x-\sin 2x) = x+\sin x, \qquad a_l = \frac{1}{\pi}\left(\frac{l(\sigma_l+\sin\sigma_l)}{2^{2l-1}(\sigma_l\cos 2\sigma_l - 0{,}5\sin\sigma_l)} - 1\right)$$

(см. [4]); $\theta(y) = (1-\cos y)^\alpha$ при $0\le\alpha\le 2^{2l-0.5}$ (см. [5]); $\theta(y) = \sin^\mu(\beta y/\eta)$ при некоторых μ, β, η (см. [8]).

При доказательстве леммы будем следовать схеме рассуждений работы [3].

Доказательство леммы. Пусть $\lambda_k^{(n)}$ представлен в виде (1). Для любой функции $f\in L_2$ и неотрицательной функции $\psi(t)$, $0<t\le h/n$, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\|f - L_n(\Phi;f;\cdot)\|_2^2 = \left\|\frac{\rho_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\cos(k\cdot+\varphi_k) - \frac{\rho_0}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\rho_k\cos(k\cdot+\varphi_k)\right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\lambda_k^{(n)}\right)^2\rho_k^2 + \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1}\Phi\left(\frac{k}{n}\right)\rho_k^2 + \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\Phi\left(\frac{k}{n}\right)\rho_k^2\frac{2^r k^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos kt)^r\psi(t)\,dt}{2^r k^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos kt)^r\psi(t)\,dt} + \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\frac{2^r k^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos kt)^r\psi(t)\,dt}{2^r k^{2l}\int_0^{h/n}(1-\cos kt)^r\psi(t)\,dt}.$$

Положим

$$D_{r,l}^{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^r k^{2l} \rho_k^2 (1-\cos kt)^r,$$

$$D_{r,l}^{n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^r k^{2l} \rho_k^2 (1-\cos kt)^r,$$

$$B_{k,n,h}^{l,r}(\psi) = 2^r k^{2l} \int_0^{h/n} (1-\cos kt)^r \psi(t)\, dt,$$

$$C_{n,h}^{l,r}(\psi,\Phi) = \min\left\{ \inf_{1\le k\le n-1} \frac{B_{k,n,h}^{l,r}(\psi)}{\Phi(k/n)},\ \inf_{k\ge n} B_{k,n,h}^{l,r}(\psi) \right\}.$$

Тогда

$$\|f - L_n(\Phi; f; \cdot)\|_2^2 \le \frac{\int_0^{h/n} D_{r,l}^{n-1}(t)\psi(t)\,dt + \int_0^{h/n} D_{r,l}^{n}(t)\psi(t)\,dt}{C_{n,h}^{l,r}(\psi,\Phi)} =$$

$$= \frac{\int_0^{h/n} \left(2^r \sum_{k=1}^{\infty} k^{2l}\rho_k^2 (1-\cos kt)^r\right)\psi(t)\,dt}{C_{n,h}^{l,r}(\psi,\Phi)} =$$

$$= \frac{\int_0^{h/n} \Delta_r^2(f^{(l)}; t)_2 \psi(t)\,dt}{C_{n,h}^{l,r}(\psi,\Phi)} \le \frac{\int_0^{h/n} \omega_r^2(f^{(l)}; t)_2 \psi(t)\,dt}{C_{n,h}^{l,r}(\psi,\Phi)}.$$

Положив $\theta(t) = \psi(t/n)$, после замены $t = y/n$ получим

$$\|f - L_n(\Phi; f; \cdot)\|_2^2 \le \frac{\int_0^{h} \omega_r^2(f^{(l)}; y/n)_2 \theta(y)\,dy}{n^{2l}\, \tilde{C}_{n,h}^{l,r}(\theta,\Phi)},$$

где

$$\tilde{C}_{n,h}^{l,r}(\theta,\Phi) = \min\left\{ \inf_{1\le k\le n-1} \frac{\tilde{B}_{k,n,h}^{l,r}(\theta)}{\Phi(k/n)},\ \inf_{k\ge n} \tilde{B}_{k,n,h}^{l,r}(\theta) \right\},$$

$$\tilde{B}_{k,n,h}^{l,r}(\psi) = 2^r \left(\frac{k}{n}\right)^{2l} \int_0^h \left(1-\cos\frac{k}{n}y\right)^r \theta(y)\,dy.$$

Учитывая, что

$$\min\left\{ \inf_{1\le k\le n-1} \frac{2^r\left(\frac{k}{n}\right)^{2l} \int_0^h \left(1-\cos\frac{k}{n}y\right)^r \theta(y)\,dy}{\Phi\left(\frac{k}{n}\right)},\ \inf_{k\ge n} 2^r\left(\frac{k}{n}\right)^{2l} \int_0^h \left(1-\cos\frac{k}{n}y\right)^r \theta(y)\,dy \right\} \ge$$

$$\ge \min\left\{ \inf_{0<x<1} \frac{2^r x^{2l} \int_0^h (1-\cos xy)^r \theta(y)\,dy}{\Phi(x)},\ \inf_{x\ge 1} 2^r x^{2l} \int_0^h (1-\cos xy)^r \theta(y)\,dy \right\},$$

получаем оценку сверху

$$\|f - L_n(\Phi; f; \cdot)\|_2^2 \le \frac{\int_0^h \omega_r^2\left(f^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy}{n^{2l} \min\left\{\inf\limits_{0<x<1} \frac{F(x)}{\Phi(x)},\ \inf\limits_{k\ge 1} F(x)\right\}}. \tag{11}$$

В качестве экстремальной функции выберем функцию $f_n(t) = \cos nt$. Тогда

$$\|f_n - L_n(\Phi; f_n; \cdot)\|_2^2 = \left(1 - \lambda_n^{(n)}\right)^2 = \Phi(1)$$

и

$$\omega_r^2\left(f_n^{(l)}; y\right)_2 = 2^r n^{2l} (1 - \cos ny)^r, \qquad y \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right].$$

Поэтому

$$\int\limits_0^h \omega_r^2\left(f_n^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy = 2^r n^{2l} \int\limits_0^h (1 - \cos y)^r \theta(y)\,dy = n^{2l} F(1).$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f \in L_2^l \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{\|f - L_n(\Phi; f; \cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2\left(f^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy} \ge \frac{\|f_n - L_n(\Phi; f_n; \cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2\left(f_n^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy} = \frac{1}{n^{2l}} \frac{\Phi(1)}{F(1)},$$

что вместе с (11) и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Первое утверждение теоремы следует непосредственно из леммы и условий (3) и (4), так как в этом случае

$$\min\left\{\inf_{0<x<1} \frac{F(x)}{\Phi(x)},\ \inf_{x\ge 1} F(x)\right\} = \frac{F(1)}{\Phi(1)}.$$

Если неравенство (4) не выполняется хотя бы в одной точке и

$$x_0 = \arg\max \{\Phi(x)/F(x) \mid x \in [0; 1]\},$$

то $x_0 \in (0; 1)$ (в силу того, что для $x = 0$ и $x = 1$ неравенство (4) выполняется) и

$$\frac{\Phi(x_0)}{F(x_0)} > \frac{\Phi(1)}{F(1)}.$$

Из оценки сверху в (7) и условия (3) следует

$$\sup_{\substack{f \in L_2^l \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{\|f - L_n(\Phi; f; \cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2\left(f^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy} \le \frac{1}{n^{2l}} \max\left\{\max_{x \in (0;1)} \frac{\Phi(x)}{F(x)}, \frac{1}{F(1)}\right\} = \frac{1}{n^{2l}} \frac{\Phi(x_0)}{F(x_0)}. \tag{12}$$

Для оценки снизу рассмотрим функцию $f_{[nx_0]}(t) = \cos[nx_0]t$. Тогда, так как $x_0 \in (0; 1)$, $[nx_0] < n$. Поэтому

$$\left\|f_{[nx_0]} - L_n(\Phi; f_{[nx_0]}; \cdot)\right\|_2^2 = \left(1 - \lambda_{[nx_0]}^{(n)}\right)^2 = \Phi\left(\frac{[nx_0]}{n}\right)$$

и

$$\int\limits_0^h \omega_r^2\left(\left(f_{[nx_0]}\right)^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy = \int\limits_0^h \left(\sup_{|u| \le y} 2^r ([nx_0])^{2l} \left(1 - \cos[nx_0]\frac{u}{n}\right)^r\right)_2 \theta(y)\,dy =$$

$$= \int_0^h 2^r([nx_0])^{2l}\left(1-\cos[nx_0]\frac{y}{n}\right)^r \theta(y)\,dy.$$

Учитывая, что $[nx_0] = nx_0 - \{nx_0\}$ и $0 < \{nx_0\} < 1$, при $n \to \infty$ получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^l \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2l}\|f - L_n(\Phi; f; \cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2\left(f^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy} \geq \frac{n^{2l}\left\|f_{[nx_0]} - L_n(\Phi; f_{[nx_0]}; \cdot)\right\|_2^2}{\int_0^h \omega_r^2\left(\left(f_{[nx_0]}\right)^{(l)}; \frac{y}{n}\right)_2 \theta(y)\,dy} =$$

$$= \frac{n^{2l}\Phi\left(\frac{[nx_0]}{n}\right)}{\int_0^h 2^r([nx_0])^{2l}\left(1-\cos[nx_0]\frac{y}{n}\right)^r \theta(y)\,dy} =$$

$$= \frac{n^{2l}\Phi\left(\frac{nx_0 - \{nx_0\}}{n}\right)}{\int_0^h 2^r(nx_0 - \{nx_0\})^{2l}\left(1-\cos\frac{nx_0 - \{nx_0\}}{n}y\right)^r \theta(y)\,dy} =$$

$$= \frac{n^{2l}\Phi\left(x_0 - \frac{\{nx_0\}}{n}\right)}{2^r n^{2l}\left(x_0 - \frac{\{nx_0\}}{n}\right)^{2l}\int_0^h \left(1-\cos\left(x_0 - \frac{\{nx_0\}}{n}\right)y\right)^r \theta(y)\,dy} =$$

$$= \frac{\Phi(x_0) + o(1)}{2^r x_0^{2l}\int_0^h (1-\cos x_0 y)^r \theta(y)\,dy} = \frac{\Phi(x_0)}{F(x_0)} + o(1),$$

что вместе с оценкой сверху (12) завершает доказательство второй части теоремы.

Приведем несколько следствий из теоремы.

Если

$$\Phi(x) = \Phi_m(x) = x^{2m}, \quad m \geq 1,$$

то $L_n(\Phi; f)$ есть метод средних Зигмунда m-го порядка, который будем обозначать через $Z_{m,n}(f)$ (см., например, [9, с. 47]).

***Следствие* 1.** *Если* $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ *и* $0 < h < \pi/2$, *то*

$$\sup_{\substack{f \in L_2 \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\left\|f - Z_{m,n}(f; \cdot)\right\|_2^2}{\int_0^h \omega_1^2\left(f; \frac{y}{n}\right)_2 dy} = \frac{1}{2(h - \sin h)}. \tag{13}$$

Доказательство. Тот факт, что

$$\inf_{x \geq 1} F(x) = F(1),$$

где

$$F(x) = 2\int_0^h (1 - \cos xy)\,dy,$$

доказан в работе [3, с. 787].

Из теоремы следует, что для доказательства равенства (13) при $m = 1$ (в этом случае мы имеем дело с методом Фейера) достаточно показать, что при $h < \pi/2$ выполняется неравенство

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(1)} = x^2 \leq \frac{xh-\sin xh}{x(h-\sin h)} = \frac{F(x)}{F(1)}. \tag{14}$$

Функция $\varphi(x) = (xh-\sin xh)/(x^3(h-\sin h))$ для любого $x \in (0; 1]$ не возрастает, так как

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^4(h-\sin h)}(3\sin xh - xh(\cos xh+2)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{x^4(h-\sin h)}\left(3xh - 3\frac{x^3h^3}{3!} + 3\frac{x^5h^5}{5!} - xh\left(1-\frac{x^2h^2}{2!}+\frac{x^4h^4}{4!}-\frac{x^6h^6}{6!}+2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^4(h-\sin h)}\frac{x^5h^5}{60}\left(\frac{x^2h^2}{12}-1\right) < \frac{xh^5}{60(h-\sin h)}\left(\frac{h^2}{12}-1\right) < \frac{xh^5}{60(h-\sin h)}\left(\frac{3\pi^2}{64}-1\right) < 0.$$

Учитывая теперь, что $\varphi(1)=1$, заключаем, что для любого $x \in (0; 1]$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geq 1$, что и дает неравенство (14), а с ним и утверждение следствия 1 для $m=1$.

Тот факт, что следствие 1 верно для $m>1$, следует из теоремы, неравенств (14) и

$$x^{2m} \leq x^2, \quad x \in [0; 1].$$

Если

$$\Phi(x) = \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)^2,$$

то $L_n(\Phi; f)$ есть метод Рогозинского, который будем обозначать через $R_n(f)$ (см., например, [9, с. 47]).

Следствие 2. *Для* $n = 1, 2, 3, \ldots,$ *и* $0 < h < \pi/2$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2 \\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{\|f - R_n(f;\cdot)\|_2^2}{\int_0^h \omega_1^2(f; y/n)_2\,dy} = \frac{1}{2(h-\sin h)}. \tag{15}$$

Доказательство. В силу теоремы достаточно доказать, что

$$\left(1 - \cos\frac{x\pi}{2}\right)^2 = \frac{\Phi(x)}{\Phi(1)} \leq \frac{F(x)}{F(1)} = \frac{xh-\sin xh}{x(h-\sin h)}. \tag{16}$$

Определим возрастающую на промежутке $[0; 1]$ функцию $g(x)$ равенством

$$g(x) = \frac{x\pi^2}{8}\left(1 - \frac{x^2\pi^2}{48}\right).$$

Тогда

$$g(x) \leq g(1) < 0{,}981 < 1.$$

Следовательно, для $x \in [0; 1]$

$$\left(\frac{1-\cos(x\pi/2)}{x}\right)^2 \leq \left(\frac{x\pi^2}{8}\left(1-\frac{x^2\pi^2}{48}\right)\right)^2 = g^2(x) < 1,$$

т. е.

$$\left(1-\cos\frac{x\pi}{2}\right)^2 \le x^2.$$

Отсюда и из неравенства (14) следует (16), а с ним и утверждение следствия 2.

Прямым путем утверждения следствий 1, 2 получены в работе [7].

При $a\in(0;1)$ и

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & 0<x\le 1-a; \\ \dfrac{(x-1+a)^2}{a^2}, & 1-a\le x\le 1, \end{cases}$$

метод $L_n(\Phi; f)$ есть метод Валле Пуссена, который будем обозначать через $VP_n(f)$ (см., например, [9, с. 47]).

***Следствие* 3.** *Пусть* $n=1,2,3,\ldots$, $0<h<\pi/2$ *и* $a\in(0;1)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\text{const}}}\frac{\|f-VP_n(f;\cdot)\|_2^2}{\int_0^h\omega_1^2(f;y/n)_2\,dy} = \frac{1}{2(h-\sin h)}. \tag{17}$$

Доказательство. В силу теоремы достаточно доказать, что

$$\frac{(x-1+a)^2}{a^2} = \frac{\Phi(x)}{\Phi(1)} \le \frac{F(x)}{F(1)} = \frac{xh-\sin xh}{x(h-\sin h)}$$

при $x\in[1-a;1]$, $a\in(0;1)$. А это неравенство следует из неравенства

$$\frac{(x-1+a)^2}{a^2}\le x^2, \quad x\in[1-a;1], \quad x\in(0;1),$$

и неравенства (14).

Если

$$\Phi(x) = x^2,$$

то $L_n(\Phi; f)$ есть метод Фейера, который будем обозначать через $F_n(f)$ (см., например, [9, с. 46]).

***Следствие* 4.** *Пусть* $n=1,2,3,\ldots$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\text{const}}}\frac{\|f-F_n(f;\cdot)\|_2^2}{\int_0^\pi\omega_1^2(f;y/n)_2\sin y\,dy} = \frac{1}{4}. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $\theta(y)=\sin y$, $h=\pi$. Тогда

$$F(x) = \frac{2(2x^2-1+\cos\pi x)}{x^2-1}$$

и

$$F(1+0) = 4.$$

Для проверки условий (3) и (4) теоремы достаточно доказать, что

$$x^2 = \frac{\Phi(x)}{\Phi(1)} \le \frac{F(x)}{F(1)} = \frac{2x^2-1+\cos\pi x}{2(x^2-1)}, \quad x\in[0;1), \tag{19}$$

и

$$\frac{F(x)}{F(1)} = \frac{2x^2 - 1 + \cos \pi x}{2(x^2 - 1)} \geq 1, \qquad x \geq 1,$$

а это непосредственно следует из неравенства $\cos\pi x \geq -1$.

Доказательство неравенства

$$\inf_{x \geq 1} F(x) = F(1),$$

где

$$F(x) = 2\int_0^{\pi}(1 - \cos xy)\sin y\,dy,$$

приведено в работе [3, с. 788].

Используя теорему, завершаем доказательство следствия 4.

Аналогично проверяется тот факт, что равенства, аналогичные (18), справедливы для сумм Рогозинского, средних Зигмунда m-го порядка, Валле Пуссена. Этот факт следует из неравенства (19) и того, что для этих методов при $x \in [0; 1]$ выполняется неравенство $\Phi(x) \leq x^2$.

Выражаю благодарность профессору А. А. Лигуну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
2. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2 // Там же. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
3. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшим приближением и модулем непрерывности в пространстве L_2 // Там же. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.
4. *Божуха Л. Н.* Поперечник одного класса функций в пространстве L_2 // Сб. научн. тр. Днепропетров. техн. ун-та. – 2000. – **2**. – С. 366 – 369.
5. *Божуха Л. Н.* Точные оценки приближения функций из L_2 линейными методами суммирования Вороного и Рисса // Мат. моделирование. – 2000. – № 1(4). – С. 13 – 16.
6. *Божуха Л. Н.* Неравенства типа Джексона при приближении периодических функций полиномами Фейера, Рогозинского и Коровкина // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1596 – 1602.
7. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0; 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816 – 820.
8. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – 260 с.
9. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

Получено 22.08.2001,
после доработки — 23.04.2002