УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА, УЧИТЫВАЮЩИХ ЧИСЛО ПЕРЕМЕН ЗНАКА ПРОИЗВОДНЫХ

For 2π-periodic functions $x \in L_\infty^r$ and arbitrary $q \in [1, \infty]$, $p \in (0, \infty]$, we obtain a new exact Kolmogorov-type inequality

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \left(\frac{\nu(x^{(k)})}{2} \right)^{1/q} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{||| \varphi_r |||_p^\alpha} ||| x |||_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad k, r \in \mathbf{N}, \quad k < r,$$

with consideration of the number of sign alternations of derivatives $\nu(x^{(k)})$ on the period. Here, $\alpha = (r-k+1/q)/(r+1/p)$, φ_r is the Euler perfect spline of order r, $||| x |||_p := \sup_{a,b \in \mathbf{R}} \{ E_0(x)_{L_p[a,b]} : x'(t) \ne 0 \ \forall t \in (a, b) \}$, $E_0(x)_{L_p[a,b]} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \| x - c \|_{L_p[a,b]}$, $\| x \|_{L_p[a,b]} := \left\{ \int_a^b |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}$ if $0 < p < \infty$, and $\| x \|_{L_\infty[a,b]} := \sup \operatorname{vrai}_{t \in [a,b]} |x(t)|$. This inequality is transformed into an equality for functions $x(t) = a \varphi_r(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. We also obtain an analog of the considered inequality for the case where $k = 0$, $q = \infty$. We prove new exact Bernstein-type inequalities for trigonometric polynomials and splines.

Одержано нову точну нерівність типу Колмогорова

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \left(\frac{\nu(x^{(k)})}{2} \right)^{1/q} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{||| \varphi_r |||_p^\alpha} ||| x |||_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad k, r \in \mathbf{N}, \quad k < r,$$

у якій враховано число змін знаку похідних $\nu(x^{(k)})$ на періоді, для 2π-періодичних функцій $x \in L_\infty^r$ і для довільних $q \in [1, \infty]$, $p \in (0, \infty]$, де $\alpha = (r-k+1/q)/(r+1/p)$, φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку r, $||| x |||_p := \sup_{a,b \in \mathbf{R}} \{ E_0(x)_{L_p[a,b]} : x'(t) \ne 0 \ \forall t \in (a, b) \}$, $E_0(x)_{L_p[a,b]} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \| x - c \|_{L_p[a,b]}$, $\| x \|_{L_p[a,b]} := \left\{ \int_a^b |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}$, якщо $0 < p < \infty$, і $\| x \|_{L_\infty[a,b]} := \sup \operatorname{vrai}_{t \in [a,b]} |x(t)|$. Ця нерівність перетворюється в рівність для функцій вигляду $x(t) = a \varphi_r(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Одержано також аналог даної нерівності у випадку $k = 0$, $q = \infty$ і доведено нові точні нерівності типу Бернштейна для тригонометричних поліномів та сплайнів.

1. Введение. Символом G будем обозначать вещественную ось $\mathbf{R}$, единичную окружность $\mathbf{T}$, реализованную в виде промежутка $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами, или отрезок $[a, b]$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x: G \to \mathbf{R}$ таких, что $\| x \|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p(G)} := \left\{ \int_G |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}, \text{ если } 0 < p < \infty, \quad \text{и } \| x \|_{L_\infty(G)} := \sup_{t \in G} \operatorname{vrai} |x(t)|.$$

Для $x \in L_p(G)$ положим $E_0(x)_{L_p(G)} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \| x - c \|_{L_p(G)}$. Для краткости вместо $\| \cdot \|_{L_p(\mathbf{T})}$ будем писать $\| \cdot \|_p$, вместо $E_0(\cdot)_{L_p(\mathbf{T})}$ — $E_0(\cdot)_p$, а вместо $L_p(T)$ — L_p.

Для дифференцируемой на всей прямой функции $x \in L_p(\mathbf{R})$ (или $x \in L_p$) положим

$$|||x|||_p := \sup\left\{E_0(x)_{L_p[a,b]} : x'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (a,b), \ a, b \in \mathbf{R}\right\}. \tag{1.1}$$

Отметим, что величины типа (1.1) рассматривались ранее (см., например, [1]).

Для $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$ через $L_p^r(G)$ обозначим пространство функций $x \in L_p(G)$ таких, что $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} := x)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_p(G)$. Пусть, далее, $W_\infty^r(G) := \left\{x \in L_\infty^r(G) : \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(G)} \le 1\right\}$. Символом $\varphi_r(t)$, $t \in \mathbf{R}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ со средним значением на периоде, равным нулю.

Для непрерывной 2π-периодической функции x символом $\nu(x)$ будем обозначать число перемен знака x на периоде.

Во многих экстремальных задачах анализа важное значение имеют неравенства типа Колмогорова

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le C\|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha} \tag{1.2}$$

для 2π-периодических функций $x \in L_s^r$, где $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q, p, s \in [1, \infty]$, $\alpha \in (0, 1)$.

В силу результата Б. Е. Клоца [2] максимально возможный показатель α, при котором неравенство (1.2) справедливо на всем классе L_s^r с константой C, не зависящей от $x \in L_s^r$, определяется соотношением $\alpha = \alpha_{kr}$, где

$$\alpha_{kr} := \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \ \frac{r - k - s^{-1} + q^{-1}}{r - s^{-1} + p^{-1}}\right\}. \tag{1.3}$$

Тем не менее, как показал А. А. Лигун [3], если в неравенстве (1.2) учесть число перемен знака производной $\nu(x')$, то возможны неравенства типа Колмогорова с показателем $\alpha > \alpha_{kr}$. В силу результата А. А. Лигуна для $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p \in [1, \infty]$ и $x \in L_1^r$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\|g_{r-k}\|_1}{\|g_r\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_1^{1-\alpha}, \tag{1.4}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k}{r-1+1/p}$, $g_r := 1/4\,\varphi_{r-1}$.

Ряд неравенств вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le M \prod_{i=1}^m \nu(x^{(i)})^{\alpha_i} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \tag{1.5}$$

в случаях: 1) $q = 1$ или $q = 2$, $p \in [1, \infty]$; 2) $p \in [1, \infty]$, $q \in \{3, 4, 6\}$, $k = r - 1$; 3) $p \in [1, \infty]$, $q \in \{3, 3/2\}$, $k = r - 2$ анонсирован в [4].

В данной работе изучается модификация неравенства типа (1.5), в котором норма $\|x\|_p$ заменена меньшей величиной $|||x|||_p$. В частности, получено точное неравенство (теорема 3)

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \left(\frac{\nu(x^{(k)})}{2}\right)^{1/q} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{|||\varphi_r|||_p^\alpha} |||x|||_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad k, r \in \mathbf{N}, \quad k < r, \tag{1.6}$$

для функций $x \in L_\infty^r$ и произвольных $q \in [1, \infty]$, $p \in (0, \infty]$, где $\alpha = (r - k + 1/q)/(r + 1/p)$. Неравенство (1.6) обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_r(nt + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Отметим, что в (1.6) $\alpha \ge \alpha_{kr}$ (α_{kr} определено в (1.3)), причем $\alpha > \alpha_{kr}$ в случае $(r-k)q < rp$. В этом случае $\alpha = \max\{1-k/r;\ (r-k-1/s+1/q)/(r-1/s+1/p)\}$ (здесь $s=\infty$), как и в неравенстве (1.4) (при $s=1$). Отметим также, что $1/q$ — минимально возможный показатель степени γ, в которую нужно возвести $\nu(x^{(k)})/2$ так, чтобы неравенство (1.6) с константой, не зависящей от x, выполнялось для любой функции $x \in L^r_\infty$. Действительно, если бы было $\gamma < 1/q$, то при достаточно больших $n \in \mathbf{N}$ неравенство (1.6) с $\left(\nu(x^{(k)})/2\right)^\gamma$ вместо $\left(\nu(x^{(k)})/2\right)^{1/q}$ для $x(nt)$, $x \neq \mathrm{const}$, было бы неверным.

С помощью неравенства (1.6) доказано новое неравенство типа Бернштейна для тригонометрических полиномов τ порядка не выше n (теорема 4)

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_q \le n^{k+1/p}\frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{|||\cos(\cdot)|||_p}|||\tau|||_p, \qquad n,\ k \in \mathbf{N}, \tag{1.7}$$

для произвольных $p \in (0,\infty]$, $q \in [1,\infty]$.

Неравенство (1.7) точное на пространстве всех тригонометрических полиномов порядка не выше n и обращается в равенство для полиномов вида $\tau(t) = a\cos(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Аналогичное неравенство получено для полиномиальных сплайнов (теорема 5).

В п. 2 приведены модификации неравенства и теоремы сравнения Колмогорова (теоремы 1, 2), которые используются в дальнейшем.

2. Усиление неравенства и теоремы сравнения Колмогорова. Для $r \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t + a_r)$, где константа a_r выбрана таким образом, чтобы сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ возрастал на промежутке $[-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$.

Доказательство неравенства Колмогорова [5], как известно, опирается на теорему сравнения Колмогорова [5]. Нам потребуется некоторая модификация этой теоремы. Рассмотрим сначала следующую модификацию неравенства Колмогорова.

Теорема 1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ справедливо неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}|||x|||_\infty^{1-k/r}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{k/r}, \tag{2.1}$$

где величина $|||x|||_\infty$ определена равенством (1.1). *Неравенство* (2.1) *обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_{\lambda,r}(t+b)$, $\lambda, a, b \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$. Ввиду однородности неравенства (2.1) можно считать, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = 1. \tag{2.2}$$

Тогда $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$|||x|||_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty. \tag{2.3}$$

Покажем, что из условия (2.3) вытекает неравенство

$$\left\|x'\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \left\|\varphi_{\lambda,r-1}\right\|_\infty. \tag{2.4}$$

Предположим противное, т. е.

$$\left\| x' \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} > \left\| \varphi_{\lambda,r-1} \right\|_\infty. \tag{2.5}$$

Тогда, принимая во внимание очевидное равенство $\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty = \lambda^{-r} \| \varphi_r \|_\infty$, заключаем, что существует число $\gamma \in (0, \lambda)$ такое, что

$$\left\| x' \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \left\| \varphi_{\gamma,r-1} \right\|_\infty. \tag{2.6}$$

Кроме того, из условия (2.3) и неравенства $\gamma < \lambda$ следует

$$\| x \|_\infty < \left\| \varphi_{\gamma,r} \right\|_\infty. \tag{2.7}$$

Выберем точку $t_0 \in \mathbf{R}$ так, чтобы $\left\| x' \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \left| x'(t_0) \right|$. Переходя, если нужно, к функции $-x$, можем считать, что $x'(t_0) > 0$. Таким образом,

$$\left\| x' \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = x'(t_0). \tag{2.8}$$

Выберем далее число $a \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$\left\| \varphi_{\gamma,r-1} \right\|_\infty = \varphi'_{\gamma,r}(t_0 + a). \tag{2.9}$$

Обозначим через t_1 и t_2 ближайшие слева и справа от точки t_0 нули функции $\varphi'_{\gamma,r}(\cdot + a)$. Учитывая (2.6), (2.8), (2.9) и применяя теорему сравнения Колмогорова к функции x', получаем $x'(t) \ge \varphi'_{\gamma,r}(t + a)$, $t \in (t_1, t_2)$. Отсюда следует, что $x'(t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$, и

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt \ge \int_{t_1}^{t_2} \varphi'_{\gamma,r}(t + a)\,dt =$$

$$= \varphi_{\gamma,r}(t_2 + a) - \varphi_{\gamma,r}(t_1 + a) = 2 \left\| \varphi_{\gamma,r} \right\|_\infty.$$

Таким образом,

$$\| x \|_\infty \ge \frac{1}{2} \left| x(t_2) - x(t_1) \right| \ge \left\| \varphi_{\gamma,r} \right\|_\infty,$$

что противоречит неравенству (2.7). Тем самым (2.4) доказано.

Из (2.4) в силу теоремы сравнения Колмогорова следует неравенство

$$\left\| x^{(j)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \left\| \varphi_{\lambda,r-j} \right\|_\infty, \quad j = 2, \ldots, r-1. \tag{2.10}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.10) получаем

$$\frac{\left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\| x \|_\infty^{1-k/r}} \le \frac{\left\| \varphi_{\lambda,r-k} \right\|_\infty}{\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty^{1-k/r}} = \frac{\lambda^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\left(\lambda^{-r} \| \varphi_r \|_\infty \right)^{1-k/r}} = \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}}. \tag{2.11}$$

Из (2.11) и (2.2) следует (2.1). Теорема 1 доказана.

Нам потребуется некоторая модификация теоремы сравнения Колмогорова. Докажем, прежде всего, следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$, $x \in W_\infty^r(\mathbf{R})$ *и число* λ *удовлетворяет условию*

$$\left\| x' \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \left\| \varphi_{\lambda,r-1} \right\|_\infty. \tag{2.12}$$

Пусть, далее, $[a, b]$ — *промежуток монотонности функции* x *такой, что* $x'(t) \neq 0 \ \forall t \in (a, b)$, $x'(a) = x'(b) = 0$.

Если t — *произвольная точка отрезка* $[a, b]$, *для которой существует точка* $y \in [0, \pi/2\lambda]$ *такая, что*

$$\left|x(b) - x(t)\right| = \left|\varphi_{\lambda,r}(\pi/2\lambda) - \varphi_{\lambda,r}(y)\right|, \tag{2.13}$$

или же точка $y \in [-\pi/2\lambda, 0]$ *такая, что*

$$\left|x(t) - x(a)\right| = \left|\varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}(-\pi/2\lambda)\right|, \tag{2.14}$$

то

$$\left|x'(t)\right| \leq \left|\varphi'_{\lambda,r}(y)\right|. \tag{2.15}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что функция x возрастает на отрезке $[a, b]$. Докажем (2.15) в предположении (2.13).

Предположим, что неравенство (2.15) не выполняется, т. е.

$$\left|x'(t)\right| > \left|\varphi'_{\lambda,r}(y)\right|.$$

Тогда $t < b$ и, следовательно, $y < \pi/2\lambda$. Используя условие (2.12) и применяя теорему сравнения Колмогорова к производной x', получаем

$$x'(t+u) > \varphi'_{\lambda,r}(y+u), \qquad u \in (0, \pi/2\lambda - y),$$

при этом $b - t \geq \pi/2\lambda - y$. Но тогда

$$x(b) - x(t) = \int_t^b x'(u)\,du = \int_0^{b-t} x'(t+u)\,du > \int_0^{\pi/2\lambda-y} \varphi'_{\lambda,r}(y+u)\,du =$$

$$= \int_y^{\pi/2\lambda} \varphi'_{\lambda,r}(u)\,du = \varphi_{\lambda,r}(\pi/2\lambda) - \varphi_{\lambda,r}(y),$$

что противоречит условию (2.13).

Аналогично доказывается неравенство (2.15) в предположении (2.14). Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r > 1$, $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$ *и число* λ *выбрано из условия*

$$|||x|||_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty, \tag{2.16}$$

где величина $|||x|||_\infty$ *определена равенством* (1.1). *Пусть, далее,* $[a, b]$ — *промежуток монотонности функции* x *такой, что* $x'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (a, b)$, $x'(a) = x'(b) = 0$.

Тогда если для точки $t \in [a, b]$ *точка* $y \in [-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$ *выбрана так, что*

$$\left|x(b) - x(t)\right| = \left|\varphi_{\lambda,r}(\pi/2\lambda) - \varphi_{\lambda,r}(y)\right|, \tag{2.17}$$

или же так, что

$$\left|x(t) - x(a)\right| = \left|\varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}(-\pi/2\lambda)\right|, \tag{2.18}$$

то

$$\left|x'(t)\right| \leq \left|\varphi'_{\lambda,r}(y)\right|. \tag{2.19}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что ввиду (2.16) $E_0(x)_{L_\infty[a,b]} \le \le \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty$. Поэтому для произвольной точки $t \in [a, b]$ существуют точка $y = y_1 \in [-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$, удовлетворяющая равенству (2.17), и точка $y = y_2 \in [-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$, удовлетворяющая равенству (2.18).

В силу теоремы 1 из условия (2.16) вытекает неравенство

$$\left\|x'\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \left\|\varphi_{\lambda,r-1}\right\|_\infty, \tag{2.20}$$

т. е. выполнено условие (2.12).

Докажем (2.19) в предположении (2.17). Будем, по-прежнему, считать, не ограничивая общности, что функция x возрастает на промежутке $[a, b]$.

Если точка y, выбранная из условия (2.17), такова, что $y \in [0, \pi/2\lambda]$, то, применяя лемму 1, получаем (2.19).

Пусть теперь $y \in [-\pi/2\lambda, 0]$. Из (2.16) и (2.17) следует

$$x(t) - x(a) \le \varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}(-\pi/2\lambda).$$

Поэтому существует точка $y_1 \in [-\pi/2\lambda, 0]$, $y_1 \le y$, такая, что

$$x(t) - x(a) = \varphi_{\lambda,r}(y_1) - \varphi_{\lambda,r}(-\pi/2\lambda).$$

Принимая во внимание неравенство (2.20) и применяя лемму 1, имеем

$$\left|x'(t)\right| \le \left|\varphi'_{\lambda,r}(y_1)\right| \le \left|\varphi'_{\lambda,r}(y)\right|.$$

Тем самым (2.19) в предположении (2.17) доказано.

Аналогично доказывается (2.19) в предположении (2.18). Теорема доказана.

3. Некоторые новые неравенства типа Колмогорова.

Теорема 3. *Пусть* $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \in [1, \infty]$, $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty$ *выполняются неравенства*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \left(\frac{\nu(x^{(k)})}{2}\right)^{1/q} \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_q}{\left|\left|\left|\varphi_r\right|\right|\right|_p^{\frac{r-k+1/q}{r+1/p}}} \left|\left|\left|x\right|\right|\right|_p^{\frac{r-k+1/q}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p-1/q}{r+1/p}} \tag{3.1}$$

и

$$\left|\left|\left|x\right|\right|\right|_\infty \le \frac{\left\|\varphi_r\right\|_\infty}{\left|\left|\left|\varphi_r\right|\right|\right|_p^{\frac{r}{r+1/p}}} \left|\left|\left|x\right|\right|\right|_p^{\frac{r}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}, \tag{3.2}$$

где величина $|||\cdot|||_p$ *определена равенством* (1.1).

Неравенства (3.1) *и* (3.2) *являются точными и обращаются в равенства для функций вида* $x(t) = a\,\varphi_r(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Ввиду однородности неравенств (3.1) и (3.2) можно считать, что

$$\left\|x^{(r)}\right\|_\infty = 1. \tag{3.3}$$

Выберем λ из условия

$$\left|\left|\left|x\right|\right|\right|_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty. \tag{3.4}$$

Докажем, что

$$\|\|x\|\|_p \ \geq \ \frac{1}{2^{1/p}} E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p[0,2\pi/\lambda]}. \tag{3.5}$$

Пусть $[a, b]$ — промежуток строгой монотонности функции x такой, что

$$\|\|x\|\|_\infty \ = \ E_0(x)_{L_\infty[a,b]} \tag{3.6}$$

(ввиду периодичности функции x такой промежуток, очевидно, существует), и пусть для определенности x возрастает на $[a, b]$. Через $c_p = c_p(x)$ обозначим константу наилучшего L_p-приближения сужения функции x на отрезок $[a, b]$, т. е. такую константу, что $E_0(x)_{L_p[a,b]} = \left\|x(t) - c_p(x)\right\|_{L_p[a,b]}$. Ясно, что $x(t) - - c_p(x)$ имеет нуль на $[a, b]$. Обозначим этот нуль буквой z. Таким образом,

$$x(z) \ = \ c_p. \tag{3.7}$$

Выберем точку $u \in [-\pi/2\lambda, \pi/2\lambda]$ так, чтобы

$$\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) - \varphi_{\lambda,r}(u) \ = \ x(b) - x(z). \tag{3.8}$$

Тогда в силу (3.4) и (3.6)

$$\varphi_{\lambda,r}(u) - \varphi_{\lambda,r}\left(-\frac{\pi}{2\lambda}\right) \ = \ x(z) - x(a). \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что для любого $t \in [z, b]$ (или $t \in [a, z]$) существует точка $y \in [u, \pi/2\lambda]$ (или $y \in [-\pi/2\lambda, u]$) такая, что

$$\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) - \varphi_{\lambda,r}(y) \ = \ x(b) - x(t) \tag{3.10}$$

или

$$\varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}\left(-\frac{\pi}{2\lambda}\right) \ = \ x(t) - x(a). \tag{3.11}$$

В силу теоремы 2 для любой такой пары точек (t, y) выполняется неравенство

$$\left|x'(t)\right| \ \leq \ \left|\varphi'_{\lambda,r}(y)\right|, \tag{3.12}$$

при этом, очевидно,

$$b - z \geq \frac{\pi}{2\lambda} - u, \qquad z - a \ \geq \ u + \frac{\pi}{2\lambda}. \tag{3.13}$$

Из (3.8) – (3.12) вытекают неравенства

$$x(b-s) - x(z) \ \geq \ \varphi_{\lambda,r}\left(\frac{\pi}{2\lambda} - s\right) - \varphi_{\lambda,r}(u) \ \geq \ 0, \qquad s \ \in \ \left[0, \frac{\pi}{2\lambda} - u\right], \tag{3.14}$$

и

$$x(a+s) - x(z) \ \leq \ \varphi_{\lambda,r}\left(-\frac{\pi}{2\lambda} + s\right) - \varphi_{\lambda,r}(u) \ \leq \ 0, \qquad s \ \in \ \left[0, \frac{\pi}{2\lambda} + u\right]. \tag{3.15}$$

Из (3.7) и (3.13) – (3.15) имеем

$$\|\|x\|\|_p^p \ \geq \ \left\|x - c_p\right\|_{p[a,b]}^p \ = \ \|x - x(z)\|_{p[a,b]}^p \ = \ \int_z^b |x(s) - x(z)|^p\, ds \ +$$

$$+ \int_a^z |x(z) - x(s)|^p\, ds \ = \ \int_0^{b-z} |x(b-s) - x(z)|^p\, ds + \int_0^{z-a} |x(z) - x(a+s)|^p\, ds \ \geq$$

$$\geq \int_{0}^{\pi/2\lambda-u}\left|\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{\pi}{2\lambda}-s\right)-\varphi_{\lambda,r}(u)\right|^{p}ds+\int_{0}^{\pi/2\lambda+u}\left|\varphi_{\lambda,r}\left(-\frac{\pi}{2\lambda}+s\right)-\varphi_{\lambda,r}(u)\right|^{p}ds=$$

$$=\int_{u}^{\pi/2\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r}(s)-\varphi_{\lambda,r}(u)\right|^{p}ds+\int_{-\pi/2\lambda}^{u}\left|\varphi_{\lambda,r}(s)-\varphi_{\lambda,r}(u)\right|^{p}ds=$$

$$=\int_{-\pi/2\lambda}^{\pi/2\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r}(s)-\varphi_{\lambda,r}(u)\right|^{p}ds=\frac{1}{2}\int_{-\pi/\lambda}^{\pi/\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r}(s)-\varphi_{\lambda,r}(u)\right|^{p}ds\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}E_0(\varphi_{\lambda,r})^p_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

Тем самым неравенство (3.5) доказано.

Докажем теперь неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q\leq\left(\frac{\nu(x^{(k)})}{2}\right)^{1/q}\left\|\varphi_{\lambda,r-k}\right\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]}. \tag{3.16}$$

В случае $q=\infty$ (3.16) вытекает из (3.4), (3.3) и теоремы 1. Пусть теперь $q<\infty$. Ясно, что период $[a_1,a_1+2\pi]$ функции $x^{(k)}$ можно представить в виде $\bigcup_{i=1}^{\nu}[a_i,a_{i+1}]$, где $[a_i,a_{i+1}]$ — промежутки знакопостоянства функции $x^{(k)}$; $x^{(k)}(a_i)=x^{(k)}(a_{i+1})=0$, $\nu=\nu(x^{(k)})$. Для доказательства (3.16) достаточно доказать неравенства

$$\left\|x^{(k)}\right\|^q_{L_q[a_i,a_{i+1}]}\leq\frac{1}{2}\left\|\varphi_{\lambda,r-k}\right\|^q_{L_q[0,2\pi/\lambda]},\quad i=1,\ldots,\nu. \tag{3.17}$$

Зафиксируем i, $i=1,\ldots,\nu$. Через $r(|x^{(k)}|,t)$ обозначим перестановку сужения $x^{(k)}$ на $[a_i,a_{i+1}]$, а через $r(\varphi_{\lambda,r-k},t)$ — перестановку сужения $\varphi_{\lambda,r-k}$ на $[0,\pi/\lambda]$. (Заметим, что согласно определению (см. п. 2) для любого $m\in\mathbf{N}$ $\varphi_{\lambda,m}(t)>0$ на $(0,\pi/\lambda)$, причем $\varphi_{\lambda,m}(0)=\varphi_{\lambda,m}(\pi/\lambda)=0$.) Доказываемое неравенство (3.17), как известно из свойств перестановок (см., например, [6], §1.3), равносильно неравенству

$$\int_0^{a_{i+1}-a_i}r^q\left(\left|x^{(k)}\right|,t\right)dt\leq\int_0^{\pi/\lambda}r^q\left(\left|\varphi_{\lambda,r-k}\right|,t\right)dt. \tag{3.18}$$

Для доказательства (3.18), прежде всего, заметим, что из (3.4) в силу теоремы 1 следует неравенство

$$\left\|x^{(j)}\right\|_\infty\leq\left\|\varphi_{\lambda,r-j}\right\|_\infty,\quad j=1,\ldots,r-1. \tag{3.19}$$

Поэтому

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left|x^{(k)}(t)\right|dt=\bigvee_{a_i}^{a_{i+1}}x^{(k-1)}\leq 2\left\|x^{(k-1)}\right\|_\infty\leq 2\left\|\varphi_{\lambda,r-k+1}\right\|_\infty=$$

$$=\bigvee_{-\pi/2\lambda}^{\pi/2\lambda}\varphi_{\lambda,r-k+1}=\int_0^{\pi/\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r-k}(t)\right|dt.$$

Полученное неравенство

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| x^{(k)}(t) \right| dt \;\le\; \int_{0}^{\pi/\lambda} \left| \varphi_{\lambda,r-k}(t) \right| dt \tag{3.20}$$

равносильно (3.18) при $q = 1$.

Пусть теперь $q > 1$. Из (3.19) при $j = k$ следует, что для любого $h \in \in \left[0, \left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty[a_i, a_{i+1}]}\right]$ существуют точки $t \in [a_i, a_{i+1}]$ и $y \in [0, \pi/\lambda]$ такие, что

$$\left| x^{(k)}(t) \right| = \varphi_{\lambda,r-k}(y) = h. \tag{3.21}$$

Из (3.19) следует, что к функциям $x^{(k)}$ и $\varphi_{\lambda,r-k}$ применима теорема сравнения Колмогорова. В силу этой теоремы для любых пар точек, удовлетворяющих (3.21), имеет место неравенство

$$\left| x^{(k+1)}(t) \right| \le \left| \varphi'_{\lambda,r-k}(y) \right|. \tag{3.22}$$

При этом из условия $x^{(k)}(a_i) = x^{(k)}(a_{i+1}) = \varphi_{\lambda,r-k}(0) = \varphi_{\lambda,r-k}(\pi/\lambda) = 0$ следует, что для любого фиксированного $h \in \left[0, \left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty[a_i, a_{i+1}]}\right]$ число точек $t \in \in [a_i, a_{i+1}]$, удовлетворяющих (3.21), не меньше числа точек $y \in (0, \pi/\lambda)$, удовлетворяющих (3.21) (их две). Поэтому из теоремы о производной перестановки (см., например, [6], предложение 1.3.2) вытекает, что если точки $\theta_1 \in \in [0, a_{i+1} - a_i]$ и $\theta_2 \in [0, \pi/\lambda]$ выбраны так, что

$$r\left(\left| x^{(k)} \right|, \theta_1\right) = r\left(\left| \varphi_{\lambda,r-k} \right|, \theta_2\right),$$

то

$$\left| r'\left(\left| x^{(k)} \right|, \theta_1\right) \right| \le \left| r'\left(\left| \varphi_{\lambda,r-k} \right|, \theta_2\right) \right|. \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует, что разность

$$\Delta(u) := r\left(\left| x^{(k)} \right|, u\right) - r\left(\left| \varphi_{\lambda,r-k} \right|, u\right), \quad u \in [0, \infty),$$

меняет знак не более одного раза. При этом в силу (3.19) $r\left(\left| x^{(k)} \right|, 0\right) - - r\left(\left| \varphi_{\lambda,r-k} \right|, 0\right) \le 0$. Таким образом, разность $\Delta(u)$ меняет знак с $-$ на $+$ не более одного раза. Отсюда в силу (3.20) вытекает соотношение

$$\int_0^{\xi} r\left(\left| x^{(k)} \right|, t\right) dt \le \int_0^{\xi} r\left(\left| \varphi_{\lambda,r-k} \right|, t\right) dt \qquad \forall\, \xi > 0.$$

Из последнего неравенства, как известно (см., например, [6], предложение 1.3.10), следует (3.18) для любого $q \ge 1$. Тем самым неравенства (3.17) и (3.16) доказаны.

Докажем (3.1). Положим $\alpha = \dfrac{r - k + 1/q}{r + 1/p}$. Учитывая очевидные равенства

$$\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p} \left\| \varphi_r \right\|_p, \qquad E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p} E_0(\varphi_r)_p,$$

$$\left|\left\| \varphi_r \right\|\right|_p = 2^{-1/p} E_0(\varphi_r)_p,$$

и применяя (3.16) и (3.5), получаем

Неравенство (3.26) является модификацией неравенства

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} E_0(x)_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}},$$

полученного в работе [9].

Неравенство (3.27) является вариантом неравенства А. А. Лигуна [10]

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{\frac{r-k}{r}}} \|x\|_\infty^{\frac{r-k}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r},$$

в котором учитывается число перемен знака производной $\nu(x^{(k)})$ на периоде, а норма $\|x\|_\infty$ заменена меньшей величиной $|||x|||_\infty$.

4. Неравенства типа Бернштейна для тригонометрических полиномов и сплайнов. Обозначим через $\mathcal{T}_n$ пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Теорема 4. *Пусть* $k, n \in \mathbf{N}$, $q \in [1, \infty]$, $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $\tau \in \mathcal{T}_n$ *выполняется неравенство*

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_q \le n^{k+1/p} \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{|||\cos(\cdot)|||_p} |||\tau|||_p, \tag{4.1}$$

где величина $|||\cdot|||_p$ *определена равенством* (1.1).

Неравенство (4.1) *точное на пространстве* $\mathcal{T}_n$ *и обращается в равенство для полиномов вида* $\tau(t) = a\cos(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Выберем $r \in \mathbf{N}$, $r > k$. Применяя теорему 3 и учитывая очевидное неравенство $\nu(\tau^{(k)}) \le 2n$, получаем

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_q \le n^{1/q} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{|||\varphi_r|||_p^\alpha} |||\tau|||_p^\alpha \left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{4.2}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$. Оценивая $\left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty$ с помощью неравенства Бернштейна (см., например, [11, с. 20]) $\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \le n^r \|\tau\|_\infty$, из (4.2) имеем

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_q \le n^{1/q} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{|||\varphi_r|||_p^\alpha} |||\tau|||_p^\alpha \left(n^r \|\tau\|_\infty\right)^{1-\alpha}. \tag{4.3}$$

Устремим в этом неравенстве $r \to \infty$. Заметим, что при этом

$$r(1-\alpha) = r\left(1 - \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right) = \frac{r}{r+1/p}\left(k + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \to k + \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

$$\|\varphi_r\|_p \to \frac{4}{\pi}\|\cos(\cdot)\|_p, \qquad |||\varphi_r|||_p \to \frac{4}{\pi}|||\cos(\cdot)|||_p.$$

Учтем также соотношения

$$|||\cos(\cdot)|||_p = 2^{-1/p} E_0(\cos(\cdot))_p, \qquad E_0(\cos(\cdot))_p = \|\cos(\cdot)\|_p$$

(при $p \geq 1$ последнее равенство очевидно, при $p < 1$ см. [12]). Тогда из (4.3) получим (4.1).

Точность (4.1) проверяется непосредственной подстановкой. Теорема 4 доказана.

Отметим наиболее важные частные случаи неравенства (4.1).

Следствие 2. *В условиях теоремы* 4 *выполняются неравенства*

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{n^{k+1/p}}{\left|\left|\left|\cos(\cdot)\right|\right|\right|_p} |||\tau|||_p \tag{4.4}$$

и

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_q \leq n^k \left\|\cos(\cdot)\right\|_q |||\tau|||_\infty. \tag{4.5}$$

Неравенство (4.4) является модификацией неравенства

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{n^{k+1/p}}{\left\|\cos(\cdot)\right\|_p} \left\|\tau\right\|_p,$$

полученного в работе [9].

Неравенство (4.5) является усилением неравенства Л. В. Тайкова [13].

Замечание 5. Используя (3.25) вместо (3.1), можно получить следующее усиление неравенства (4.5):

$$\left\|\tau_\pm^{(k)}\right\|_q \leq \frac{n^k}{2^{1/q}} \left\|\cos(\cdot)\right\|_q |||\tau|||_\infty.$$

Через $S_{n,r}$, $n, r \in \mathbf{N}$, обозначим множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $k\pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$. Очевидно, $\varphi_{n,r} \in S_{n,r}$.

Ниже приведен аналог (4.1) для сплайнов $s \in S_{n,r}$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$, $p \in (0, \infty]$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \leq \frac{n^{r+1/p}}{|||\varphi_r|||_p} |||s|||_p, \tag{4.6}$$

где величина $|||\cdot|||_p$ *определена равенством* (1.1).

Доказательство. Докажем вначале (4.6) при $p = \infty$. Принимая во внимание очевидные равенства

$$\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty = \lambda^{-r}\left\|\varphi_r\right\|_\infty, \qquad |||\varphi_r|||_\infty = \left\|\varphi_r\right\|_\infty,$$

перепишем (4.6) для $p = \infty$ в виде

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \leq \frac{|||s|||_\infty}{\left\|\varphi_{n,r}\right\|_\infty}. \tag{4.7}$$

Для $r = 1$ неравенство (4.7) очевидно. Пусть $r \geq 2$. Применяя теорему 1 к функции $x = s$ при $k = r - 1$, получаем

$$\left\|s^{(r-1)}\right\|_\infty \leq \frac{\left\|\varphi_1\right\|_\infty}{\left\|\varphi_r\right\|_\infty^{1/r}} |||s|||_\infty^{1/r} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{(r-1)/r}. \tag{4.8}$$

Поскольку $s^{(r-1)} \in S_{n,1}$, применяя к $s^{(r-1)}$ неравенство (4.7) при $r=1$, имеем

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{\left\|\left|s^{(r-1)}\right|\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{n,1}\right\|_\infty} \le \frac{\left\|s^{(r-1)}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_{n,1}\right\|_\infty}. \tag{4.9}$$

Из (4.8) и (4.9) находим

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{\||s\||_\infty^{1/r}}{\left(n^{-r}\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1/r}}\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{(r-1)/r}$$

или

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1/r} \le \frac{\||s\||_\infty^{1/r}}{\left\|\varphi_{n,r}\right\|_\infty^{1/r}},$$

что равносильно неравенству (4.7). Тем самым (4.6) при $p=\infty$ доказано.

Пусть теперь $p<\infty$. Применяя (4.6) при $p=\infty$, а затем оценивая $\||s\||_\infty$ с помощью неравенства (3.2), имеем

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty}\||s\||_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty}\frac{\|\varphi_r\|_\infty}{\||\varphi_r\||_p^\alpha}\||s\||_p^\alpha\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha := \dfrac{r}{r+1/p}$. Отсюда получаем неравенство

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^\alpha \le \frac{n^r}{\||\varphi_r\||_p^\alpha}\||s\||_p^\alpha,$$

из которого ввиду равенства $r\cdot 1/\alpha = r+1/p$ следует (4.6). Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть* $n, k, r \in \mathbf{N}$, $k<r$, $q\in[1,\infty]$, $p\in(0,\infty]$. *Тогда для любого сплайна* $s\in S_{n,r}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le n^{k+1/p}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\||\varphi_r\||_p}\||s\||_p, \tag{4.10}$$

где величина $\||\cdot\||_p$ *определена равенством* (1.1).

Неравенство (4.10) *точное на классе* $S_{n,r}$ *и обращается в равенство для сплайнов вида* $s(t)=a\varphi_r(nt)$, $a\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$.

Доказательство. Применяя теорему 3 и учитывая очевидное соотношение $\nu(s^{(k)})\le 2n$, получаем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le n^{1/q}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\||\varphi_r\||_p^\alpha}\||s\||_p^\alpha\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$. Оценивая $\left\|s^{(r)}\right\|_\infty$ с помощью (4.6), имеем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le n^{1/q}\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\||\varphi_r\||_p^\alpha}\||s\||_p^\alpha\left(\frac{n^{r+1/p}}{\||\varphi_r\||_p}\||s\||_p\right)^{1-\alpha}.$$

Отсюда следует (4.10), поскольку $(r+1/p)(1-\alpha) = k+1/p-1/q$.

Точность (4.10) легко проверяется непосредственной подстановкой. Теорема докавана.

Отметим наиболее важные частные случаи теоремы 5.

***Следствие* 3.** *В условиях теоремы 5 выполняются неравенства*

$$\left\| s^{(k)} \right\|_\infty \le n^{k+1/p} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{|\!|\!| \varphi_r |\!|\!|_p} |\!|\!| s |\!|\!|_p \tag{4.11}$$

и

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \le n^k \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty} |\!|\!| s |\!|\!|_\infty. \tag{4.12}$$

Неравенство (4.11) является модификацией неравенства

$$\left\| s^{(k)} \right\|_\infty \le n^{k+1/p} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p} E_0(s)_p,$$

полученного в работе [9].

Неравенство (4.12) является усилением неравенства В. М. Тихомирова [14] (в случае $q=\infty$) и неравенства А. А. Лигуна [15] (в случае $q<\infty$).

Используя (3.25) вместо (3.1), можно получить следующее усиление (4.12):

$$\left\| s_\pm^{(k)} \right\|_q \le \frac{n^k}{2^{1/q}} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty} |\!|\!| s |\!|\!|_\infty.$$

1. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**. – P. 148 – 168.
2. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
3. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Там. же. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.
4. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах, учитывающих число перемен знака производных // Допов. НАН України. – 1998. – № 8. – С. 12 – 16.
5. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
6. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
7. *Габушин В. Н.* Некоторые неравенства между производными функций // Методы регуляризации неустойчивых задач: Тр. ИММ УНЦ АН СССР. – 1976. – Вып. 23. – С. 20 – 26.
8. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. math. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
9. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
10. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 616 с.
12. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О наилучшем приближений идеальных сплайнов Эйлера в пространствах L_p, $0 \le p < 1$ // Тез. докл. междунар. конф. „Компьютерное моделирование". – Днепродзержинск, 2001. – С. 9.
13. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 43 – 47.
14. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
15. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.

Получено 11.06.2001