УДК 517.928

Г. В. Завизион (Кировоград. пед. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

We construct asymptotic solutions of a singularly perturbed system of integro-differential equations with a derivative matrix degenerated at a point.

Побудовано асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженою в точці матрицею при похідній.

В работе [1] построены асимптотические решения сингулярно возмущенной системы интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной на всем промежутке интегрирования матрицей при производной. Для таких систем решения зависят от корней характеристического уравнения и изучены в случае простых и кратных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной в точке матрицей при производной. В этом случае корни характеристического уравнения разрывны в точке, поэтому методы интегрирования, изложенные в [1], неприменимы. В данной работе предлагается метод построения асимптотических решений сингулярно возмущенной системы интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной в точке матрицей при производной. Показано, что при наличии вырожденности в точке матрицы при производной вид решений зависит от корней двух алгебраических уравнений, при этом коэффициенты формальных разложений зависят от параметра. Указаны достаточные условия существования решения и построены асимптотические решения в случаях, когда оба алгебраических уравнения имеют простые корни и когда одно из уравнений имеет один n-кратный корень с одним n-кратным элементарным делителем.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \rho\int_0^L K(t,s,\varepsilon)x(s,\varepsilon)\,ds, \tag{1}$$

где ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, — малый параметр, $h\in N$, $t\in[0;L]$, $s\in[0;L]$, ρ — произвольный параметр, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $K(t,s,\varepsilon)$ — матрицы размерности $n\times n$, $x(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор.

1. Разложения решений по целым степеням параметра. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) матрицы $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $K(t,s,\varepsilon)$ допускают разложения по степеням ε:

$$B(t,\varepsilon)=t^k B_0(t)+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r B_r(t),\quad A(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r A_r(t),\quad K(t,s,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r K_r(t,s),\ k\in N;$$

2) коэффициенты $A_r(t)$, $B_r(t)$, $K_r(t,s)$ бесконечно дифференцируемы по t;

3) $\det A_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0; L]$;

4) если ρ — собственное значение ядра $K(t,s) = A_0^{-1}(t)K_0(t,s)$, то $\det \| a_{ij} \| \neq \neq 0$, где

$$a_{ij} = \int_0^L A_0^{-1}(t)\left(-mB_0(t)q_i'(t) + A_1(t)q_i(t) + \rho\int_0^L K_1(t,\xi)q_i(\xi)\,d\xi\right)\eta_j(t)\,dt,$$

$q_i(t)$, $\eta_j(t)$ — собственные векторы соответственно ядра $K(t,s)$ и сопряженного ядра $\overline{K}(t,s)$, $i,j = \overline{1, r_1}$; $m = 1$, если $h = 1$, и $m = 0$, если $h > 1$;

5) алгебраическое уравнение

$$\det \| A_0(t) - \omega(t)B_0(t) \| = 0 \tag{2}$$

имеет простые корни при $t \in [0; L]$;

6) корни уравнения

$$\det \| B_1(t) - \overline{\omega}(t)B_0(t) \| = 0 \tag{3}$$

простые или это уравнение имеет один кратный корень с простыми элементарными делителями;

7) выполняются соотношения

$$t + \varepsilon\overline{\omega}_j(t) \neq 0, \qquad t(\omega_i(t) - \omega_j(t)) + \varepsilon(\overline{\omega}_j(t)\omega_i(t) - \overline{\omega}_i(t)\omega_j(t)) \neq 0$$

$$\forall t \in [0; L], \quad \varepsilon(0; \varepsilon_0], \quad i,j = \overline{1,n}, \quad i \neq j,$$

где $\omega_i(t)$, $\overline{\omega}_j(t)$ — корни соответственно уравнений (2), (3).

Согласно условиям 5, 6 и [2] существуют неособенные бесконечно дифференцируемые матрицы $S_i(t)$, $T_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, такие, что

$$A_0(t) = S_1^{-1}(t)W(t)T_1^{-1}(t), \qquad B(t) = S_1^{-1}(t)T_1^{-1}(t) = S_2^{-1}(t)T_2^{-1}(t),$$
$$B_1(t) = S_2^{-1}(t)\overline{W}(t)T_2^{-1}(t), \tag{4}$$

где

$$W(t) = \operatorname{diag}\{\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)\}, \qquad \overline{W}(t) = \operatorname{diag}\{\overline{\omega}_1(t), \ldots, \overline{\omega}_n(t)\}.$$

Теорема 1. *Если выполняются условия* $1-7$ *и условие*:

8) *уравнение*

$$\det\left\| s_{ij}(0)(\omega_j(0)\overline{\omega}_{i_1}(0)\ldots\overline{\omega}_{i_k}(0)\overline{\omega}_{i_{n-1}}(0) - \overline{\lambda}) \right\| = 0,$$

$$i,j = \overline{1,n}, \quad i_k = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n-1}, \quad i_k \neq i,$$

имеет различные корни,

то система интегро-дифференциальных уравнений (1) *имеет формальное решение вида*

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t,\varepsilon)\,dt\right) + \rho\int_0^L p(t,s,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda(t,\varepsilon)\,dt\right)ds, \tag{5}$$

где $u(t,\varepsilon)$, $p(t,s,\varepsilon)$ — n*-мерные векторы*, $\lambda(t,\varepsilon)$ — *скалярная функция, разлагающиеся в ряды по степеням малого параметра* ε:

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r u_r(t,\varepsilon), \lambda(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r \lambda_r(t,\varepsilon),$$
$$p(t,s,\varepsilon) = \sum_{r=\beta}^{m}\varepsilon^r p_r(t,s,\varepsilon), \tag{6}$$

причем $\beta = 0$, *если* ρ — *регулярное значение ядра* $K(t,s)$, *и* $\beta = -1$, *если* ρ — *собственное значение ядра* $K(t,s)$; $s_{ij}(t)$ — *элементы матрицы* $S_2(t)S_1^{-1}(t)$.

Доказательство. Покажем, что коэффициенты разложений (6) можно определить так, чтобы вектор $x(t,\varepsilon)$ удовлетворял системе (1) в смысле равенства формальных рядов. Подставив (5) в (1) и изменив порядок интегрирования в повторном интеграле, получим

$$\left(\varepsilon^h B(t,\varepsilon)u'(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)\lambda(t,\varepsilon) - A(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t,\varepsilon)\,dt\right) =$$
$$= \rho\int_0^L \left(-\varepsilon^h B(t,\varepsilon)p'(t,s,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)p(t,s,\varepsilon) + K(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon) + \right.$$
$$\left. + \rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)p(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t,\varepsilon)\,dt\right)ds,$$

где штрих обозначает производную функции по переменной t.

Для того чтобы вектор $x(t,\varepsilon)$ был формальным решением системы (1), достаточно, чтобы $u(t,\varepsilon)$, $\lambda(t,\varepsilon)$, $p(t,s,\varepsilon)$ удовлетворяли равенствам

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)u'(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon)\lambda(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)p'(t,s,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)p(t,s,\varepsilon) + K(t,s,\varepsilon)u(s,\varepsilon) +$$
$$+ \rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)p(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (7), используя условия 5–8 и решая полученную систему векторных уравнений методом [3], находим неизвестные $u_r(t,\varepsilon)$, $\lambda_r(t,\varepsilon)$. Для нахождения вектора $p(t,s,\varepsilon)$ отдельно рассмотрим случаи, когда ρ — регулярное и собственное значение ядра $K(t,s)$. В случае регулярного значения ρ, подставив (6) в (8), коэффициенты $p_r(t,s,\varepsilon)$ разложений (6) будем определять из системы уравнений

$$A_0(t)p_l(t,s,\varepsilon) = g_l(t,s,\varepsilon) - \rho\int_0^L K_0(t,\xi)p_l(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi, \tag{9}$$

где

$$g_l(t,s,\varepsilon) = t^k B_0(t)p'_{l-h}(t,s,\varepsilon) + \sum_{r=1}^{l-h}B_r(t)p'_{l-h-r}(t,s,\varepsilon) - \sum_{r=1}^{l}A_r(t)p_{l-r}(s,t,\varepsilon) -$$
$$-\rho\sum_{r=1}^{l}\int_0^L K_r(t,\xi)p_{l-r}(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi + \sum_{r=0}^{l}K_r(t,s)u_{l-r}(s,\varepsilon), \qquad l = 0, 1, \ldots. \tag{10}$$

Если обозначить через $\Gamma(t,s,\rho)$ резольвенту ядра $K(t,s)$, решение уравнения (9) при $l = 0$ примет вид

$$p_0(t,s) = K(t,s)u_0(s) + \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)K(\xi,s)u_0(s)\,d\xi, \tag{11}$$

а при $l \geq 1$

$$p_l(t,s,\varepsilon) = A_0^{-1}(t)g_l(t,s,\varepsilon) + \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)K(\xi,s)g_l(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi. \tag{12}$$

Подставив функцию $p_0(t,s)$ (11) в решение интегрального уравнения (12) при $l=1$, функцию $p_1(t,s,\varepsilon)$ можно представить в виде

$$p_1(t,s,\varepsilon) = \overline{p}_{01}(t,s) + \nu_{01}^{(1)}(t,s)u_1(s,\varepsilon),$$

где

$$\overline{p}_{01}(t,s) = A_0^{-1}(t)\left(B_0(t)p_0'(t,s) - A_1(t)p_0(t,s) - K_1(t,s)u_0(s) - \rho\int_0^L K_1(t,\xi)p_0(\xi,s)\,d\xi\right) +$$
$$+\ \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)A_0^{-1}(\xi)\left(B_0(\xi)p_0'(\xi,s) - A_1(\xi)p_0(\xi,s) - K_1(\xi,s)u_l(s) -\right.$$
$$\left.-\ \rho\int_0^L K_1(\xi,\xi_1)p_0(\xi_1,s)\,d\xi_1\right)d\xi, \qquad \nu_{01}^{(1)}(t,s) = K(t,s) + \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)K(\xi,s)\,d\xi.$$

Методом математической индукции можно доказать, что функция $p_l(t,s,\varepsilon)$ имеет вид

$$p_l(t,s,\varepsilon) = \overline{p}_{0l}(t,s) + \sum_{j=1}^{l}\nu_{0l}^{(j)}(t,s)u_j(s,\varepsilon), \qquad l = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где $\overline{p}_{0l}(t,s)$, $\nu_{0l}^{(j)}(t,s)$ — функции, которые не зависят от ε. Для этого предположим, что при $\alpha < l$ функцию $p_\alpha(t,s,\varepsilon)$ можно представить в виде

$$p_\alpha(t,s,\varepsilon) = \overline{p}_{0\alpha}(t,s) + \sum_{i=1}^{\alpha}\nu_{0\alpha}^{(i)}(t,s)u_i(s,\varepsilon), \tag{14}$$

где $\overline{p}_{0\alpha}(t,s)$, $\nu_{0\alpha}^{(i)}(t,s)$ — функции, которые не зависят от ε. Учитывая (10), (13), (14), функцию $g_l(t,\varepsilon)$ выразим через функции $\overline{p}_{0\alpha}(t,s)$, $\nu_{0\alpha}^{(i)}(t,s)$, $i = \overline{1,\alpha}$, и их производные следующим образом:

$$g_l(t,s,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{l-h} B_0(t)\overline{p}_{1,l-h-r}(t,s) - \sum_{r=1}^{l} A_r(t)\overline{p}_{0,l-r}(t,s) -$$
$$-\ \rho\sum_{r=1}^{l}\int_0^L K_r(t,\xi)p_{0,l-r}(\xi,s)\,d\xi + \left(\sum_{r=0}^{l-h}\ \sum_{i=1}^{l-h-r} B_0(t)\nu_{1,l-h-r}^{(i)}(t,s) -\right.$$
$$\left.-\sum_{r=1}^{l}\sum_{i=1}^{l-r}\left(A_r(t)\nu_{0,l-r}^{(i)}(t,s) - \rho\int_0^L K_r(t,\xi)\nu_{0,l-r}^{(i)}(\xi;s)\right)d\xi\right)u_i(s,\varepsilon) - \sum_{r=0}^{l} K_r(t,s)u_{l-r}(s,\varepsilon), \tag{15}$$

где

$$\overline{p}_{1\alpha}(t,s) = \frac{\partial\overline{p}_{0\alpha}(t,s)}{\partial t},\ \nu_{1\alpha}^{(i)}(t,s) = \frac{\partial\nu_{0\alpha}^{(i)}(t,s)}{\partial t}.$$

Подставляя (15) в (12), получаем (13), где

$$\overline{p}_{0l}(t,s) = A_0^{-1}(t)\Bigg(B_{l-h}(t)p_0'(t,s) - A_l(t)p_0(t,s) - K_l(t,s)u_0(s) -$$

$$- \rho\int_0^L K_l(t,\xi)p_0(\xi,s)\,d\xi\Bigg) + \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)A_0^{-1}(\xi)\Bigg(B_{l-h}(\xi)p_0'(\xi,s) - A_l p_0(\xi,s) -$$

$$- K_l(\xi,s)u_0(s) - \rho\int_0^L K_l(\xi,\xi_1)p_0(\xi_1,s)\,d\xi_1\Bigg)d\xi + A_0^{-1}(t)\sum_{i=0}^{l-h-1} B_i(t)p_{1,l-h-i}(t,s) -$$

$$- \sum_{i=1}^{l-1} A_i(t)p_{0,l-i}(t,s) - \rho\sum_{i=1}^{l-i}\int_0^L K_i(t,\xi)\overline{p}_{0,l-i}(\xi,s)\,d\xi +$$

$$+ \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)A_0^{-1}(\xi)\Bigg(\sum_{i=0}^{l-h-1} B_i(\xi)\overline{p}_{1,l-h-i}(\xi,s) - \sum_{i=1}^{l-1} A_i(\xi)\overline{p}_{0,l-i}(\xi,s) -$$

$$- \rho\sum_{i=1}^{l-1}\int_0^L K_i(\xi,\xi_1)\,\overline{p}_{0,l-i}\,(\xi_1,s)d\xi_1\Bigg)d\xi,$$

$$\nu_{0l}^{(j)}(t,s) = A_0^{-1}(t)\Bigg(B_i(t)\nu_{1,l-h-i}^{(j)}(t,s)\delta_{l-h,j} - \sum_{i=1}^{l-1} A_i(t)\nu_{0,l-i}^{(j)}(t,s)\delta_{l,j} - K_{l-j}(t,s) -$$

$$- \rho\sum_{i=1}^{l-1}\int_0^L K_i(t,\xi)\nu_{0,l-i}^{(j)}(\xi,s)\delta_{l,j}\,d\xi\Bigg) +$$

$$+ \rho\int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho)A_0^{-1}(\xi)\Bigg(\sum_{i=0}^{l-h-1} B_i(\xi)\nu_{1,l-h-i}^{(j)}(\xi,s)\delta_{l-h+1,j} - \sum_{i=1}^{l-1} A_i(\xi)\nu_{0,l-i}^{(i)}(\xi,s)\delta_{l,j} -$$

$$- K_{l-j}(\xi,s) - \rho\sum_{i=1}^{l-1}\int_0^L K_i(\xi,\xi_1)\nu_{0,l-i}^{(j)}(\xi_1,s)\delta_{l,j}\,d\xi_1\Bigg)d\xi,$$

$\delta_{\alpha j} = 0$ при $\alpha \le j \le l$, $\delta_{\alpha j} = 1$ при $j < \alpha$.

В случае, когда ρ — собственное значение ядра $K(t, s)$, векторы $p_{-1}(t, s)$, $p_l(t, s, \varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots$, определяются из системы интегральных уравнений

$$A_0(t)p_{-1}(t, s) = -\rho\int_0^L K_0(t,\xi)p_{-1}(\xi,s)\,d\xi, \tag{16}$$

$$A_0(t)p_l(t, s, \varepsilon) = f_l(t, s, \varepsilon) - \rho\int_0^L K_0(t,\xi)p_l(\xi,s,\varepsilon)\,d\xi, \tag{17}$$

где

$$f_l(t, s, \varepsilon) = -\sum_{i=1}^{l+1}\Bigg(A_i(t)p_{l-i}(t,s,\varepsilon) - \rho\int_0^L K_i(t,\xi)p_{l-i}(\xi,s,\varepsilon)d\xi - K_{i-1}(t,s)u_{l+1-i}(s,\varepsilon)\Bigg) +$$

$$+ \sum_{i=-1}^{l-h} B_{l-i-h}(t)\,p_i'(t,s,\varepsilon).$$

Систему интегральных уравнений (16), (17) перепишем в виде

$$p_{-1}(t, s) = \rho\int_0^L K(t,\xi)p_{-1}(\xi,s)\,d\xi, \tag{18}$$

$$p_l(t, s, \varepsilon) = F_l(t, s, \varepsilon) + \rho \int_0^L K(t,\xi) p_l(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi, \tag{19}$$

причем

$$F_l(t, s, \varepsilon) = A_0^{-1}(t) f_l(t,s,\varepsilon).$$

Система интегральных уравнений (18) имеет решение

$$p_{-1}(t, s) = \sum_{i=1}^{r_1} c_{-1i}(s) q_i(t), \tag{20}$$

где $c_{-1i}(s)$ — пока произвольные числа, $q_l(t)$, $i = \overline{1, r_1}$, — собственные векторы ядра $K(t, s)$. Для того чтобы уравнение (19) при $l = 0$ имело решение, необходимо выполнение условия

$$\int_0^L F_0(t,s,\varepsilon)\eta_j(t)\, dt = 0, \quad j = \overline{1, r_1}, \tag{21}$$

где $\eta_j(t)$ — собственные векторы сопряженного интегрального уравнения

$$\eta_j(t) = \rho \int_0^L \overline{K}(t,s)\eta_j(s)\, ds.$$

Согласно (20) условие (21) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_{-1i}(s) a_{ij} + b_{-1j}(s) = 0, \quad j = \overline{1, r_1}, \tag{22}$$

где

$$b_{-1j}(s) = \int_0^L K(t,s) u_0(s) \eta_j(t)\, dt.$$

При выполнении условия 4 система уравнений (22) имеет единственное решение $c_{-1i}(s)$, которое определяет функцию $p_{-1}(t, s)$. Решение уравнения (19) при $l = 0$ запишем в виде

$$p_0(t, s) = \sum_{i=1}^{r_i} c_{0i}(s,\varepsilon) q_i(t) + F_0(t, s, \varepsilon) + \rho \int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho) F_0(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi,$$

где $\Gamma(t, s, \rho)$ — резольвента ядра

$$L(t, s) = K(t, s) - \sum_{i=1}^{r_1} \begin{Vmatrix} \overline{\eta}_{1i}(t)\overline{q}_{1i}(s) & \dots & \overline{\eta}_{1i}(t)\overline{q}_{ni}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\eta}_{ni}(t)\overline{q}_{1i}(s) & \dots & \overline{\eta}_{ni}(t)\overline{q}_{ni}(s) \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\overline{\eta}_{ji}(t)$, $\overline{q}_{ji}(t)$, $j = 1, n$, $i = \overline{1, r_1}$, — координаты векторов $\overline{\eta}_i(t)$, $\overline{q}_i(t)$, элементы которых комплексно сопряжены с элементами векторов $\eta_i(t)$, $q_i(t)$.

Функции $c_{0i}(s, \varepsilon)$, $i = \overline{1, r_1}$, определяются из условия существования решения уравнения (19) при $l = 1$. Аналогично определяются остальные коэффициенты $p_\alpha(t, s, \varepsilon)$ разложения (6) в случае, когда ρ — собственное значение ядра $K(t, s)$. Если $p_\alpha(t, s, \varepsilon)$ уже определены при $\alpha < l$, то вектор $p_l(t, s, \varepsilon)$ имеет вид

$$p_l(t,s,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{r_1} c_{li}(s,\varepsilon) q_i(t) + F_l(t,s,\varepsilon) + \rho \int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho) F_l(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi,$$

где $c_{li}(s,\varepsilon)$ — неизвестные функции. Эти функции находим из условия существования решения уравнения (19) при $\alpha = l+1$. Это условие равносильно алгебраической системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_{li}(s,\varepsilon) a_{ij} + b_{lj}(s,\varepsilon) = 0, \quad j = \overline{1, r_1}, \tag{23}$$

где

$$b_{lj}(s,\varepsilon) = -\int_0^L \Bigg(\sum_{i=2}^{l+2} A_0^{-1}(t) A_i(t) p_{l+1-i}(t,s,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{l+1} K_{i-1}(t,s) u_{l+2-i}(s,\varepsilon) +$$

$$+ \rho \int_0^L \sum_{i=1}^{l+2} K_i(t,\xi) p_{l+1-i}(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi - \sum_{i=-1}^{l+1-h} B_{l+1-i-h}(t) p_i'(t,s,\varepsilon) \Bigg) \eta_j(t)\, dt.$$

Согласно условию 4 система (23) имеет единственное решение, которое определяет вектор $p_l(t,s,\varepsilon)$. Можно показать, что вектор $p_l(t,s,\varepsilon)$ представим в виде

$$p_l(t,s,\varepsilon) = \overline{p}_{0l}(t,s) + \sum_{l_2=1}^{l+1} \sum_{l_1=1}^{n} \nu_{0 l l_1}^{(l_2)}(t,s) u_{l_2 l_1}(s,\varepsilon),$$

где $\overline{p}_{0l}(t,s)$, $\nu_{0 l l_1}^{(l_2)}(t,s)$ — векторы, которые не зависят от ε, $u_{l_2 l_1}(s,\varepsilon)$ — l_1-компонента вектора $u_{l_2}(s,\varepsilon)$. Теорема доказана.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* $1-5$, *а также условия*:

6′) *уравнение* (3) *имеет корень кратности* n *с одним* n*-кратным элементарным делителем*;

7′) *выполняются соотношения*

$$t^k + \varepsilon \overline{\omega}_0(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [0; L],\ \varepsilon \in (0; \varepsilon_0];$$

8′) *уравнение*

$$\det \left\| s_{ij}(0) w_j(0) - \overline{\lambda} (s_{ij}(0) + s_{i+1,j}(0)) \right\| = 0, \qquad i,j = \overline{1,n},$$

имеет различные корни.

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1) *имеет формальное решение вида* (5).

2. Разложения решений по дробным степеням параметра. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $1-4$, *а также условия*:

5″) *уравнение* (2) *имеет корень* $w_0(t)$ *кратности* n *с одним* n*-кратным элементарным делителем*;

6″) *уравнение* (3) *имеет корень* $\overline{w}_0(t)$ *кратности* n *с простыми элементарными делителями*;

7″) *выполняются соотношения*

$$t^k + \varepsilon \overline{\omega}_0(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [0; L],\ \varepsilon \in (0; \varepsilon_0];$$

8″) $\{C(t)\}_{n1} \neq 0$, *где* $C(t)$ — *матрица вида*

$$C(t) = -S_1(t) A_1(t) T_1(t) + t^k T_1^{-1}(t) T_1'(t).$$

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1) *имеет формальное решение вида*

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda(t,\mu)\,dt\right) + \rho\int_0^L p(t,s,\mu)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^s \lambda(t,\mu)\,dt\right)ds,$$

где $u(t,\mu)$, $p(t,s,\mu)$ — n*-мерные векторы,* $\lambda(t,\mu)$ — *скалярная функция, разлагающиеся в ряды по степеням параметра* μ:

$$u(t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^r u_r(t,\varepsilon), \qquad \lambda(t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^r\lambda_r(t,\varepsilon),$$
$$p(t,s,\mu) = \sum_{r=\beta}^{\infty}\mu^r p_r(t,s,\varepsilon), \qquad \mu = \sqrt[n]{\varepsilon}, \tag{24}$$

при этом $\beta = 0$, *если знаменатель Фредгольма ядра* $K(t,s)$ $D(\rho) \neq 0$, *или* $\beta = -n$, *если* $D(\rho) = 0$.

Доказательство. Можно показать, что для того чтобы вектор $x(t,\varepsilon)$ был формальным решением системы (1), достаточно, чтобы $u(t,\mu)$, $\lambda(t,\mu)$, $p(t,s,\mu)$ удовлетворяли равенствам

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)u'(t,\mu) + B(t,\varepsilon)u(t,\mu)\lambda(t,\mu) = A(t,\varepsilon)u(t,\mu), \tag{25}$$

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)p'(t,s,\mu) =$$
$$= A(t,\varepsilon)p(t,s,\mu) + K(t,s,\mu)u(s,\mu) + \rho\int_0^L K(t,\xi,\varepsilon)p(\xi,s,\mu)\,d\xi. \tag{26}$$

Подставляя (24) в (25), коэффициенты формальных рядов (24) определяем из системы уравнений [4]

$$(A_0(t) - (t^k B_0(t) + \varepsilon B_1(t))\lambda_0(t,\varepsilon))\,u_0(t,\varepsilon) = 0, \tag{27}$$

$$(A_0(t) - (t^k B_0(t) + \varepsilon B_1(t))\lambda_0(t,\varepsilon))\,u_l(t,\varepsilon) =$$
$$= g_l(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{l-1}(t^k B_0(t) + \varepsilon B_1(t))u_i(t,\varepsilon)\lambda_{l-i}(t,\varepsilon), \qquad l = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

где

$$g_l(t,\varepsilon) = B_0(t)u'_{l-nh}(t,\varepsilon) + \varepsilon\sum_{i=1}^{[(l-nh+n)/n]} B_i(t)u'_{l-nh}(t,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{[(l+n)/n]}\lambda_0(t,\varepsilon)B_i(t)u_{l-hi+n}(t,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{[l/n]} A_i(t)u_{l-ni}(t,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{l-h}\sum_{j=1}^{[(l-i+n)/n]}\lambda_i(t,\varepsilon)B_j(t)u_{l-i-nj+n}(t,\varepsilon), \qquad l = n, n+1, \ldots$$

(символом $[l/n]$ обозначена целая часть числа l/n).

Покажем, что система уравнений (27), (28) имеет решение. Согласно условиям 5, 6 выполняется соотношение (4), где $\overline{W}(t)$ — диагональная матрица размерности $n \times n$ с диагональными элементами $\overline{w}_0(t)$, $W(t)$ — жорданова клетка с диагональными элементами $w_0(t)$. Подставив (4) в (27), (28) и обозначив $\lambda_0(t,\varepsilon) = \dfrac{w_0(t)}{t^k + \varepsilon\overline{w}_0(t)}$, систему уравнений (27), (28) запишем в виде

$$Iq_0(t) = 0, \tag{29}$$

$$Iq_l(t) = (t^k E + \varepsilon \overline{W}(t)) \sum_{i=0}^{l-1} q_i(t,\varepsilon)\lambda_{l-i}(t,\varepsilon) + \psi_l(t, \varepsilon), \tag{30}$$

где

$$q_i(t, \varepsilon) = T_1^{-1}(t)u_l(t,\varepsilon), \qquad \psi_l(t, \varepsilon) = S_1(t)\varphi_l(t, \varepsilon), \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

I — матрица размерности $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$\{I\}_{i,i+1} = 1, \quad i = \overline{1, n-1}; \qquad \{I\}_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad j \neq i+1.$$

Из уравнения (29) следует, что все компоненты вектора $q_0(t, \varepsilon)$, кроме первой, равны нулю (первая остается произвольной). Положим $\{q_0(t, \varepsilon)\}_1 = 1$. Чтобы найти $u_1(t, \varepsilon)$, $\lambda_1(t, \varepsilon)$, воспользуемся уравнениями (30) при $l = 1$ и $l = n$. Умножая слева уравнение (30) при $l = n$ на матрицу I^{n-1} и используя свойства матрицы I [3], получаем

$$(t^k E + \varepsilon \overline{W}(t)) q_0(t,\varepsilon)\lambda_1^n(t,\varepsilon) + I^{n-1} C(t) q_0(t, \varepsilon) = 0.$$

Выберем здесь первое скалярное уравнение и найдем функцию

$$\lambda_1(t, \varepsilon) = \frac{\sqrt[n]{-\{C(t)\}_{n1}}}{t^k + \varepsilon \overline{w}_0(t)} \quad \forall t \in [0; L], \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0].$$

Зная функцию $\lambda_1(t, \varepsilon)$ из векторного уравнения (30), при $l = 1$ определяем вектор $q_1(t, \varepsilon)$:

$$\{q_1(t, \varepsilon)\}_2 = \sqrt[n]{-\{C(t)\}_{n1}}, \qquad \{q_1(t, \varepsilon)\}_i = 0, \quad i = 1, 3, \ldots, n.$$

Для определения $\lambda_j(t, \varepsilon)$, $u_j(t, \varepsilon)$ воспользуемся уравнениями (3) при $l = j$ и $l = n + j - 1$. Умножая слева обе части уравнения (30) при $l = n + j - 1$ на матрицу I^{n-1}, используя метод преобразования полученных выражений [2] и выбирая в векторном уравнении первое скалярное уравнение, находим

$$\lambda_j(t, \varepsilon) = \frac{\{\alpha_j(t,\varepsilon)\}_1}{n(t^k + \varepsilon \overline{w}_0(t))^n \lambda_0^{n-1}(t,\varepsilon)},$$

где $\alpha_j(t, \varepsilon)$ — вектор, который выражается через $\lambda_m(t, \varepsilon)$, $q_m(t, \varepsilon)$ при $m < j$. Вектор $q_j(t, \varepsilon)$ находится из уравнения (30) при $l = j$.

Для нахождения $p(t, s, \mu)$ отдельно рассмотрим случаи, когда ρ — регулярное и собственное значение ядра $K(t, s)$. В случае регулярного значения ρ, подставив (24) в (28), коэффициенты $p_r(t, s, \varepsilon)$ определим из системы интегральных уравнений

$$A_0(t) p_l(t, s, \varepsilon) = f_l(t, s, \varepsilon) - \rho \int_0^L K_0(t,\xi) p_l(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi, \tag{31}$$

где

$$f_l(t, s, \varepsilon) = t^k B_0(t) p'_{l-hn}(t,s,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{[(l-nh)/n]} B_i(t) p'_{l-hn-ni}(t,s,\varepsilon) -$$

$$- \sum_{i=1}^{[l/n]} A_i(t) p_{l-ni}(t,s,\varepsilon) - \rho \sum_{i=1}^{[l/n]} \int_0^L K_i(t,\xi) p_{l-ni}(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{i=0}^{[l/n]} K_i(t,s) u_{l-ni}(s,\varepsilon), \qquad l = 0, 1, \ldots .$$

Если обозначить через $\Gamma(t, s, \rho)$ резольвенту ядра $K(t, s)$, решение уравнения (31) примет вид

$$p_l(t, s, \varepsilon) = A_0^{-1}(t) f_l(t,s,\varepsilon) + \rho \int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho) K(\xi,s) f_l(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi, \qquad l = 0, 1, \ldots .$$

В случае, когда ρ — собственное значение ядра $K(t, s)$, векторы $p_{-l_1}(t,s,\varepsilon)$, $p_l(t, s, \varepsilon)$, $l_1 = \overline{1,n}$, $l = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$A_0(t) p_{-l_1}(t,s,\varepsilon) = \rho \int_0^L K(t,\xi) p_{-l_1}(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi, \tag{32}$$

$$p_l(t, s, \varepsilon) = F_l(t, s, \varepsilon) + \rho \int_0^L K(t,\xi) p_l(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi, \tag{33}$$

где

$$F_l(t, s, \varepsilon) = A_0^{-1}(t) \Bigg(- \sum_{i=1}^{[(l+1)/n]} \Bigg(A_i(t) p_{l-in}(t,s,\varepsilon) - \rho \int_0^L K_i(t,\xi) p_{l-in}(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi -$$

$$- K_{i-1}(t,s) u_{l+1-in}(s,\varepsilon) \Bigg) + \sum_{i=-1}^{[(l-nh)/n]} B_{l-in-ih}(t) p_i'(t,s,\varepsilon) \Bigg).$$

Система интегральных уравнений (32) имеет решение

$$p_{-n}(t,s) = \sum_{i=1}^{r_1} c_{-ni}(s) q_i(t), \tag{34}$$

где $c_{-ni}(s)$ — пока произвольные числа, $q_i(t)$, $i = \overline{1, r_1}$, — собственные векторы ядра $K(t, s)$. Согласно (34) условие (21) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_{-ni}(s) a_{ij} + b_{-nj}(s) = 0, \qquad j = \overline{1, r_1}, \tag{35}$$

где

$$b_{-nj}(s) = \int_0^L K(t,s) u_0(s) \eta_j(t)\, dt.$$

При выполнении условия 4 система уравнений (35) имеет единственное решение $c_{-ni}(s)$, которое определяет функцию $p_{-n}(t, s)$. Решение уравнения (33) при $l = 0$ запишем в виде

$$p_0(t, s) = \sum_{i=1}^{r_1} c_{0i}(s,\varepsilon) q_i(t) + F_0(t, s, \varepsilon) + \rho \int_0^L \Gamma(t,\xi,\rho) F_0(\xi,s,\varepsilon)\, d\xi,$$

где $\Gamma(t, s, \rho)$ — резольвента ядра $L(t, s)$.

Функции $c_{0i}(s, \varepsilon)$, $i = \overline{1, r_1}$, определяются из условия существования решения уравнения (33) при $l = n$, а функции

$$p_{-n+l}(t,s,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{r_1} c_{-n+l,i}(s,\varepsilon) q_i(t), \qquad l = \overline{1,n-1},$$

— из условия существования решения l-го уравнения системы (33). Аналогично методом математической индукции можно показать, что указанным алгоритмом определяется любая функция $p_l(t, s, \varepsilon)$, $l = 1, 2, \ldots$.

3. Асимптотическое свойство формальных решений. В [3] показано, что вектор

$$u_l(t, \varepsilon) = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall t \in [0; L], \tag{36}$$

а для функции $\lambda_l(t, \varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots$, справедлива оценка

$$\lambda_l(t, \varepsilon) = Or\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \forall t \in [0; L], \tag{37}$$

где $Or(1/\varepsilon)$ — максимальный порядок полюса по ε функции $\lambda_l(t, \varepsilon)$.

Тогда из (13), (36) и (37) следует

$$p_l(t, s, \varepsilon) = O(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall t \in [0; L], \quad s \in [0; L]. \tag{38}$$

Используя (36)–(38), можно доказать теорему об асимптотическом характере формальных решений (5) в смысле [5].

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 1, *а также условия*:

а) $\mathrm{Re}\left(\sum_{r=0}^{h} \varepsilon^r \lambda_r(t,\varepsilon)\right) < 0 \quad \forall t \in [0; L], \ \varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$;

б) *точное решение* $x(t, \varepsilon)$ *системы* (1) *и* m*-е приближение* $x_m(t, \varepsilon)$ *при* $t = 0$ *равны, т. е.*

$$x_m(0, \varepsilon) = x(0, \varepsilon),$$

то существует постоянная C, *которая не зависит от* ε *и такая, что выполняется неравенство*

$$\| x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon) \| \le C\varepsilon^{m-h}.$$

1. *Шкиль Н. И., Завизион Г. В.* Системы сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с вырождениями // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1694–1703.
2. *Шкиль Н. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении. – Киев, КСУ, 1996. – 207 с.
3. *Шкиль Н. И., Завизион Г. В.* Системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с вырождениями // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 3. – С. 414–425.
4. *Шкиль Н. И.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. math. – 1987. – **23**, № 1. – P. 53–62.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 412 с.

Получено 08.10.2001