УДК 519.217

О. Ю. Фещенко (Держ. подат. адміністрація України, Київ)

ПРО МІРОЗНАЧНІ ПРОЦЕСИ, ПОРОДЖЕНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

We study the representation of a homogeneous semigroup $\{\Theta_t\}_{t\geq 0}$ of transformations of probability measures on $\mathbb{R}^d$ in the form

$$\Theta_t(\mu) = \mu \circ u_\mu^{-1}(\cdot, t),$$

where $u_\mu : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ satisfies the special differential equation depending on a measure μ. We give necessary and sufficient conditions of the representation of this sort.

Вивчається питання зображення однорідної напівгрупи $\{\Theta_t\}_{t\geq 0}$ перетворень імовірнісних мір на $\mathbb{R}^d$ у вигляді

$$\Theta_t(\mu) = \mu \circ u_\mu^{-1}(\cdot, t),$$

де $u_\mu : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ задовольняє диференціальне рівняння спеціального вигляду, що залежить від міри μ. Наводяться необхідні і достатні умови такого зображення.

Вступ. Позначимо через M_1 множину ймовірнісних мір на $\mathbb{R}^d$ з топологією слабкої збіжності (метризованою за допомогою деякої метрики ρ).

Розглянемо для деякої початкової ймовірнісної міри $\mu_0 \in M_1$ диференціальну задачу з невідомою функцією $u: (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$\frac{du(t, x)}{dt} = G(u(t, x), \mu_t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
$$\mu_t = \mu_0 \circ u(t, \cdot)^{-1}, \tag{1}$$
$$u(0, x) = x.$$

При цьому рівність

$$\mu_t = \mu_0 \circ u(t, \cdot)^{-1} \tag{2}$$

має сенс, якщо відображення $x \mapsto u(t, x) = u_t(x)$ вимірне при фіксованому $t > 0$.

Якщо позначити через u_μ розв'язок рівняння (1) з початковою мірою μ, рівність (2) також породжує однорідну напівгрупу $\{\Theta_t\}_{t\geq 0}$ перетворень мір з M_1:

$$\Theta_t(\mu) = \mu \circ u_\mu^{-1}(\cdot, t). \tag{3}$$

Якщо μ_t розглядати як розподіл маси на $\mathbb{R}^d$ в момент t, рівняння (1) можна інтерпретувати як перенос маси на $\mathbb{R}^d$, причому траєкторія кожної частинки маси залежить від усього розподілу мас.

У роботі [1] доведено існування розв'язку (1) за умови ліпшицевості функції G по обох змінних. У п. 1 даної роботи доводяться слабші умови існування розв'язку (1). У п. 2 досліджуються умови, за яких напівгрупа на M_1 породжується рівнянням переносу маси (1), у п. 3 отримані результати застосовуються у випадку функції G, лінійної по μ.

1. Існування розв'язку рівняння переносу маси.

Теорема 1. *Якщо G — неперервне відображення $\mathbb{R}^d \times M_1 \to \mathbb{R}^d$, що задовольняє умови*

$$\exists L > 0: \ \|G(x_1, \mu) - G(x_2, \mu)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in M_1, \tag{4}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d: \ g^*(x) = \sup_{\mu \in M_1} \|G(x, \mu)\| < \infty, \tag{5}$$

то для довільної міри $\mu_0 \in M_1$ *існує розв'язок и рівняння* (1). *При цьому відображення* $x \mapsto u(t, x) = u_t(x)$ *неперервне при фіксованому* $t > 0$ *і породжує потік мір* (2).

Доведення. Для доведення існування розв'язку використовується принцип Шаудера [2] (п. 3.3, гл. XVI): неперервне відображення в себе опуклого компакта в лінійному нормованому просторі має нерухому точку.

Зауважимо, що M_1 можна розглядати як опуклу підмножину деякого лінійного нормованого простору, а саме $\tilde{M}$ — поповнення простору M скінченних зарядів на $\mathbb{R}^d$ за нормою $\|\cdot\|_{BL}^*$ [3] (гл. III, § 7):

$$\|\mu\| = \sup\left\{|\langle f, \mu\rangle| : \|f\|_{BL} \le 1\right\}, \tag{6}$$

де для функції f на $\mathbb{R}^d$ норма $\|\cdot\|_{BL}$ задається як

$$\|f\|_{BL} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| + \sup_{x \ne y} \left|\frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|}\right|.$$

При цьому слабка збіжність мір на M_1 еквівалентна збіжності за нормою $\|\cdot\|_{BL}^*$.

Зафіксуємо $T > 0$. В якості нормованого лінійного простору з теореми Шаудера будемо використовувати $C([0, T]; \tilde{M})$ з відповідною sup-нормою:

$$\text{для } \nu = \{\nu_t \in \tilde{M}\}_{t \in [0, T]} \in C([0, T]; \tilde{M}): \quad \|\nu\| = \sup_{t \in [0, T]} \|\nu_t\|.$$

Компакт з теореми Шаудера задамо як опуклу множину $A \subset C([0, T]; M_1) \subset$ $\subset C([0, T]; \tilde{M})$, яка складається з елементів η, що задовольняють умови:

i) $\eta_0 = \mu_0$;

ii) $\forall \varepsilon > 0, \ t \in [0, T]: \ \eta_t(\{\|x\| \le K(\varepsilon)\}) > 1 - \varepsilon$, де

$$K(\varepsilon) = K_0(\varepsilon)e^{LT} + Tg^*(0)e^{LT} = K_0(\varepsilon)e^{LT} + C_1,$$

а $K_0(\varepsilon)$ таке, що $\mu_0(\{\|x\| \le K_0(\varepsilon)\}) > 1 - \varepsilon$;

iii) $\forall \varepsilon > 0, \ t, s \in [0, T]: \ \|\eta_t - \eta_s\| \le |t - s|(C_2 + C_3 K_0(\varepsilon)) + \varepsilon$, де $C_2 =$ $= g^*(0) + LC_1$, $C_3 = Le^{LT}$.

З умов i), iii) випливає, що A одностайно неперервна, а з умови ii) і теореми Прохорова — що для довільного $t \in [0, T]$ множина $\{\eta_t\}_{\eta \in A}$ передкомпактна в M_1. Отже, A також передкомпактна в $C([0, T]; \tilde{M})$. Легко бачити, що A замкнена. Таким чином, A — компакт.

Означимо відображення $\Gamma: A \to A$ таким чином. Для $\mu \in A$ побудуємо u: $[0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ як розв'язок задачі Коші

$$\frac{du(t, x)}{dt} = G(u(t, x), \mu_t), \qquad u(0, x) = x \tag{7}$$

і покладемо

$$(\Gamma(\mu))_t = \mu \circ u(t, \cdot)^{-1}. \tag{8}$$

Означення (7), (8) коректне, оскільки (7) записується у вигляді

$$\frac{du(t,x)}{dt} = G_t(u(t,x)),$$
$$u(0,x) = x, \tag{9}$$

де $G_t(z) := G(z, \mu_t)$. З умови (4) випливає

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T]: \quad \|G_t(x_1) - G_t(x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|.$$

Отже, (7) має єдиний розв'язок $u(t,x)$, який при фіксованому t неперервно залежить від x, що й завершує доведення коректності означення (7), (8).

Перевіримо тепер, що для довільного $\nu \in C([0,T]; M_1)$ такого, що $\nu_0 = \mu_0$, $\Gamma(\nu) \in A$. Звідси випливатиме, що $\Gamma(A) \subset A$.

Властивість i) тривіальна для $\Gamma(A)$.

Перевіримо виконання умови ii): нехай $\mu \in C([0,T]; M_1)$. Для фіксованого $x \in \in \mathbb{R}^d$ оцінимо $\|u(t,x)\|$:

$$\|u(t,x)\| = \left\| x + \int_0^t G_s(u(s,x))\,ds \right\| \le \|x\| + \int_0^t \left(L\|u(s,x)\| + g^*(0)\right) ds$$

і згідно з лемою Гронуолла – Беллмана (див., наприклад, [4], лема 4.13) після перетворень отримаємо

$$\|u(t,x)\| \le C_1 + \|x\| e^{LT}. \tag{10}$$

Оскільки $\Gamma(\mu)_t = \mu_0 \circ u(t,\cdot)^{-1}$, то з оцінки (10) випливає

$$\Gamma(\mu)_t\left(\left\{x : \|x\| \le K_0(\varepsilon) e^{LT} + C_1\right\}\right) \ge \mu_0(\{x : \|x\| \le K_0(\varepsilon)\}) > 1 - \varepsilon,$$

тобто умова ii) виконується для $\Gamma(\mu)$.

Перевіримо виконання умови iii). Для довільного f такого, що $\|f\|_{BL} \le 1$, і для $0 \le s \le t \le T$ при довільному $\varepsilon > 0$ маємо

$$\left|\langle f, \Gamma(\mu)_t\rangle - \langle f, \Gamma(\mu)_s\rangle\right| = \left|\langle f(u_t), \mu_0\rangle - \langle f(u_s), \mu_0\rangle\right| =$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(u_t(x)) - f(u_s(x))]\mu_0(dx) \right| \le \varepsilon + \sup_{\|x\| \le K_0(\varepsilon)} |u_t(x) - u_s(x)|.$$

Використовуючи (10), отримуємо

$$|u_t(x) - u_s(x)| \le \int_s^t |G_\tau(u_\tau)|\,d\tau \le (t-s)\left[g^*(0) + L \sup_{s \le \tau \le t} \|u_\tau(x)\|\right] \le$$
$$\le \left[g^*(0) + L\left(C_1 + \|x\| e^{Lt}\right)\right](t-s). \tag{11}$$

Нарешті

$$\left|\langle f, \Gamma(\mu)_t\rangle - \langle f, \Gamma(\mu)_s\rangle\right| \le \varepsilon + (t-s)\left(C_2 + C_3 K_0(\varepsilon)\right),$$

що й доводить властивість iii) для $\Gamma(\mu)$.

Залишилось перевірити неперервність відображення Γ на A. Нехай $\mu^n \in A$, $n \ge 1$, $\mu^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \nu \in A$. Позначимо через $u_t^n(x)$ розв'язки (9), що відповідають потокам мір μ^n, $\upsilon_t(x)$ — розв'язок (9), що відповідає потоку мір ν. Для довільних $\varepsilon > 0$, $t \in [0,T]$ і f такої, що $\|f\|_{BL} \le 1$,

$$\left|\langle f, \Gamma(\mu^n)_t\rangle - \langle f, \Gamma(\nu)_t\rangle\right| = \left|\langle f(u_t^n), \mu_0\rangle - \langle f(\upsilon_t), \mu_0\rangle\right| \le$$
$$\le \varepsilon + \sup_{\|x\| \le K_0(\varepsilon)} \left\| u_t^n(x) - \upsilon_t(x) \right\|. \tag{12}$$

Далі, при $\|x\| \le K_0(\varepsilon)$ маємо

$$\left\|u_t^n(x) - v_t(x)\right\| = \int_0^t G\left(u_s^n(x), \mu_s^n\right) ds - \int_0^t G\left(v_s(x), \nu_s^n\right) ds =$$

$$= \left\|\int_0^t \left(G\left(u_s^n(x), \mu_s^n\right) - G\left(v_s(x), \mu_s^n\right)\right) ds + \int_0^t \left(G\left(v_s(x), \mu_s^n\right) - G\left(v_s(x), \nu_s\right)\right) ds\right\| =$$

$$= \|I_1 + I_2\|.$$

Зауважимо, що з (11) випливає, що при $\|x\| \le K_0(\varepsilon)$ для кожного s

$$\left\|G\left(v_s(x), \mu_s^n\right) - G\left(v_s(x), \nu_s\right)\right\| \le 2(C_2 + C_3 K_0(\varepsilon))$$

і ліва частина прямує до нуля при $n \to \infty$. За теоремою про мажоровану збіжність $\|I_2\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отже, при $\|x\| \le K_0(\varepsilon)$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\|u_t^n(x) - v_t(x)\right\| \le \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^t \left(G\left(u_s^n(x), \mu_s^n\right) - G\left(v_s(x), \mu_s^n\right)\right) ds \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^t L \left\|u_s^n(x) - v_s(x)\right\| ds \le L \int_0^t \varlimsup_{n\to\infty} \left\|u_s^n(x) - v_s(x)\right\| ds,$$

звідки за лемою Гронуолла – Беллмана $\varlimsup_{n\to\infty} \left\|u_t^n(x) - v_t(x)\right\| \le 0$. З останньої нерівності і (12) отримуємо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|\langle f, \Gamma(\mu^n)_t\rangle - \langle f, \Gamma(\nu)_t\rangle\right| \le \varepsilon$$

для довільного $\varepsilon > 0$, що й завершує доведення неперервності Γ на A і, відповідно, існування розв'язку рівняння (1).

Єдиність розв'язку (1) буде доведено в наступному пункті.

2. Напівгрупа, породжена рівнянням переносу маси. У п. 1 показано, що для довільної функції g, яка задовольняє умови (4), (5), для будь-якої початкової міри μ існує розв'язок $u_\mu(x, t)$ рівняння (1), який породжує однорідну напівгрупу $\{\Theta_t\}_{t\ge0}$ за формулою (3):

$$\Theta_t(\mu) = \mu \circ u_\mu^{-1}(\cdot, t).$$

Зауважимо, що для будь-яких $t > 0$, $\mu \in M_1$ для визначення $\Theta_t(\mu)$ достатньо знати значення $\langle f, \Theta_t\mu\rangle$ для всіх f з деякої щільної підмножини $C(\mathbb{R}^d)$, наприклад з $C_0^1(\mathbb{R}^d)$.

Легко перевірити, що для $t \ge 0$, $\nu \in M_1$

$$\frac{d}{dt}\langle f, \Theta_t(\mu)\rangle = A(f, \Theta_t(\mu)), \tag{13}$$

де для довільного $\mu \in M_1$

$$A(f, \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla f(x), G(x, \mu))\, \mu(dx). \tag{14}$$

Виявляється також, що за співвідношеннями (13), (14) можна однозначно відновити напівгрупу $\{\Theta_t\}_{t\ge0}$.

Теорема 2. *Якщо* $\{\Theta_t\}_{t\ge0}$ — *однорідна напівгрупа перетворень* M_1, *неперервна справа (в розумінні* $\Theta_t(\mu) \xrightarrow[t\downarrow s]{} \Theta_s(\mu)$, $\mu \in M_1$), *і для* $t \ge 0$, $\nu \in M_1$,

$f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ *мають місце співвідношення* (13), (14), *де* G — *неперервне відображення* $\mathbb{R}^d \times M_1 \to \mathbb{R}^d$, *що задовольняє умови* (4), (5), *то існує рівняння переносу маси вигляду* (1), *розв'язок якого породжує напівгрупу* $\{\Theta_t\}_{t\geq 0}$ *за формулою* (3).

Доведення. Побудуємо за допомогою відображення G рівняння (1). Згідно з теоремою 1 існує розв'язок такого рівняння, який за формулою (3) породжує напівгрупу $\{\tilde{\Theta}_t\}_{t\geq 0}$. Для цієї напівгрупи для довільних $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ має місце рівність

$$\frac{d}{dt}\left\langle f, \tilde{\Theta}_t(\mu)\right\rangle = A\left(f, \tilde{\Theta}_t(\mu)\right) \tag{15}$$

з тим же оператором A.

Зауважимо, що $\tilde{\Theta}_t(\mu)$ можна розглядати як детермінований марковський однорідний процес на M_1. Для цього процесу існує слабкий інфінітезимальний оператор [5] U з областю визначення $\mathcal{D}(U) \subset C_b(M_1)$, зокрема U визначено на множині лінійних функцій вигляду

$$\mu \mapsto F(\mu) = \langle f, \mu\rangle, \tag{16}$$

де $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$. При цьому

$$U(F)(\mu) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{F\left(\tilde{\Theta}_h(\mu)\right) - F(\mu)}{h} = A\,(f, \mu). \tag{17}$$

Позначимо $\mu_t := \Theta_t(\mu_0)$, $\tilde{\mu}_t := \tilde{\Theta}_t(\mu_0)$. Тоді $\varphi_t := F(\mu_t)$ і $\tilde{\varphi}_t := F(\tilde{\mu}_t)$ є розв'язками рівняння

$$\frac{d^+\varphi_t}{dt} = U\varphi_t. \tag{18}$$

Однак, згідно з теоремою 1.9 [5] (гл. 1, § 6) єдиним розв'язком φ_t рівняння (18), що задовольняє умови:

1) φ_t слабко неперервна;

2) $\dfrac{d^+\varphi_t}{dt}$ слабко неперервна справа і $\left\|\dfrac{d^+\varphi_t}{dt}\right\|$ обмежена на кожному скінченному відрізку;

3) $\|\varphi_t\|$ обмежена;

4) $\forall\, \mu \in M_1 :\ \varphi_t(\mu) \to \mu, \quad t \downarrow 0,$

є $F\left(\tilde{\Theta}_t(\mu_0)\right)$.

Оскільки для $f \in C_0^1(M_1)$ має місце нерівність $\sup\limits_{x,\mu}\left\|(\nabla f(x), G(x,\mu))\right\| < \infty$, то з означення оператора A випливає виконання умов 2, 3 для φ_t і $\tilde{\varphi}_t$. Для φ_t властивості 1, 4 випливають з умов теореми, а для $\tilde{\varphi}_t$ — з оцінки iii) теореми 1. Отже, φ_t і $\tilde{\varphi}_t$ збігаються, а отже, збігаються і напівгрупи Θ_t і $\tilde{\Theta}_t$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо відображення* G *задовольняє умови* (4), (5), *то розв'язок рівняння* (1) *єдиний.*

Доведення. Дійсно, нехай $u(t,x)$ і $\tilde{u}(t,x)$ — два розв'язки рівняння (1), яким згідно з (2) відповідають потоки мір μ_t і $\tilde{\mu}_t$, і за формулою (3) — однорідні напівгрупи Θ_t і $\tilde{\Theta}_t$. Оскільки $u(t,x)$ і $\tilde{v}(t,x)$ — розв'язки рівняння (1), то μ_t і ν_t є розв'язками рівняння (18).

При доведенні теореми 1 в (7), (8) було означено відображення Γ. Оскільки

$u(t,x)$ і $\tilde{v}(t,x)$ є розв'язками рівняння (1), то $\mu = \Gamma(\mu)$, $\tilde{\mu} = \Gamma(\tilde{\nu})$, і, отже, для μ, $\tilde{\mu}$ має місце оцінка з умови iii) теореми 1. Звідси випливає неперервність процесів μ_t, $\tilde{\mu}_t$ і, відповідно, існування слабких інфінітезимальних операторів. Міркуючи, як і при доведенні теореми 2, отримуємо $\mu_t = \tilde{\mu}_t$. Отже, u і $\tilde{u}$ також збігаються, оскільки задовольняють рівняння (9), яке має єдиний розв'язок.

3. Застосування отриманих результатів. Застосуємо результати пп. 1 і 2 до випадку, коли функція G лінійна по μ. У цьому випадку

$$G(x,\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x,y)\mu(dy), \tag{19}$$

де g — неперервне відображення $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Тоді рівняння (1) має вигляд

$$\begin{gathered} \frac{du(t,x)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^d} g(u(t,x),u(t,y))\mu_0(dy), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = x. \end{gathered} \tag{20}$$

Неважко переконатися, що умови (4), (5) набирають вигляду

$$\exists L>0: \ \|g(x_1,y) - g(x_2,y)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^d, \tag{21}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d: \ g^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \|g(x,y)\| < \infty \tag{22}$$

і для g, що задовольняє такі умови, згідно з теоремою 1 і наслідком існує єдиний розв'язок (20).

Крім того, якщо для однорідної неперервної напівгрупи $\{\Theta_t\}_{t\ge 0}$ має місце (13) з оператором A вигляду

$$A(f,\mu) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} (\nabla f(x), g(x,y))\,\mu(dx)\,\mu(dy), \tag{23}$$

то за теоремою 2 напівгрупа $\{\Theta_t\}_{t\ge 0}$ породжується розв'язком рівняння (20). Таким чином, якщо за оператором A (23) можна відновити ядро $g(x,y)$, то можна виписати в явному вигляді рівняння переносу маси (20), що породжує напівгрупу.

Поряд з M_1 — множиною ймовірнісних мір на E — використаємо позначення M для лінійного простору всіх скінченних борелевих зарядів на $\mathbb{R}^d$. Будемо розглядати на M дві топології: τ, що відповідає топології M як банахового простору (з нормою, означеною як варіація заряду), та ω — топологію, породжену лінійними функціоналами на M вигляду $\mu \mapsto \langle f,\mu\rangle$, $\mu \in M$, $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Білінійною формою на M_1 будемо називати звуження на M_1 означеної на M білінійної форми.

Лема 1. *Білінійна форма B на M_1 неперервна за сукупністю аргументів у топології ω тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists b \in C_b(\mathbb{R}^d): \ B(\mu,\nu) \le \iint_{\mathbb{R}^{2d}} b(x,y))\,\mu(dx)\,\nu(dy), \quad \mu,\nu \in M_1. \tag{24}$$

Лема 2. *Якщо l — лінійний функціонал на M, неперервний на (M_1,ω), то l також неперервний на (M,τ).*

***Зауваження* 1.** Якщо в умовах леми 1 замінити вимогу неперервності форми B неперервністю B по кожному аргументу і від b також вимагати лише неперервність по кожному аргументу і обмеженість, то отримаємо істинне твердження.

Наведемо умови, за яких можливе зазначене відновлення ядра $g(x, y)$.

Позначимо

$$C_*\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) := \left\{ h \in C\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right) \,\Big|\, \forall K > 0 : \sup_{\|x\| \le K, y \in \mathbb{R}^d} \|h(x, y)\| < \infty \right\},$$

$$B_K := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le K \right\}.$$

Теорема 3. *Відображення* $A: C_0^1(\mathbb{R}^d) \times M_1 \to \mathbb{R}$ *можна подати у вигляді* (23) *для ядра* $g \in C_*(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ *тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного фіксованого* $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ *існує білінійна форма* B_f *на* M *така, що для будь-якого* $\mu \in M_1$ $B_f(\mu, \mu) = A(f, \mu)$, *і* B_f *неперервна на* $(M_1 \times M_1, \omega \times \omega)$;

2) A *лінійне по* f *при кожному фіксованому* $\mu \in M_1$ *і*

$$\forall K > 0 \;\; \exists C_K > 0 \;\; \forall \mu \in M_1 \;\; \forall f \in C_0^1(B_K): \quad |A(f, \mu)| \le C_K \sup_{x \in B_K} \|\nabla f(x)\|;$$

3) *якщо* $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \mu = \varnothing$, *то* $A(f, \mu) = 0$.

Доведення. Якщо A має вигляд (23), то легко бачити, що умови $1-3$ виконуються.

Нехай умови $1-3$ виконуються. Побудуємо ядро g, для якого виконується (23). Зафіксуємо $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$. З умови 1 і леми 2 випливає, що існує $\tilde{b}_f \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, для якої

$$A(f, \mu) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \tilde{b}_f(x, y)\, \mu(dx)\, \mu(dy).$$

Покладемо, зокрема,

$$\tilde{b}_f(x, y) := 2\left[A\left(f, \frac{\delta_x + \delta_y}{2}\right) - \frac{1}{4} A(f, \delta_x) - \frac{1}{4} A(f, \delta_y) \right].$$

При цьому з умови 3 випливає, що коли $x \notin \operatorname{supp} f$, $y \notin \operatorname{supp} f$, то $\tilde{b}_f(x, y) = 0$.

З умови 2 випливає, що $\tilde{b}_f$ лінійна по f і має місце нерівність

$$\forall K > 0 \;\; \forall f \in C_0^1(B_K) \;\; \forall x \in B_K \;\; \forall y \in \mathbb{R}^d : \left| \tilde{b}_f(x, y) \right| \le C_K \sup_{x \in B_K} \|\nabla f(x)\|. \tag{25}$$

Зафіксуємо тепер $y \in \mathbb{R}^d$. Для всіх $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ таких, що $y \notin \operatorname{supp} f$, побудуємо для довільного $\varepsilon > 0$ відображення

$$\tilde{b}_y : C_0^1(B_{K,\varepsilon,y}) \to C(B_{K,\varepsilon,y}), \qquad \tilde{b}_y(f)(x) := \tilde{b}_f(x, y),$$

де $B_\varepsilon(y) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < \varepsilon \right\}$, $B_{K,\varepsilon,y} := B_K \setminus B_\varepsilon(y)$.

При цьому $\tilde{b}_y$ лінійне по f, а з огляду на оцінку (25) і вкладення

$$D(B_{K,\varepsilon,y}) \subset C_0^1(B_{K,\varepsilon,y}), \qquad C(B_{K,\varepsilon,y}) \subset D'(B_{K,\varepsilon,y})$$

це неперервне відображення з $D(B_{K,\varepsilon,y})$ в $D'(B_{K,\varepsilon,y})$, також $\operatorname{supp} \tilde{b}_y(f) \subset \operatorname{supp} f$. Отже, згідно з теоремою Шварца про ядро (теорема 5.2.1 [6]), теоремою 5.2.3 [6] на підставі оцінки (25) і того факту, що $\tilde{b}_y$ відображає $C_0^1(B_{K,\varepsilon,y})$ в $C(B_{K,\varepsilon,y})$, отримуємо, що існує ядро $\tilde{g}(x, y)$, визначене (внаслідок довільності ε) для всіх $x \neq y$, таке, що

$$\tilde{b}_f(x, y) = (\nabla f(x), \tilde{g}(x, y)).$$

Зауважимо, що будь-яку функцію f з $C_0^1(B_K)$ можна подати у вигляді $f = f_1 + f_2$, де $y \notin \operatorname{supp} f_1$ і $x \notin \operatorname{supp} f_2$. Отже, для довільних $f \in C_0^1(B_K)$ та $x \neq y$

$$\tilde{b}_f(x, y) = (\nabla f(x), \tilde{g}(x, y)) + (\nabla f(y), \tilde{g}(y, x)). \tag{26}$$

Використовуючи аналогічні міркування, переконуємося, що для $x \in \mathbb{R}^d$ існує $g(x)$ таке, що

$$\tilde{b}_f(x, x) = (\nabla f(x), g(x)). \tag{27}$$

З (27) та (26) отримуємо, що значення білінійної форми B_f з умови 1

$$B_f(\delta_x, \delta_y) = (\nabla f(x), g(x, y)),$$

де

$$g(x, y) = \begin{cases} g(x), & x = y; \\ \dfrac{1}{2}\tilde{g}(x, y), & x \neq y, \end{cases}$$

і згідно з лемою 1

$$A(f, \mu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{2d}} (\nabla f(x), g(x, y)) \mu(dx)\mu(dy).$$

Відповідно до цієї ж леми для довільних $K > 0$ і $f \in C_0^1(B_K)$, а отже, і для довільної $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ $(\nabla f(x), g(x, y))$ неперервне по (x, y). А це можливо тільки за умови, що відображення g належить класу $C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Далі, оскільки оцінка (25) виконується для довільного околу B_K, що містить $\operatorname{supp} f$, то

$$\forall K > 0 : \sup_{x \in B_K} \| g(x, y) \| < \infty,$$

а отже, $g \in C_*(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

Зауваження 2. Ядро g з теореми 3 можна означити таким чином. Для довільних $x \neq y$ і $f_{i,x} \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$, $i = \overline{1, d}$, таких, що $y \notin \operatorname{supp} f_{i,x}$ та $\nabla f_{i,x}(x) = e_i$, де $e_1, \ldots, e_d$ утворюють базис $\mathbb{R}^d$,

$$(g(x, x), e_i) = A(f_{i,x}, \delta_x),$$

$$(g(x, y), e_i) = 4A\left(f_{i,x}, \frac{\delta_x + \delta_y}{2}\right) - A(f_{i,x}, \delta_x).$$

Звідси також випливає єдиність ядра g.

1. *Скороход А. В.* Measure-valued diffusion // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 3. – С. 458 – 464.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
4. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
5. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов в частных производных: В 2 т. – М.: Мир, 1986. – Т.1. – 464 с.

Одержано 30.07.2001