УДК 517.5

В. И. Рукасов (Славян. пед. ун-т)

НАИЛУЧШИЕ n-ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКОЙ

We obtain the precise values of n-term approximations of q-ellipsoids in the spaces $S_{\varphi}^{p,\mu}$.

Отримано точні значення n-членних наближень q-еліпсоїдів у просторах $S_{\varphi}^{p,\mu}$.

1. Пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$. В работе [1] введены пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$ следующим образом.

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathbb{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит к φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;
2) $(\lambda x_1 + \nu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \nu(x_2, y)$, λ, ν — произвольные числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Пусть, далее, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Каждому элементу $f \in \mathbb{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_{\varphi}(k)$ посредством равенств $\hat{f}_{\varphi}(k) = (f, \varphi_k)$, $k \in N$, и при данном фиксированном $p \in (0; \infty)$ положим

$$S_{\varphi}^{p,\mu} = S_{\varphi}^{p,\mu}(\mathbb{X}) = \left\{ f \in \mathbb{X}\colon \sum_{k=1}^{\infty} \left|\mu_k \hat{f}_{\varphi}(k)\right|^p < \infty \right\}.$$

Элементы $x, y \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_{\varphi}(k) = \hat{y}_{\varphi}(k)$. Таким образом, множество $S_{\varphi}^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathbb{X}$, системами φ и μ и числом p. В случае, когда

$$\mu_k \equiv 1, \quad k \in N,$$

множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$ совпадают с множествами S_{φ}^{p}, которые были введены и изучались в работах [2–5].

Для векторов $x, y \in \mathbb{X}$ расстояние между ними определяется с помощью равенства

$$\rho(x; y)_{p,\mu} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \|x - y\|_{p,\mu} = \|x - y\|_{p,\mu,\varphi} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{x}_{\varphi}(k) - \hat{y}_{\varphi}(k)\right|^p \mu_k^p \right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$ называется вектор Θ, для которого $\hat{\Theta}_{\varphi}(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\Theta, x)_{p,\mu}$, $x \in S_{\varphi}^{p,\mu}$, называется нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_{p,\mu}$. Таким образом,

$$\|x\|_{p,\mu} = \|x\|_{p,\mu,\varphi} = \rho(\Theta; x)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\mu_k \hat{x}_\varphi(k)\right|^p\right)^{1/p}, \quad x \in S_\varphi^{p,\mu}. \tag{1}$$

Если в системе μ все числа μ_k отличны от нуля: $\mu_k > 0$, $k \in N$, то равенство $\|x\|_{p,\mu} = 0$ возможно лишь в случае, когда $x = \Theta$. Отсюда следует, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in N$, норма, введенная равенством (1), удовлетворяет всем необходимым аксиомам и тогда $S_\varphi^{p,\mu}$ — линейное нормированное пространство, содержащее ортогональную систему $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\|\varphi_k\|_{p,\mu} = \mu_k$.

В [1], в частности, доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $\{g_\alpha\}$ — *семейство ограниченных подмножеств множества* N, *зависящих от параметра* α *и таких, что любое число* $n \in N$ *принадлежит всем множествам* g_α *с достаточно большими индексами* α. *Пусть, далее,* $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, $p \in (0; \infty)$, *и*

$$S_\alpha(f) = S_{g(\alpha)}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k)\varphi_k$$

— *частная сумма ряда Фурье* $S[f]_\varphi$ *элемента* f,

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\varphi_k, \tag{2}$$

соответствующая множеству g_α. *Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k \varphi_k$$

наименее уклоняется от f *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_\alpha(f)$, *т. е.*

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_\alpha\|_{p,\mu} = \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}.$$

При этом

$$\|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k \in g_\alpha} \left|\mu_k \hat{f}(k)\right|^p$$

и

$$\lim_{\alpha \to \infty} \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что для любого элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ его ряд Фурье (2) по системе φ сходится к f по норме пространства $S_\varphi^{p,\mu}$, т. е. система φ полна в $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{p,\mu}$ сепарабельно.

2. ψ-Интегралы и характеристические последовательности. Следуя [1], введем в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ объекты, для которых впоследствии изучаются их аппроксимационные характеристики.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathbb{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (2), существует элемент $F \in \mathbb{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) \varphi_k, \tag{4}$$

т. е. когда

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}(k), \quad k \in N, \tag{5}$$

то вектор F называется ψ-интегралом вектора f. В таком случае записывают $F = J^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathbb{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi S_\varphi^{p,\mu}$ — множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих данному пространству $S_\varphi^{p,\mu}$. Если f и F связаны соотношениями (4) (или (5)), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и записывать $f = D^\psi F = F^\psi$.

Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы ψ, которые определяются следующим образом (см., например, [5]).

Пусть $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi(k)| = 0.$$

Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ обозначается множество значений величин $|\psi(k)|$, упорядоченное по их убыванию, через $g(\psi) = g_1, g_2, \ldots$ — система множеств

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in N: |\psi(k)| \geq \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ — последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ — количество чисел $k \in N$, содержащихся в множестве g_n. Последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ называются характеристическими для системы ψ. Заметим, что при таком определении любое число $n^* \in N$ принадлежит всем множествам g_n^ψ с достаточно большими номерами n и всегда

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

3. Наилучшие n-членные приближения. Случай $0 < q \leq p$. Пусть пространство $S_\varphi^{p,\mu} = S_\varphi^{p,\mu}(\mathbb{X})$ определяется пространством $\mathbb{X}$, системой φ, числом $p > 0$ и последовательностью μ. Пусть $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ и

$$e_n(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \inf_{c_k} \left\| f - \sum_{k\in\gamma_n} c_k \varphi_k \right\|_{p,\mu} \tag{6}$$

— величина наилучшего n-членного приближения элемента f в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. Здесь γ_n — произвольный набор из n натуральных чисел, а c_k, $k \in N$, — любые комплексные числа.

Пусть, далее, q — произвольное положительное число, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность неотрицательных чисел, $S_\varphi^{q,\lambda} = S_\varphi^{q,\lambda}(\mathbb{X})$ —

пространство, порожденное множеством $\mathbb{X}$, системой φ, числом q и последовательностью λ; $U_\varphi^{q,\lambda}$ — единичный шар в $S_\varphi^{q,\lambda}$:

$$U_\varphi^{q,\lambda} = \left\{ f \in S_\varphi^{q,\lambda} : \|f\|_{q,\lambda} \le 1 \right\}. \tag{7}$$

Пусть еще $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел и $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ — множество ψ-интегралов всех элементов из $U_\varphi^{q,\lambda}$:

$$\psi U_\varphi^{q,\lambda} = \left\{ F = J^\psi f : f \in U_\varphi^{q,\lambda} \right\}. \tag{8}$$

В настоящем пункте рассматриваются величины

$$e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} e_n(f)_{p,\mu}, \tag{9}$$

где $e_n(f)_{p,\mu}$ — величины, определяемые равенством (6). Предполагаются выполненными условия

$$0 < q \le p, \tag{10}$$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{11}$$

Эти условия обеспечивают включение

$$\psi U_\varphi^{q,\lambda} \subset S_\varphi^{p,\mu}. \tag{12}$$

Действительно, если $f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$, то согласно (5) при любом $k \in N$ $\hat{f}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi^\psi(k)$ и в силу (7) и (8)

$$\left\| f^\psi \right\|_{q,\lambda}^q = \sum_{k=1}^\infty \left| \hat{f}^\psi(k) \right|^q \lambda_k^q \le 1. \tag{13}$$

Поэтому с учетом (10) и (11)

$$\|f\|_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^\infty |\psi_k|^p \left| \hat{f}_\varphi^\psi(k) \right|^p \mu_k^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right|^p \left| \hat{f}_\varphi^\psi(k) \right|^p \lambda_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \hat{f}_\varphi^\psi(k) \right|^p \lambda_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \le C \left\| f^\psi \right\|_{q,\lambda} \le C.$$

Здесь положено

$$C = \sup_k \left| \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right|$$

и использовано неравенство Иенсена: для любой последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \ge 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < q \le p.$$

В принятых здесь обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть p и q — произвольные числа, для которых $0 < q \le p$; ψ, μ и λ — последовательности, удовлетворяющие условию* (11). *Тогда при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} = \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}},$$

где $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, задающаяся соотношениями

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_n' \quad \text{при} \quad k \in g_n^{\psi'} \setminus g_{n-1}^{\psi'}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

ε_n' и $g_n^{\psi'}$ — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi')$ и $g(\psi')$ для последовательности $\psi' = \{\psi_k'\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\psi_k' = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad k \in N,$$

а l^* — некоторое натуральное число.

Доказательство. Эта теорема, а также следующая теорема в случае, когда $\mu_k \equiv \lambda_k \equiv 1$, $k \in N$, доказаны в работах А. И. Степанца [3, 5]. При доказательстве этих теорем будем придерживаться схемы, предложенной в указанных работах.

Если $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, то, обозначая через P_{γ_n} полиномы вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} c_k\varphi_k,$$

согласно предложению 1 получаем

$$e_n^p(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n}\inf_{c_k}\left\|f - P_{\gamma_n}\right\|_{p,\mu}^p = \inf_{\gamma_n}\left\|f - \sum_{k\in\gamma_n}\hat{f}(k)\varphi_k\right\|^p =$$

$$= \inf_{\gamma_n}\left(\|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k\in\gamma_n}\left|\hat{f}(k)\right|^p\mu_k^p\right) = \|f\|_{p,\mu}^p - \sup_{\gamma_n}\sum_{k\in\gamma_n}\left|\hat{f}(k)\right|^p\mu_k^p. \tag{15}$$

Пусть i_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — натуральные числа такие, что

$$\left|\psi_{i_k}'\right| = \left|\psi_{i_k}\frac{\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}}\right| = \overline{\psi}_k, \tag{16}$$

где $\overline{\psi}_k$ — числа, определенные соотношением (14). Тогда согласно (15) с учетом (12) и (5) имеем

$$e_n^p(f)_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_{i_k}\right|^p\left|\hat{f}^\psi(i_k)\right|^p\mu_{i_k}^p - \sup_{\gamma_n,\, k\in\gamma_n}\sum\left|\psi_{i_k}\right|^p\left|\hat{f}^\psi(i_k)\right|^p\mu_{i_k}^p. \tag{17}$$

Принимая во внимание, что если $f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$, то

$$\left\|f^\psi\right\|_{q,\lambda}^q = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\hat{f}^\psi(i_k)\right|^q\lambda_{i_k}^q \le 1, \tag{18}$$

получаем неравенство

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} \le$$

$$\le \sup_{\|f^\psi\|_{q,\lambda}\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_{i_k}\right|^p\left|\hat f^\psi(i_k)\right|^p\mu_{i_k}^p - \sup_{\gamma_n}\sum_{k\in\gamma_n}\left|\psi_{i_k}\right|^p\left|\hat f^\psi(i_k)\right|^p\mu_{i_k}^p\right).$$

Отсюда, полагая

$$m_k = \left|\hat f^\psi(i_k)\right|^q\lambda_{i_k}^q, \qquad k\in N,$$

и учитывая соотношения (16) и (18), имеем

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} \le$$

$$\le \sup_{\sum_{k=1}^\infty m_k\le 1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_{i_k}\frac{\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}}\right|^p m_k^{p/q} - \sup_{\gamma_n}\sum_{k\in\gamma_n}\left|\psi_{i_k}\frac{\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}}\right|^p m_k^{p/q}\right) =$$

$$= \sup_{\sum_{k=1}^\infty m_k\le 1,\, m_k\ge 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\psi}_k^p m_k^r - \sup_{\gamma_n}\sum_{k\in\gamma_n}\overline{\psi}_k^p m_k^r\right), \qquad r = \frac{p}{q}. \tag{19}$$

Для нахождения значений правой части (19) воспользуемся следующей леммой, доказанной А. И. Степанцом в работе [3] (см. также [5]).

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел,* $\alpha_k > 0,\ k\in N,$ *для которой*

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0,$$

и $m = \{m_k\}_{k=1}^\infty$ — *последовательность неотрицательных чисел,* $m_k \ge 0\ \ \forall k\in$ $\in N,$ *удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1.$$

Пусть, далее, r — *любое число,* $r\ge 1,$

$$S^{(r)}(m) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k m_k^r, \qquad S_{\gamma_n}^{(r)}(m) = \sum_{k\in\gamma_n}\alpha_k m_k^r,$$

где γ_n — *произвольный набор из* n *натуральных чисел,*

$$\mathcal{E}_n(m) = \mathcal{E}_n^{\alpha,r}(m) = S^{(r)}(m) - \sup_{\gamma_n} S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$$

и

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{\alpha,r} = \sup_{|m|\le 1}\mathcal{E}_n^{\alpha,r}(m).$$

Тогда для любого натурального n *существует число* $l^* > n$ *такое, что*

$$\mathcal{E}_n = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{20}$$

Число l^* *определяется равенством*

$$\sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}.$$

При этом для последовательности $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, *у которой*

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_k^{-1/r}\left(\sum\limits_{i=1}^{l^*}\alpha_i^{-1/r}\right)^{-r}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*, \end{cases}$$

выполняется равенство

$$\mathscr{E}_n(m') = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r}.$$

Продолжим доказательство теоремы. Полагая $\overline{\psi}_k^p = \alpha_k$, $k \in N$, видим, что в силу (14) так выбранные α_k удовлетворяют требованиям леммы. Поэтому согласно (19) и (20) имеем

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} \le (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\alpha_k^{-1/r}\right)^{-r} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что в множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ имеется элемент f_*, для которого

$$e_n^p(f_*)_{p,\mu} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}. \tag{21}$$

С этой целью положим

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}\varphi_{i_k},$$

где числа i_k выбраны согласно (16) и

$$c_{i_k}^q = \begin{cases} \dfrac{\overline{\psi}_k^{-q}}{\lambda_{i_k}^q}\left(\sum\limits_{i=1}^{l^*}\overline{\psi}_i^{-q}\right)^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*. \end{cases} \tag{22}$$

Элемент h, являясь линейной комбинацией конечного числа элементов φ_j, принадлежит всем пространствам $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{q,\lambda}$ при любых значениях $p > 0$ и $q > 0$, а поскольку

$$\|h\|_{q,\lambda}^q = \sum_{k=1}^{l^*} c_{i_k}^q\lambda_{i_k}^q = 1,$$

то $h \in U_\varphi^{q,\lambda}$. Поэтому, полагая $f_* = J^\psi h$, видим, что $f_* \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$ и $f_*^\psi = 1$. Согласно (22)

$$c_{i_k}^p = \begin{cases} \overline{\psi}_k^{-p} \lambda_{i_k}^{-p} \left(\sum\limits_{i=1}^{l^*} \overline{\psi}_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*. \end{cases}$$

Поэтому

$$\psi_{i_k}^p \left| \frac{\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}} \right|^p c_{i_k}^p = \overline{\psi}_k^p c_{i_k}^p = \begin{cases} \lambda_{i_k}^{-p} \left(\sum\limits_{i=1}^{l^*} \overline{\psi}_i^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}}, & k = 1, 2, \ldots, l^*; \\ 0, & k > l^*. \end{cases}$$

Следовательно, в силу (17) получаем равенство (21):

$$e_n^p(f_*)_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \psi_{i_k} \right|^p \left| \hat{f}_*^{\psi}(i_k) \right|^p \mu_{i_k}^p - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \left| \psi_{i_k} \right|^p \left| \hat{f}_*^{\psi}(i_k) \right|^p \mu_{i_k}^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \psi_{i_k} \right|^p \left| c_{i_k} \right|^p \mu_{i_k}^p - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \left| \psi_{i_k} \right|^p \left| c_{i_k} \right|^p \mu_{i_k}^p =$$

$$= (l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \overline{\psi}_k^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}}.$$

4. Случай $q > p$. Рассмотрим величину (9) при $q > p$. На этот раз условия (11) не обеспечивают вложения (12). Необходимое включение в этом случае гарантируется условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^{pq/(q-p)} < \infty, \qquad \psi'_k = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \qquad k \in N. \tag{23}$$

Действительно, если $\dot{f} \in \psi U_{\varphi}^{q,\lambda}$, то справедливо соотношение (13), и тогда, применяя неравенство Гельдера, находим

$$\| f \|_{p,\mu}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p \left| \hat{f}^{\psi}(k) \right|^p \mu_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^p \left| \hat{f}^{\psi}(k) \right|^p \lambda_k^p \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}^{\psi}(k) \right|^q \lambda_k^q \right)^{\frac{p}{q}} < \infty,$$

т. е. соотношение (12) выполняется.

Теорема 2. *Пусть p и q — произвольные числа, причем $q > p$; ψ, μ и λ — последовательности, удовлетворяющие условию* (23). *Тогда при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p\left(\psi U_{\varphi}^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} = \overline{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}} \left[(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \overline{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}} \overline{\sigma}_2 \right]^{\frac{q-p}{q}},$$

где

$$\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{-q}, \quad \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \overline{\psi}_k^{-pq/(q-p)}, \tag{24}$$

$\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность, задающаяся соотношением* (14), *а число* s *выбрано из условия*

$$\overline{\psi}_s^{-q} \le \frac{1}{s-n} \sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{-q} < \overline{\psi}_{s+1}^{-q}. \tag{25}$$

Такое число s *всегда существует и единственно.*

Доказательство. Будем исходить из неравенства (19), которое верно и в рассматриваемом случае. Далее вместо леммы 1 воспользуемся следующим аналогичным утверждением, пригодным при $r < 1$ (см. [4, 5]).

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел,* $\alpha_k > 0$, $k \in N$, *для которой при данных* $r \in (0, 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)} < \infty,$$

и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность неотрицательных чисел,* $m_k \ge 0$ $\forall k \in$ $\in N$, *удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1.$$

Пусть, далее, $S^{(r)}(m)$, $S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$, $\mathscr{E}_n(m)$ *и* $\mathscr{E}_n$ — *величины, определенные в лемме* 1.

Тогда для любого натурального n

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(\alpha; r) = \sigma_1^{-r}(s)\left[(s-n)^{\frac{1}{1-r}} + \sigma_1^{\frac{r}{1-r}}(s)\sigma_2(s)\right]^{1-r}, \tag{26}$$

где

$$\sigma_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-1/r}, \quad \sigma_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \alpha_k^{1/(1-r)},$$

число s *выбрано из условия*

$$\alpha_s^{-1/r} \le \frac{\sigma_1(s)}{s-n} < \alpha_{s+1}^{-1/r}, \quad s > n.$$

Такое число s *всегда существует и единственно. Верхняя грань в соотношении*

$$\mathscr{E}_n = \sup_{|m|\le 1} \mathscr{E}_n(m)$$

реализуется последовательностью $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, *где*

$$m_k = \begin{cases} \left(\dfrac{t_s}{\alpha_k}\right)^{1/r}, & k = 1, 2, \ldots, s; \\ \dfrac{1 - t_s^{1/r}\sigma_1(s)}{\sigma_2(s)}\alpha_k^{1/(1-r)}, & k > s, \end{cases} \tag{27}$$

$$t_s = \left(\sigma_1(s) + \left(\frac{\sigma_1(s)}{s-n}\right)^{1/(1-r)} \sigma_2(s)\right)^{-r}.$$

Полагая $\overline{\psi}_k^p = \alpha_k$, $k \in N$, видим, что в силу (14) и (23) так выбранные числа α_k удовлетворяют требованиям леммы. Поэтому согласно (19) и (26)

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}\right)_{p,\mu} \le \overline{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}} \left[(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \overline{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}\,\overline{\sigma}_2\right]^{\frac{q-p}{q}}, \tag{28}$$

где величины $\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1(s)$ и $\overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_2(s)$ определяются равенствами (24), а число s выбирается из условия (25). Такое число существует и единственно.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что (28) не может быть строгим неравенством. С этой целью достаточно доказать, что в множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ имеется элемент f_ε, для которого

$$e_n^p(f_\varepsilon)_{p,\mu} > \overline{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}} \left[(s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \overline{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}\,\overline{\sigma}_2\right]^{\frac{q-p}{q}} - \varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$. Такой элемент f_ε конструируется на основе соотношения (27) подобно тому, как это выполнено в [4] или [5].

1. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства S^p с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 264 – 277.
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Там же. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
4. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001. 2).
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – 468 с.

Получено 14.11.2002