УДК 514

**Л. А. Масальцев** (Харьков. нац. ун-т)

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАУССОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В $H^3$

We consider some harmonic maps related to the hyperbolic Gauss map and the Gauss map in the sense of M. Obata.

Розглянуто деякі гармонічні відображення, пов'язані з гіперболічним гауссовим відображенням та з гауссовим відображенням у сенсі М. Обата.

В теории гармонических отображений важным результатом является теорема Э. Ру – Я. Вильмса [1, с. 571] о том, что гауссово отображение поверхности $F^l$ в евклидовом пространстве $R^n$ является гармоническим тогда и только тогда, когда вектор средней кривизны $\overline{H}$ поверхности параллелен в нормальной связности, т. е. $\nabla^{\perp}\overline{H} = 0$. В пространстве Лобачевского $H^n$ кривизны $-1$ существует несколько определений гауссова отображения.

Понятие гиперболического гауссова отображения независимо ввели Ч. Эпстейн [2] и Р. Брайант [3]. Напомним его конструкцию для поверхностей в $H^3$. Из каждой точки поверхности $X(u, v)$ в $H^3$ в направлении нормали $n(u, v)$ проведем геодезическую, которая имеет своим предельным значением точку $g(u, v)$, принадлежащую идеальной границе $\partial H^3$. Если средняя кривизна поверхности $H$ отлична от нуля, то, выбрав ориентацию нормали так, чтобы $H$ была положительной, получим однозначно определенное отображение $g$: $X(u, v) \to g(u, v)$, которое и называется гиперболическим гауссовым отображением. Р. Брайант [3] для поверхностей постоянной средней кривизны 1 в $H^3(-1)$ нашел аналог представления Вейерштрасса, и оказалось, что многие свойства этих поверхностей аналогичны свойствам минимальных поверхностей в $R^3$. В данной статье показано (теорема 1), что гиперболическое гауссово отображение является гармоническим для поверхностей средней кривизны 1 (при этом в качестве идеальной границы $\partial H^3$ использована сфера $S^2$ со стандартной метрикой).

Другой вариант гауссова отображения в $H^n$ был определен М. Обата [4]. Это отображение $\Gamma$ каждой точке поверхности $F^l \subset H^n$ ставит в соответствие вполне геодезическую плоскость $\pi^l \subset H^n$, касающуюся поверхности в данной точке. Как известно (см., например, [5, с. 56]), множество $l$-мерных плоскостей в $H^n$ представимо как риманово симметрическое пространство в $O(n, 1)/O(l, 1) \times \times O(n-l)$. В обзоре А. А. Борисенко и Ю. А. Николаевского указано, что отображение $\Gamma$ в риманово многообразие Грассмана вполне геодезических плоскостей над пространством Лобачевского является гармоническим тогда и только тогда, когда $F^l$ минимально в $H^n$ (см. [5], теорему 18, а также приведенную там библиографию). В данной статье мы рассматриваем грассманово отображение, которое каждой точке поверхности $X(u, v) \subset H^3 \subset R^{3,1}$ ставит в соответствие вектор $n(u, v)$ пространственноподобной нормали к $X(u, v)$ в пространстве Минковского $R^{3,1}$. Такое определение грассманова отображения использовано в работе А. А. Борисенко [6]. В предположении, что на поверхности $n(u, v)$ индуцируется невырожденная риманова метрика, мы показываем (теорема 2), что данное отображение является гармоническим, если средняя кривизна поверхности $X(u, v)$ в $H^3$ постоянна.

При доказательстве теорем используются изотермические координаты на поверхности $X(u, v)$ и поэтому они пригодны только для двумерных поверхностей в $H^3$. Заметим также, что Кокубу в работе [7] рассматривает еще один вариант гауссова отображения в $H^3$ (для минимальных поверхностей) и доказывает некоторые утверждения о его гармоничности.

**Предварительные сведения.** В основном мы будем использовать модель для гиперболического трехмерного пространства $H^3$ в псевдоевклидовом пространстве Минковского $R^{3,1}$

$$H^3 = (x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in R^{3,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x^0 > 0), \tag{1}$$

где метрика в $R^{3,1}$ определена следующим образом:

$$\langle x, y \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^{3} x^i y^i.$$

Известно, что произвольная кривая вида

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} t + y_0 \operatorname{sh} t,$$

где $|x_0|^2 = -1$, $|y_0|^2 = 1$ и $\langle x_0, y_0 \rangle = 0$, является геодезической на псевдосфере $H^3$.

Кроме рассмотренной модели на гиперболоиде в пространстве Минковского нам потребуется еще модель Пуанкаре $H_0^3$ геометрии Лобачевского в шаре $|y| < 1$, $y = (y^1, y^2, y^3)$.

Чтобы перейти от модели $H^3 \subset R^{3,1}$ к модели $H_0^3$ в шаре, надо спроектировать точку $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in H^3$ из точки $(-1, 0, 0, 0)$ до пересечения с плоскостью $x^0 = 0$. Аналитически это преобразование записывается так:

$$y^i = \frac{x^i}{x^0 + 1}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

При этом метрика пространства $H_0^3$ имеет вид

$$ds_0^2 = \frac{4\sum_{i=1}^{3}(dy^i)^2}{\left(1 - \sum_{i=1}^{3}(y^i)^2\right)^2}. \tag{3}$$

Действительно, подставляя дифференциалы $dy^i$, найденные из (2), в (3), получаем

$$ds_0^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 - (dx^0)^2. \tag{4}$$

Теперь приведем необходимые сведения из теории гармонических отображений.

Согласно общей теории гармонических отображений (см. [8], гл. 4, теорема 1. 21 или [5], раздел 5.4), отображение $f\colon (M^m, g) \to (N^n, \overline{g})$ является гармоническим, если его поле напряжений $\tau^i(f)$, $i = 1, \ldots, n$, обращается в нуль:

$$\tau^i(f) = \Delta_M f^i + \overline{\Gamma}^i_{kj} \frac{\partial f^k}{\partial u^\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta} g^{\alpha\beta} = 0, \tag{5}$$

где $\Delta_M$ — оператор Бельтрами – Лапласа на римановом многообразии $M$:

$$\Delta_M f^i(x) = g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial x^\tau}\right).$$

Для доказательства теоремы 1 используем следующий критерий гармоничности отображения $f = (f^1, \ldots, f^{n+1})$ риманова многообразия $M^m$ с метрикой $g = (g_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$, в $n$-мерную сферу $S^n \in R^{n+1}$ со стандартной метрикой $\overline{g}_0$, индуцированной ее погружением в евклидово пространство $R^{n+1}$ [8] (гл. 4, следствие 2.24): необходимым и достаточным условием для того, чтобы отображение $f\colon (M^m, g) \to (S^n, \overline{g}_0)$ было гармоническим, является

$$\Delta_M f(x) = -2e(f)f(x), \qquad x \in M^m, \tag{6}$$

т. е.

$$\Delta_M f^i(x) = -2e(f)f^i(x) \tag{6'}$$

для всех $i = 1, \ldots, n+1$, где через $e(f)$ обозначена плотность энергии отображения $f$:

$$e(f) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(x)\overline{g}_{ij}(f(x))\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f^j(x)}{\partial x^\beta}. \tag{7}$$

**Гармоничность гиперболического гауссова отображения в $H^3$ для поверхностей постоянной средней кривизны 1.** При изучении поверхностей пространства Лобачевского мы используем его модель на гиперболоиде

$$H^3 = ((x^0, x^1, x^2, x^3) \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1, x^0 > 0)$$

в псевдоевклидовом пространстве $R^{3,1}$ с метрикой $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. В этой модели в каждой точке поверхности $X(u,v) \subset H^3$ есть подвижный репер из четырех векторов $X, X_u, X_v, n$, где $n$ — вектор единичной нормали к поверхности в $H^3$. Пусть $X(u,v) = (X^0, X^1, X^2, X^3)(u,v)$ — двумерная регулярная поверхность в $H^3 \subset R^{3,1}$, где

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = -1.$$

Пусть первая и вторая фундаментальные формы поверхности имеют вид

$$ds^2 = e^{2\omega(u,v)}(du^2 + dv^2), \tag{8}$$

$$II = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)du\,dv + N(u,v)dv^2. \tag{9}$$

Символы Кристоффеля метрики (8) таковы:

$$\Gamma^1_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_u & \omega_v \\ \omega_v & -\omega_u \end{pmatrix}, \qquad \Gamma^2_{ij} = \begin{pmatrix} -\omega_v & \omega_u \\ \omega_u & \omega_v \end{pmatrix}.$$

Касательные векторы $X_u, X_v$ и нормаль $n$ к поверхности в $T_X H^3$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} |X_u|^2 = -(X_u^0)^2 + (X_u^1)^2 + (X_u^2)^2 + (X_u^3)^2 = e^{2\omega}, \\ |X_v|^2 = e^{2\omega}, \quad \langle X_u, X_v\rangle = \langle X, X_u\rangle = \langle X, X_v\rangle = 0, \\ |n|^2 = 1, \quad \langle n, X\rangle = \langle n, X_u\rangle = \langle n, X_v\rangle = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Деривационные формулы для сопровождающего репера $X_u$, $X_v$, $n$ поверхности имеют вид

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= \omega_u X_u - \omega_v X_v + Ln + e^{2\omega} X,\\
X_{uv} &= \omega_v X_u + \omega_u X_v + Mn,\\
X_{vv} &= -\omega_u X_u + \omega_v X_v + Nn + e^{2\omega} X,\\
n_u &= -e^{-2\omega}(LX_u + MX_v),\\
n_v &= -e^{-2\omega}(MX_u + NX_v).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Вектор $G(u, v) = X(u, v) + n(u, v)$, принадлежащий световому конусу псевдоевклидова пространства $R^{3,1}$, называется гиперболическим гауссовым отображением поверхности $X(u, v) \subset H^3$ [9, с. 17]. С помощью этого четырехмерного изотропного вектора каждой точке поверхности $X(u, v)$ можно поставить в соответствие вектор $g(n)$, принадлежащий единичной сфере $S^2$:

$$
g(n) := \left(\frac{G^1}{G^0}, \frac{G^2}{G^0}, \frac{G^3}{G^0}\right) = \left(\frac{X^1 + n^1}{X^0 + n^0}, \frac{X^2 + n^2}{X^0 + n^0}, \frac{X^3 + n^3}{X^0 + n^0}\right). \tag{12}
$$

Поскольку мы будем применять критерий гармоничности (6) для отображений, когда целевым многообразием является сфера, нужно воспользоваться моделью $H_0^3$, в которой идеальная граница $\partial H_0^3$ представляет собой сферу $S^2$. Поэтому от модели $H^3 \subset R^{3,1}$, в которой идеальная граница представляет собой световой конус, нужно перейти к конформно-евклидовой модели Пуанкаре $H_0^3$ в единичном шаре $B^3 = ((y^1, y^2, y^3) \,|\, (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 < 1)$. Этот переход осуществляется по формулам (2). Обозначим модельную изометрию (2) через $\phi : H^3 \to H_0^3$. Гиперболическое гауссово отображение в модели $H_0^3$ действует из $\phi(X(u, v))$ с метрикой $\phi^*(ds^2)$, где $ds^2$ задано формулой (8), в $S^2$ со стандартной метрикой $g_0$. Его можно записать в виде $g\phi^{-1} : (\phi(X(u, v)), \phi^*(ds^2)) \to (S^2, g_0)$. Ввиду (4) имеем $\phi^*(ds^2) = ds^2$ и, следовательно, гармоничность отображения $g\phi^{-1}$ равносильна гармоничности отображения $g :$ $(X(u, v), ds^2) \to (S^2, g_0)$.

Поясним формулу (12). Поскольку гиперболическое гауссово отображение точки $X(u_0, v_0)$ по определению есть предельное значение на $\partial H^3$ геодезической $x(t) = X(u_0, v_0)\operatorname{ch} t + n(u_0, v_0)\operatorname{sh} t$, исходящей из точки поверхности $X(u_0, v_0)$ в направлении вектора нормали $n(u_0, v_0)$, в модели Пуанкаре $H_0^3$ гиперболическим гауссовым изображением точки $\phi^{-1}X(u_0, v_0)$ будет предельная точка $(y_0^1, y_0^2, y_0^3)$ на $S^2 = \partial H_0^3$, где

$$
y_0^i = \lim_{t\to\infty} y^i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{x^i(t)}{1 + x^0(t)} =
$$

$$
= \lim_{t\to\infty} \frac{X^i(u_0, v_0)\operatorname{ch} t + n^i(u_0, v_0)\operatorname{sh} t}{1 + X^0(u_0, v_0)\operatorname{ch} t + n^0(u_0, v_0)\operatorname{sh} t} = \frac{X^i(u_0, v_0) + n^i(u_0, v_0)}{X^0(u_0, v_0) + n^0(u_0, v_0)}.
$$

Таким образом, формула (12) представляет собой специальную запись гиперболического гауссова отображения в модели Пуанкаре в шаре.

**Теорема 1.** *Отображение* $g(n)\colon (X(u,v), ds^2) \to (S^2, g_0)$, *заданное формулой* (12), *является гармоническим, если поверхность* $X(u,v)$ *имеет постоянную среднюю кривизну* 1 *в* $H^3$.

***Доказательство.*** Пусть средняя кривизна поверхности $X(u,v) \subset H^3$ равна 1. Тогда, как известно [10, с. 6], функция $F(u,v) = L - N - 2iM$ является голоморфной функцией комплексной переменной $z = u + iv$ и конформной заменой координат можно добиться, чтобы $F(u,v) \equiv 1$; тогда средний коэффициент $M$ второй фундаментальной формы поверхности обратится в нуль. При этом деривационные формулы (11) упрощаются и будем считать, что в них $L = e^{2\omega} + 1$, $M = 0$, $N = e^{2\omega} - 1$. Сначала вычислим плотность энергии отображения $e(g(n))$. Используя (7), (8), (11), имеем

$$e(g) = \frac{1}{2}e^{-2\omega}\left(\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial v}\right|^2\right),$$

$$\frac{\partial g^i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{X^i + n^i}{X^0 + n^0}\right) = \frac{(1 - Le^{-2\omega})\big(X_u^i(X^0 + n^0) - X_u^0(X^i + n^i)\big)}{(X^0 + n^0)^2}.$$

Используя (10), получаем

$$\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|^2 = \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial g^i}{\partial u}\right|^2 = \frac{(1 - Le^{-2\omega})^2 e^{2\omega}}{(X^0 + n^0)^2} = \frac{e^{-2\omega}}{(X^0 + n^0)^2}.$$

Аналогично проверяется, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial v}\right|^2 = \frac{(1 - Ne^{-2\omega})^2 e^{2\omega}}{(X^0 + n^0)^2} = \frac{e^{-2\omega}}{(X^0 + n^0)^2}.$$

Следовательно,

$$e(g(n)) = \frac{e^{-2\omega}}{2}\left(\left|\frac{\partial g}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial v}\right|^2\right) = \frac{e^{-4\omega}}{(X^0 + n^0)^2}. \tag{13}$$

Теперь вычислим лапласиан от координаты $g^i(n)$. Имеем

$$\frac{\partial^2 g^i}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-e^{-2\omega}\,\frac{X_u^i(X^0 + n^0) - X_u^0(X^i + n^i)}{(X^0 + n^0)^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-2\omega}}{(X^0 + n^0)^3}\Big(2\omega_u(X^0 + n^0)\big(X_u^i(X^0 + n^0) - X_u^0(X^i + n^i)\big) -$$

$$- \big(\omega_u X_u^i - \omega_v X_v^i + (e^{2\omega} + 1)n^i + e^{2\omega}X^i\big)(X^0 + n^0)^2 +$$

$$+ \big(\omega_u X_u^0 - \omega_v X_v^0 + (e^{2\omega} + 1)n^0 + e^{2\omega}X^0\big)(X^i + n^i)(X^0 + n^0) -$$

$$- 2e^{-2\omega}X_u^0\big(X_u^i(X^0 + n^0) - X_u^0(X^i + n^i)\big)\Big).$$

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 g^i}{\partial v^2} = \frac{e^{-2\omega}}{(X^0 + n^0)^3}\Big(-2\omega_v(X^0 + n^0)\big(X_v^i(X^0 + n^0) - X_v^0(X^i + n^i)\big) +$$

$$+ \big(-\omega_u X_u^i + \omega_v X_v^i + (e^{2\omega} - 1)n^i + e^{2\omega}X^i\big)(X^0 + n^0)^2 -$$

$$- (X^i + n^i)(X^0 + n^0)\big(-\omega_u X_u^0 + \omega_v X_v^0 + (e^{2\omega} - 1)n^0 + e^{2\omega} X^0\big) -$$
$$- 2e^{-2\omega} X_v^0 \Big(X_v^i (X^0 + n^0) - X_v^0 (X^i + n^i)\Big)\Big).$$

Складывая выражения для вторых производных и умножая на $e^{-2\omega}$, получаем формулу для оператора Бельтрами – Лапласа от функции $g^i$:

$$\Delta_M g^i = \frac{2e^{-4\omega}}{(X^0 + n^0)^3}\Big(-n^i (X^0 + n^0)^2 +$$
$$+ (X^0 + n^0)\Big((X^i + n^i)n^0 - e^{-2\omega}(X^0 + n^0)(X_u^0 X_u^i + X_v^0 X_v^i) +$$
$$+ e^{-2\omega}(X^i + n^i)\big((X_u^0)^2 + (X_v^0)^2\big)\Big)\Big). \tag{14}$$

Теперь, согласно критерию гармоничности отображения (6), достаточно убедиться в том, что

$$\Delta_M g^i = -2e(g) g^i = -\frac{2e^{-4\omega}(X^i + n^i)}{(X^0 + n^0)^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя в левую часть данной системы выражения из (14), получаем систему уравнений, из которой будет вытекать гармоничность гиперболического гауссова отображения:

$$X^i + n^i = n^i (X^0 + n^0)^2 - (X^0 + n^0)(X^i + n^i)n^0 + e^{-2\omega}(X^0 + n^0)(X_u^0 X_u^i + X_v^0 X_v^i) -$$
$$- e^{-2\omega}(X^i + n^i)\big((X_u^0)^2 + (X_v^0)^2\big), \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Покажем, что данная система уравнений имеет место. Воспользуемся тем, что матрица $A$, составленная из векторов-строк $X^i$, $e^{-\omega}X_u^i$, $e^{-\omega}X_v^i$, $n^i$, является псевдоортогональной, т. е. принадлежит группе $SO\ (1, 3)$,

$$A = \begin{pmatrix} X^0 & X^1 & X^2 & X^3 \\ e^{-\omega}X_u^0 & e^{-\omega}X_u^1 & e^{-\omega}X_u^2 & e^{-\omega}X_u^3 \\ e^{-\omega}X_v^0 & e^{-\omega}X_v^1 & e^{-\omega}X_v^2 & e^{-\omega}X_v^3 \\ n^0 & n^1 & n^2 & n^3 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая элементы первого столбца данной матрицы, имеем

$$-(X^0)^2 + (n^0)^2 + e^{-2\omega}\big((X_u^0)^2 + (X_v^0)^2\big) = -1.$$

Упрощая с помощью этого соотношения систему (15), получаем эквивалентную систему уравнений

$$0 = X^0 X^i - n^0 n^i - e^{-2\omega}(X_u^0 X_u^i + X_v^0 X_v^i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{15'}$$

Данная система, очевидно, имеет место, поскольку выражает псевдоортогональность первого столбца матрицы $A$ по отношению к остальным столбцам, откуда и вытекает справедливость теоремы.

***Пример* 1.** Рассмотрим семейство поверхностей постоянной средней кривизны 1, называемых „кузенами" катеноида, в $H^3$ (впервые найденное Р. Брайантом [3]), зависящее от параметра $a > 0$ [8, с. 20]:

$$X^0 = \frac{1}{4a}\big((1 + a)^2 \operatorname{ch}(a - 1)u + (1 - a)^2 \operatorname{ch}(a + 1)u\big),$$

$$
\begin{aligned}
X^1 &= \frac{1}{2a}(1-a)^2 \operatorname{ch} u \cos av,\\
X^2 &= \frac{1}{2a}(1-a)^2 \operatorname{ch} u \sin av,\\
X^3 &= \frac{1}{4a}((1+a)^2 \operatorname{sh}(a-1)u + (1-a)^2 \operatorname{sh}(a+1)u),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где параметр $a$ удовлетворяет условию $|a| \neq 1$ (в противном случае поверхность вырождается в линию).

Первая фундаментальная форма „кузена" катеноида имеет вид

$$
ds^2 = \frac{(1-a^2)^2}{4} \operatorname{ch}^2 u (du^2 + dv^2). \tag{17}
$$

После некоторых вычислений можно найти вектор нормали $n$, где

$$
n^0 = -\frac{(-3+a^2)\operatorname{ch} au + 1/2(1+a)^2 \operatorname{ch}(a-2)u + 1/2(1-a)^2 \operatorname{ch}(a+2)u}{4a \operatorname{ch} u},
$$

$$
n^1 = -\frac{\left(-3-a^2+(1-a^2)\operatorname{ch} 2u\right)\cos av}{4a \operatorname{ch} u},
$$

$$
n^2 = -\frac{\left(-3-a^2+(1-a^2)\operatorname{ch} 2u\right)\sin av}{4a \operatorname{ch} u},
$$

$$
n^3 = -\frac{(-3+a^2)\operatorname{sh} au + 1/2(1+a)^2 \operatorname{sh}(a-2)u + 1/2(1-a)^2 \operatorname{sh}(a+2)u}{4a \operatorname{ch} u}.
$$

Знак у нормали $n$ выбран таким образом, чтобы средняя кривизна поверхности (16) была равна 1 (если изменить знак, то средняя кривизна будет равной $-1$).

Гиперболическое гауссово отображение „кузена" катеноида (16) $g = (g^i) = (X^i + n^i)/(X^0 + n^0)$ имеет вид

$$
g^1 = \frac{\cos av}{\operatorname{ch}(au)}, \quad g^2 = \frac{\sin av}{\operatorname{ch}(au)}, \quad g^3 = \operatorname{th}(au). \tag{18}
$$

Метрика гиперболического гауссова образа $g(X)$ в координатах $u, v$ такова:

$$
dg^2 = \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2(au)}(du^2 + dv^2). \tag{19}
$$

Согласно теореме 1, отображение (18) $g : (M^2, ds^2) \to (S^2, dg^2)$, переводящее точку с координатами $(u, v) \in M^2$ в точку на $g(M^2) \subset S^2$ с такими же координатами, является гармоническим, в чем можно убедиться непосредственным расчетом. Гауссова кривизна метрики (17) „кузена" катеноида отрицательна, а гауссова кривизна $g(X)$ равна 1.

**Грассманово отображение по М. Обата поверхности в пространстве Лобачевского $H^3$ и его гармоничность.** Пусть двумерная поверхность $X(u, v) \subset H^3 \subset R^{3,1}$. Напомним, что если координаты $(u, v)$ изотермические, то репер $X$, $e^{-2\omega}X_u$, $e^{-2\omega}X_v$, $n$ псевдоортогональный, причем первый вектор мнимоединичный, а остальные три пространственноподобные. Трехмерная гиперплоскость $\pi_3$, натянутая на векторы $X(u, v)$, $X_u$, $X_v$, при пересечении с

$H^3$ определяет двумерную вполне геодезическую плоскость $\pi_2 \subset H^3$, касательную к поверхности $X(u, v)$. Согласно М. Обата [4], под грассмановым образом двумерной поверхности $X(u, v)$ понимают множество всех вполне геодезических 2-плоскостей $\pi_2$, огибающих данную поверхность. Каждой такой плоскости в точке $X(u, v)$ однозначно соответствует пространственноподобный единичный вектор нормали $n(u, v)$, который можно параллельно перенести в начало координат в $R^{3,1}$. Поэтому мы определим грассманов образ $n(X)$ как двумерную поверхность $n(u, v)$, расположенную в гиперквадрике $\sum \subset R^{3,1}$, где

$$\Sigma = (x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in R^{3,1} : |x|^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1).$$

Согласно Дж. Вольфу [11] (теорема 2.4.4), подмногообразие $\sum$ с метрикой $ds^2 = -(dn^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (dn^i)^2$ есть полное псевдориманово подмногообразие постоянной секционной кривизны 1 с сигнатурой (1, 2). Вычислим метрику грассманова образа $n(X) \subset \sum$.

**Лемма.** *Пусть двумерная поверхность $X(u, v)$, погруженная в $H^3$, имеет первую и вторую фундаментальные формы, заданные выражениями* (8), (9). *Тогда*:

1) *метрическая форма $dn^2$ ее грассманова образа $n(X) \subset \sum$ имеет вид*

$$dn^2 = e^{-2\omega}((L^2 + M^2)du^2 + 2M(L+N)du\,dv + (M^2 + N^2)dv^2); \tag{20}$$

2) *грассманов образ $n(X)$ вырожден тогда и только тогда, когда внешняя кривизна поверхности $X(u, v)$ равна нулю: $K_{\text{ext}} = 0$.*

***Доказательство.*** 1. Используя определение метрики на $\sum$, деривационные формулы (11) и соотношения псевдоортогональности (10), имеем

$$dn^2 = -(dn^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dn^i)^2 = e^{-4\omega}\Bigg(-\Big((LX_u^0 + MX_v^0)du + (MX_u^0 + NX_v^0)dv\Big)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{3}\Big((LX_u^i + MX_v^i)du + (MX_u^i + NX_v^i)dv\Big)^2\Bigg) =$$
$$= e^{-2\omega}((L^2 + M^2)du^2 + 2M(L+N)du\,dv + (M^2 + N^2)dv^2).$$

2. Вычисляя дискриминант $D$ метрики (20), получаем $D = e^{-4\omega}(LN - M^2)^2$. Поскольку имеет место уравнение Гаусса

$$K_{\text{int}} = -\frac{\Delta\omega}{e^{2\omega}} = \frac{LN - M^2}{e^{4\omega}} - 1 = K_{\text{ext}} - 1,$$

то вырождение грассманова образа происходит, когда внешняя кривизна поверхности в $H^3$ равна нулю или, что равносильно, когда внутренняя кривизна $X(u, v)$ равна $-1$.

Выясним теперь следующий вопрос: при каких условиях невырожденное грассманово отображение $f : (X(u, v), ds^2) \to (n(X)(u, v), dn^2)$, где $f^1(u, v) = u$, $f^2(u, v) = v$, метрика $ds^2$ задана формулой (8), а метрика $dn^2$ — формулой (20), будет гармоническим ?

**Теорема 2.** *Отображение $f : (X(u, v), ds^2) \to (n(X), dn^2)$ с невырожденным грассмановым образом является гармоническим тогда и только тогда, когда $X(u, v)$ имеет постоянную среднюю кривизну в $H^3$.*

***Доказательство.*** Поскольку отображение задается уравнениями $f^1 = u$, $f^2 = v$, т. е. координаты на $X(u, v)$ и $n(X)$ общие и $\Delta_X = e^{-2\omega}(\partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2)$, то условия (5) обращения в нуль поля напряжений отображения $f$ принимают вид (через $\overline{g}_{ik}$ обозначены коэффициенты метрики (20))

$$a)\ \overline{\Gamma}^1_{11} + \overline{\Gamma}^1_{22} = 0, \qquad b)\ \overline{\Gamma}^2_{11} + \overline{\Gamma}^2_{22} = 0.$$

Условие a) преобразуется следующим образом:

$$\overline{\Gamma}^1_{11} + \overline{\Gamma}^1_{22} = \overline{g}^{11}\left(\frac{\partial \overline{g}_{12}}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{22})\right) +$$

$$+ \overline{g}^{12}\left(\frac{\partial \overline{g}_{12}}{\partial u^1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}(\overline{g}_{22} - \overline{g}_{11})\right) = 0.$$

Аналогично, условие b) примет вид

$$\overline{g}^{12}\left(\frac{\partial \overline{g}_{12}}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{22})\right) + \overline{g}^{22}\left(\frac{\partial \overline{g}_{12}}{\partial u^1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}(\overline{g}_{22} - \overline{g}_{11})\right) = 0.$$

Поскольку мы предполагаем, что грассманов образ невырожден, то $\det(\overline{g}_{ij}) > 0$. Отсюда следует система уравнений

$$\frac{\partial \overline{g}_{12}}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^1}(\overline{g}_{22} - \overline{g}_{11}),$$

$$\frac{\partial \overline{g}_{12}}{\partial u^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^2}(\overline{g}_{11} - \overline{g}_{22}).$$

Подставляя в нее значения $\overline{g}_{ik}$ из (20), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(M(L+N)e^{-2\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left((N^2 - L^2)e^{-2\omega}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(M(L+N)e^{-2\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left((L^2 - N^2)e^{-2\omega}\right).$$

Упрощая ее, получаем систему дифференциальных уравнений

$$(L+N)_v M + (L+N)M_v - 2\omega_v(L+N)M = \frac{1}{2}(N^2 - L^2)_u - \omega_u(N^2 - L^2),$$

$$(L+N)_u M + (L+N)M_u - 2\omega_u(L+N)M = \frac{1}{2}(L^2 - N^2)_v - \omega_v(L^2 - N^2).$$

Подставляя в нее вместо $\omega_v(L+N)$, $\omega_u(L+N)$ их выражения из уравнений Кодацци

$$L_v - M_u = \omega_v(L+N), \qquad N_u - M_v = \omega_u(L+N),$$

находим систему уравнений

$$M(N_v + 2M_u - L_v) + L(L_u + 2M_v - N_u) = 0,$$

$$N(N_v + 2M_u - L_v) + M(L_u + 2M_v - N_u) = 0.$$

Поскольку $LN - M^2 \neq 0$, так как $n(X)$ невырождено, то имеем систему уравнений

$$N_v + 2M_u - L_v = 0,$$
$$L_u + 2M_v - N_u = 0,$$

которая равносильна условиям Коши – Римана голоморфности функции $F(u, v) = L - N - 2iM$ как функции комплексной переменной $w = u + iv$. Известно, что голоморфность функции $F(u, v)$ равносильна постоянству средней кривизны поверхности: $H = (L + N)e^{2\omega} = \mathrm{const}$, что и доказывает теорему.

Рассмотрим некоторые примеры построения гармонических отображений поверхностей, которые следуют из доказанной теоремы.

***Пример* 2.** Вполне геодезическая 2-плоскость $H^2 \subset H^3$. Ее уравнения можно задать (с точностью до движения) следующим образом:

$$H^2(u, v) := x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = \left(\sqrt{u^2 + v^2 + 1}, u, v, 0\right).$$

Нормалью к вполне геодезической плоскости в точках $(u, v)$ будет, очевидно, $n = (0, 0, 0, 1)$. Отсюда вытекает, что грассманов образ этой вполне геодезической плоскости есть $n(H^2) = (0, 0, 0, 1) = \mathrm{const}$. Как известно, постоянное отображение римановых многообразий, т. е. отображение, которое переводит все пространство в точку, есть гармоническое отображение.

***Пример* 3.** Орисфера $O^2 \subset H^3$. Ее параметризацию, например, можно выбрать следующим образом:

$$O^2(u, v) := \left(\frac{1}{2}\left(c(u^2 + v^2) + \frac{1}{c} + c\right), cu, cv, \frac{1}{2}\left(c(u^2 + v^2) + \frac{1}{c} - c\right)\right),$$

где $c = \mathrm{const} > 0$. Вектор нормали к орисфере имеет вид

$$n = \left(\frac{1}{2}\left(c(u^2 + v^2) - \frac{1}{c} + c\right), cu, cv, \frac{1}{2}\left(c(u^2 + v^2) - \frac{1}{c} - c\right)\right),$$

поэтому $ds^2 = dn^2 = c^2(du^2 + dv^2)$, и мы имеем тождественное отображение $R^2$ с плоской метрикой в себя, которое, очевидно, является гармоническим отображением.

***Пример* 4.** Рассмотрим грассманов образ геликоида в $H^3$

$$X(u, v) = (\operatorname{ch}(au)\operatorname{ch} v, \operatorname{sh}(au)\operatorname{ch} v, \cos u \operatorname{sh} v, \sin u \operatorname{sh} v).$$

Найдем вектор нормали

$$n = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \operatorname{th}^2 v}}(\operatorname{th} v \operatorname{sh}(au), \operatorname{th} v \operatorname{ch}(au), a\sin u, -a\cos u).$$

Первая фундаментальная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = (a^2 \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v)du^2 + dv^2,$$

а вторая такова:

$$II = \frac{2a\,du\,dv}{\sqrt{a^2 + \operatorname{th}^2 v}}.$$

Главные кривизны находятся из уравнения

$$|b_{ij} - kg_{ij}| = k^2(a^2 \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v) - \frac{a^2}{a^2 + \operatorname{th}^2 v} = 0:$$

$$k_1 = -k_2 = \frac{a \operatorname{ch} v}{a^2 \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v}.$$

Следовательно, данная поверхность минимальна в $H^3$. Метрика $n(X)$ есть

$$dn^2 = \frac{a^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v} du^2 + \frac{a^2}{(a^2 \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v)^2} dv^2.$$

Согласно доказанной выше теореме, поскольку поверхность минимальна, отображение $f^1(u, v) = u$, $f^2(u, v) = v$ на ее грассманов образ с метрикой $dn^2$ гармоническое. Заметим, что метрика $dn^2$ невырождена и имеет так же, как и $ds^2$, отрицательную гауссову кривизну.

***Пример 5.*** Используя семейство „кузенов" катеноидов (16), можно получить еще одно гармоническое отображение, $f^1(u, v) = u$, $f^2(u, v) = v$, действующее из $R^2$ с метрикой $ds^2 = (1 - a^2)^2 \operatorname{ch}^2 u (du^2 + dv^2)/4$ в $R^2$ с метрикой

$$dn^2 = \frac{1}{4 \operatorname{ch}^2 u} \left( \left(2 + (1 - a^2) \operatorname{ch}^2 u\right)^2 du^2 + \left(-2 + (1 - a^2) \operatorname{ch}^2 u\right)^2 dv^2 \right).$$

Обе метрики имеют отрицательную гауссову кривизну, а $dn^2$ невырождена, если $|a| > \sqrt{3}$.


1. *Ruh E. A., Vilms J.* The tension field of Gauss map // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – **199**. – P. 569–573.
2. *Epstein Ch. L.* The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflection // J. reine und angew. Math. – 1986. – **372**. – S. 96–135.
3. *Bryant R.* Surfaces of mean curvature 1 in hyperbolic space // Asterisque. – 1987. – **154 / 155**. – P. 321–347.
4. *Obata M.* The Gauss map of immersion of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature // J. Different. Geom. – 1968. – **2**, № 2. – P. 217–223.
5. *Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, вып. 2. – С. 41–83.
6. *Борисенко А. А.* О поверхностях неположительной внешней кривизны в пространствах постоянной кривизны // Мат. сб. – 1981. – **114**, № 3. – С. 339–354.
7. *Kokubu M.* Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space // Tohoku Math. J. – 1997. – **49**. – P. 367–377.
8. *Urakawa H.* Calculus of variations and harmonic maps. – Providence: Amer. Math. Soc., 1993. – 249 p.
9. *Rosenberg H.* Bryant surfaces. – Paris, 1999. – 53 p. – (Preprint / Univ. Paris-VII; № 99-4).
10. *Wente H. C.* Constant mean curvature immersions of Enneper type // Mem. Amer. Math. Soc. – 1992. – **478**. – P. 1–78.
11. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. – М.: Наука, 1982. – 480 с.


Получено 02.07.2001