УДК 517.537.72

**Л. Я. Микитюк, М. М. Шеремета** (Львів. нац. ун-т)

# ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ЗАЛИШКУ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

For the Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ with nonnegative exponents and the zero abscissa of absolute convergence, we investigate the asymptotic behavior of remainder $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \exp\{\delta\lambda_k\}$, $\delta < 0$, as $n \to \infty$.

Для ряду Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ з невід'ємними показниками і нульовою абсцисою абсолютної збіжності досліджено асимптотичну поведінку залишку $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \exp\{\delta\lambda_k\}$, $\delta < 0$, при $n \to \infty$.

**1. Вступ.** Нехай $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Позначимо через $\Pi_k(\lambda)$ клас експоненціальних многочленів вигляду $\sum_{n=1}^{k} a_n \exp\{s\lambda_n\}$. Для $\delta < 0$ покладемо $E_n(F, \delta) = \inf\{\| F - P \|_\delta : P \in \Pi_k(\lambda)\}$, де $\| F - P \|_\delta = \sup\{|F(\delta + it) - P(\delta + it)|: t \in \mathbb{R}\}$. Тоді

$$|a_{n+1}| \exp\{\delta\lambda_{n+1}\} \le E_n(F, \delta) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\delta\lambda_k\}. \tag{2}$$

Нерівності (2) доведено в [1], але з огляду на простоту наведемо їх доведення в п. 2. Використовуючи ці ж нерівності та застосовуючи шкалу зростання, в [1, 2] встановлено зв'язок між зростанням максимального члена ряду (1) і поведінкою $E_n(F, \delta)$. У даній статті ми відмовимося від шкали зростання, вкажемо на зв'язок між асимптотичними поведінками залишку $R_n(F, \delta) := \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \exp\{\delta\lambda_k\}$ ряду Діріхле (1) та його коефіцієнтів $a_n$, звідки з огляду на (2) отримаємо зв'язок між асимптотичними поведінками $E_n(F, \delta)$ і $a_n$.

Надалі будемо вважати, що $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$. Зауважимо, що коли $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, то коефіцієнти $a_n^0$ мажоранти Ньютона ряду Діріхле (1) задовольняють умову $\varkappa_n^0(F) := \left(\ln a_n^0 - \ln a_{n+1}^0\right)/(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \nearrow 0$, $n \to \infty$ [3]. Якщо ряд Діріхле збігається зі своєю мажорантою Ньютона, то $\varkappa_n(F) := (\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|)/(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \nearrow 0$, $n \to \infty$.

Будемо розглядати дещо ширший клас рядів Діріхле, близьких до своїх мажорант Ньютона, тобто таких, що $|a_n| \to \infty$, $n \to \infty$, і

$$\varkappa := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} > -\infty. \tag{3}$$

З умови $|a_n| \to \infty$, $n \to \infty$, випливає $\varkappa \le 0$.

© Л. Я. МИКИТЮК, М. М. ШЕРЕМЕТА, 2003

Справедлива така теорема.

**Теорема 1.** *Нехай коефіцієнти ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності задовольняють умову (3) і* $|a_n| \to \infty$, $n \to \infty$, *а показники цього ряду — умову*

$$h := \lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0. \tag{4}$$

*Тоді для кожного* $\delta < \kappa$

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \frac{R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}}{|a_n|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}}{|a_n|} \le 1 + \frac{1}{\exp\{-(\delta-\kappa)h\}-1}. \tag{5}$$

З теореми 1 безпосередньо випливає такий наслідок.

***Наслідок 1.*** *Якщо* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$, $|a_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *і*

$$\frac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

*то для кожного* $\delta < 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}}{|a_n|} = 1. \tag{7}$$

Справедливі також наступні два наслідки.

***Наслідок 2.*** *Нехай* $|a_n| \nearrow \infty$ *і* $\kappa_n(F) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Для того щоб для кожного* $\delta < 0$ *виконувалась рівність* (7), *необхідно і достатньо, щоб* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

***Наслідок 3.*** *Якщо* $\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$ *і* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *то для кожного* $\delta < 0$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}}{|a_n|} = 1. \tag{8}$$

Перейдемо до порівняння $\ln\left(R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}\right)$ і $\ln|a_n|$. Безпосередньо з теореми 1 випливає такий наслідок.

***Наслідок 4.*** *Якщо* $|a_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *виконується умова* (6) *і* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0$, $n \ge 0$, *то для кожного* $\delta < 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}\right)}{\ln|a_n|} = 1. \tag{9}$$

В цьому наслідку умова додатності кроку послідовності $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ не є обов'язковою, на що вказує теорема 2.

Для $t \ge 0$ позначимо

$$\Delta n(t) := \sum_{t \le \lambda_n < t+1} 1.$$

**Теорема 2.** *Нехай коефіцієнти ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності задовольняють умову (6) і* $|a_n| \to \infty$, $n \to \infty$. *Для того щоб для кожного* $\delta < 0$ *виконувалась рівність* (9), *необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \Delta n(\lambda_n)}{\ln|a_n|} = 0. \tag{10}$$

Позначимо через $S_0^*(\lambda)$ клас абсолютно збіжних в $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ рядів Діріхле (1) із заданою послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, що $|a_n| \to \infty$, $n \to \infty$, і виконується умова (6).

**Теорема 3.** *Для того щоб для кожної функції* $F \in S_0^*(\lambda)$ *виконувалась рівність* (9), *необхідно і достатньо, щоб* $\sup\{\Delta n(t) : t \geq 0\} < +\infty$.

Позначимо через $S_0^{**}(\lambda)$ клас абсолютно збіжних в $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ рядів Діріхле (1) із заданою послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, для яких $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

**Теорема 4.** *Для того щоб для кожної функції* $F \in S_0^{**}(\lambda)$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\left(R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}\right)}{\ln|a_n|} = 1, \tag{11}$$

*необхідно і достатньо, щоб* $\sup\{\Delta n(t) : t \geq 0\} < +\infty$.

Наступні два твердження доповнюють теореми 2 – 4 у випадку, коли умова (6) може не виконуватись.

**Твердження 1.** *Нехай* $\psi$ — *додатна неперервно диференційовна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $x / \psi(x) \nearrow +\infty$, $x \to +\infty$. *Якщо* $\ln|a_n| = (1 + o(1))\lambda_n / \psi(\lambda_n)$ *і* $\ln n = o(\lambda_n / \psi(\lambda_n))$ *при* $n \to +\infty$, *то виконується рівність* (9).

**Твердження 2.** *Нехай* $\psi$ — *додатна неперервно диференційовна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $x / \psi(x) \nearrow +\infty$, $x \to +\infty$. *Якщо* $\ln n(t) \leq t / \psi(t)$, $t \geq t_0$ *і* $\lambda_n / \psi(\lambda_n) \ln|a_n| \to 0$, $n \to \infty$, *то виконується рівність* (11).

**2. Доведення нерівностей (2).** Оскільки

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\{ixt\}\,dt = 0$$

для довільного $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, то для кожного експоненціального многочлена $P \in \Pi_k(\lambda)$ з коефіцієнтами $b_j$ і довільних $\beta \in \mathbb{R}$ та $n > k$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} P(\beta + it)\exp\{-it\lambda_{n+1}\}\,dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} b_j \exp\{\beta\lambda_j\} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\{it(\lambda_j - \lambda_{n+1})\}\,dt = 0.$$

Тому, якщо позначимо

$$S_m(s) = \sum_{k=0}^{m} a_k \exp\{s\lambda_k\},$$

для будь-якого $n < m$ і $P \in \Pi_n(\lambda)$ одержимо

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (S_m(\delta + it) - P(\delta + it))\exp\{-it\lambda_{n+1}\}\,dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \exp\{\delta\lambda_k + it(\lambda_k - \lambda_{n+1})\}\,dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a_{n+1}\exp\{\delta\lambda_{n+1}\}dt = a_{n+1}\exp\{\delta\lambda_{n+1}\},$$

звідки $|a_{n+1}|\exp\{\delta\lambda_{n+1}\}\le\|S_m-P\|_\delta$. Оскільки $\delta<0$, то послідовність $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ рівномірно збігається до $F$ у півплощині $\{s:\operatorname{Re}s\le\delta\}$. Тому $\|S_m-P\|_\delta\to\|F-P\|_\delta$, $m\to\infty$, і, отже, внаслідок довільності $m$ з останньої нерівності отримуємо $|a_{n+1}|\exp\{\delta\lambda_{n+1}\}\le\|F-P\|_\delta$ для кожного експоненціального многочлена $P\in\Pi_n(\lambda)$, звідки випливає перша з нерівностей (2).

Нехай $S_n$ — часткова сума ряду (1). Тоді

$$E_n(F,\beta)\le\|F-S_n\|_\delta = \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\exp\{\delta\lambda_k+it\lambda_k\}\right|: t\in\mathbb{R}\right\}\le$$

$$\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\exp\{\delta\lambda_k\},$$

тобто отримуємо другу з нерівностей (2).

**2. Доведення теореми 1 та наслідків 2 і 3.** Нехай $\delta<\varkappa$. З умов (3) і (4) для будь-яких $\varkappa^*\in(\delta,\varkappa)$ та $h^*\in(0,h)$ і всіх $n\ge n_0=n_0(\varkappa^*,h^*)$ маємо $\ln|a_{n+1}|-\ln|a_n|\le-\varkappa^*(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ і $\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge h^*$. Тому для $n\ge n_0$

$$R_n(F,\delta) = |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{|a_n|}\exp\{\delta(\lambda_k-\lambda_n)\}\right) =$$

$$= |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\exp\{\ln|a_k|-\ln|a_n|+\delta(\lambda_k-\lambda_n)\}\right) =$$

$$= |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\exp\left\{\sum_{j=n}^{k-1}\ln|a_{j+1}|-\ln|a_j|+\delta(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\}\right)\le$$

$$\le |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\exp\left\{\sum_{j=n}^{k-1}(\delta-\varkappa^*)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\}\right)\le$$

$$\le |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\exp\{(\delta-\varkappa^*)h^*(k-n)\}\right) =$$

$$= |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{(\delta-\varkappa^*)h^*k\}\right) =$$

$$= |a_n|e^{\delta\lambda_n}\left(1+\frac{1}{\exp\{-(\delta-\varkappa^*)h^*\}-1}\right).$$

Оскільки $|a_n|e^{\delta\lambda_n}<R_n(F,\delta)$, звідси легко одержуємо нерівності

$$1\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}}{|a_n|}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}}{|a_n|}\le 1+\frac{1}{\exp\{-(\delta-\varkappa^*)h^*\}-1}$$

і, враховуючи довільність чисел $\varkappa^*$ та $h^*$, отримуємо нерівності (5). Теорему 1 доведено.

Доведемо наслідок 2. Достатність умови $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, ві наслідку 1. Якщо ж $\lambda_{n_j+1} - \lambda_{n_j} \leq H < +\infty$ для зростаючої послі $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ натуральних чисел, то, оскільки $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, одержимо

$$R_{n_j}(F, \delta)\exp\left\{|\delta|\lambda_{n_j}\right\} \geq |a_{n_j}| + |a_{n_j+1}|\exp\left\{\delta\left(\lambda_{n_j+1} - \lambda_{n_j}\right)\right\} \geq$$
$$\geq |a_{n_j}|(1 + \exp\{\delta H\}),$$

тобто (7) не виконується.

Нарешті, доведемо наслідок 3. Нехай $a_n^0$ — коефіцієнти мажора тона ряду Діріхле (1). Тоді $a_n^0 \to +\infty$, $n \to \infty$, $|a_n| \leq a_n^0$ для всіх $n$ $= a_{n_k}^0$ для деякої зростаючої послідовності $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральних $\kappa_n^0(F) \nearrow 0$, $n \to \infty$ [3]. Тому, якщо покласти $R_n^0(\delta) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^0 \exp\{$ наслідком 2 $R_n^0(\delta)e^{|\delta|\lambda_n} = (1 + o(1))a_n^0$, $n \to \infty$. Оскільки $R_n(F, \delta) \leq$ $|a_{n_k}| = a_{n_k}^0$, звідси одержуємо співвідношення $R_{n_k}(F, \delta)\exp\{|\delta$ $\leq (1 + o(1))|a_{n_k}|$, $k \to \infty$, з якого з урахуванням нерівності $|a_n| < R_n(F$ отримуємо (8).

**4. Доведення теореми 2.** Спочатку зауважимо, що з умови (6) для $\varepsilon > 0$ і всіх $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ маємо $|a_n| > e$, $|\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|| < \varepsilon(\lambda_{n+}$ отже,

$$\left|\ln|a_n| - \ln|a_p|\right| < \varepsilon|\lambda_n - \lambda_p|, \quad n \geq n_0, \quad p \geq n_0.$$

Якщо $|\lambda_n - \lambda_p| \leq 1$, то з (12) одержуємо

$$|a_n|^{1-\varepsilon} \leq |a_p| \leq |a_n|^{1+\varepsilon}, \quad n \geq n_0, \quad p \geq n_0.$$

Тому

$$R_n(F, \delta) \geq \sum_{\lambda_n \leq \lambda_p < \lambda_n + 1} |a_p| e^{\delta\lambda_p} \geq |a_n|^{1-\varepsilon} e^{\delta(\lambda_n + 1)} \Delta n(\lambda_n), \quad n \geq n$$

і, отже,

$$\frac{\ln \Delta n(\lambda_n)}{\ln|a_n|} + 1 - \varepsilon + \frac{\delta}{\ln|a_n|} \leq \frac{\ln\left(R_n(F, \delta)e^{|\delta|\lambda_n}\right)}{\ln|a_n|}.$$

Необхідність умови (10) випливає з (14), оскільки з (9) і (14) отримує

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \Delta n(\lambda_n)}{\ln|a_n|} \leq \varepsilon,$$

тобто внаслідок довільності $\varepsilon$ виконується (10).

Доведемо достатність. Виберемо підпослідовність $(\lambda_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послі $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ так, щоб проміжки $\left[\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k} + 1\right)$ попарно не перетинал об'єднання містило всю множину $\{\lambda_n, n \geq 1\}$.

Покажемо, що

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln\left(R_{n_k}(F, \delta)e^{|\delta|\lambda_{n_k}}\right)}{\ln|a_{n_k}|} = 1.$$

Нехай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що виконується (13) за умови $|\lambda_n - \lambda_p| \le 1$, і з огляду на (10) $\Delta n(\lambda_n) \le |a_n|^{\varepsilon}$. Тоді

$$\sum_{\lambda_{n_k} \le \lambda_p < \lambda_{n_k}+1} |a_p| e^{\delta\lambda_p} \le \Delta n(\lambda_{n_k}) |a_{n_k}|^{1+\varepsilon} e^{\delta\lambda_{n_k}} \le |a_{n_k}|^{1+2\varepsilon} e^{\delta\lambda_{n_k}}, \quad k \ge k_0,$$

і, отже,

$$R_{n_k}(F,\delta) = \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{\lambda_{n_j} \le \lambda_p < \lambda_{n_j}+1} |a_p| e^{\delta\lambda_p} \le \sum_{j=k}^{\infty} |a_{n_j}|^{1+2\varepsilon} \exp\left\{\delta\lambda_{n_j}\right\}.$$

Оскільки з умови (6) випливає (див. (12)), що

$$\frac{\ln|a_{n_j}| - \ln|a_{n_{j+1}}|}{\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j}} \to 0, \quad j \to \infty,$$

а $\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j} \ge 1$, то за теоремою 1

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln\left(R_{n_k}(F,\delta)\exp\left\{\delta\lambda_{n_k}\right\}\right)}{\ln|a_{n_k}|^{1+2\varepsilon}} \le 1,$$

звідки, враховуючи довільність $\varepsilon$, отримуємо (15).

Нехай тепер $n \in \mathbb{N}$ — довільне число і $\lambda_{n_k} \le \lambda_n < \lambda_{n_k} + 1$ для деякого $k$. Тоді

$$R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n} = e^{|\delta|\lambda_n} \sum_{j=n}^{\infty} |a_j| e^{\delta\lambda_j} \le e^{|\delta|\lambda_n} \sum_{j=n_k}^{\infty} |a_j| e^{\delta\lambda_j} \le$$

$$\le e^{|\delta|} e^{|\delta|\lambda_{n_k}} \sum_{j=n_k}^{\infty} |a_j| e^{\delta\lambda_j} = e^{|\delta|} R_{n_k}(F,\delta) e^{|\delta|\lambda_{n_k}},$$

звідки випливає

$$\frac{\ln(R_n(F,\delta)\exp\{|\delta|\lambda_n\})}{\ln|a_n|} \le \frac{|\delta|}{\ln|a_n|} + \frac{\ln\left(R_{n_k}(F,\delta)\exp\left\{|\delta|\lambda_{n_k}\right\}\right)}{\ln|a_{n_k}|} \frac{\ln|a_{n_k}|}{\ln|a_n|}.$$

З останньої нерівності, враховуючи (13) і (15), одержуємо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln(R_n(F,\delta)\exp\{|\delta|\lambda_n\})}{\ln|a_n|} \le 1 + \varepsilon$$

і внаслідок довільності $\varepsilon$ та нерівності $R_n(F,\delta)\exp\{|\delta|\lambda_n\} > |a_n|$ отримуємо (9). Теорему 2 доведено.

**4. Доведення теореми 3.** Якщо $\sup\{\Delta n(t)\colon t \ge 0\} < +\infty$, то виконується умова (10), і за теоремою 2 справедлива рівність (9).

Припустимо, що $\sup\{\Delta n(t)\colon t \ge 0\} = +\infty$, і покажемо, що існує функція $F \in S_0^*(\lambda)$, для якої (9) не виконується. Оскільки $\sup\{\Delta n(t)\colon t \ge 0\} = +\infty$, то існує підпослідовність $(\lambda_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $\Delta n(\lambda_{n_k}) \nearrow$ $\nearrow +\infty$, $k \to +\infty$. Будемо вважати $n_0 = 1$.

Нехай $b_k = \exp\left\{\sqrt{\ln \Delta n(\lambda_{n_k})}\right\}$, $\nu_k = \min\{1, \lambda_{k-1} - \lambda_k\}$ і $(a_n^*)_{n=1}^{\infty}$ — така неспадна до $\infty$ послідовність, що

$$a_1^* = 1, \quad a_{n+1}^* = (1+\alpha_n \nu_n)a_n^*, \quad n \geq 1, \tag{16}$$

$$a_n^* \leq b_k, \quad n_{k-1} < n \leq n_k, \tag{17}$$

де кожний член послідовності $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ дорівнює або 0, або 1.

Покажемо, що така послідовність $(a_n^*)_{n=1}^{\infty}$ існує. Для цього використаємо принцип рекурсивного означення послідовності (див., наприклад, [4, с. 11]). Покладемо $\alpha_1 = 0$ і припустимо, що $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ вже визначені, отже, $a_n^*$ визначені для всіх $n = 1, 2, \ldots, m+1$ і $a_n^* \leq b_k$ для $n \in (n_{k-1}, n_k] \cap (1, m+1]$. Припустимо, що $n_{p-1} \leq m+1 < n_p$ для деякого $p$, і покладемо

$$\alpha_{m+1} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_{m+1}^*(1+\nu_{m+1}) > b_p; \\ 1, & \text{якщо } a_{m+1}^*(1+\nu_{m+1}) \leq b_p, \end{cases} \tag{18}$$

$$a_{m+2}^* = (1+\alpha_{m+1}\nu_{m+1})a_{m+1}^*.$$

За принципом рекурсивного означення послідовності обидві послідовності $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(a_n^*)_{n=1}^{\infty}$ однозначно визначені і виконуються співвідношення (16) і (17). Зрозуміло, що $(a_n^*)_{n=1}^{\infty}$ — неспадна послідовність.

Покажемо, що $a_n^* \to \infty$, $n \to \infty$. Припустимо, від супротивного, що $\sup a_n^* = K < +\infty$, і нехай $k_0$ таке, що $b_k > 2K$ для $k \geq k_0$. Тоді $\alpha_n = 1$ для $n \geq n_{k_0}$, оскільки якщо $\alpha_{m+1} = 0$ для деякого $m \geq n_{k_0} - 1$ і $n_{p-1} \leq m+1 < n_p$, то з (16) і (18) отримаємо $2K < b_p < a_{m+1}^*(1+\nu_{m+1}) \leq 2a_{m+1}^* \leq 2K$, що неможливо. На підставі того, що $\alpha_n = 1$ для $n \geq n_{k_0}$,

$$a_{n_{k_0}}^* \prod_{k=n_{k_0}}^{n-1} (1+\nu_k) = a_n^* \leq K, \quad n \geq n_{k_0},$$

тобто $\prod_{k=1}^{\infty} (1+\nu_k) < +\infty$ і, отже, $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) < +\infty$, що неможливо.

Отже, неспадну до $\infty$ послідовність $(a_n^*)_{n=1}^{\infty}$, яка задовольняє (16) і (17), побудовано.

Оскільки $a_n^* \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, то $\prod_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n\nu_n) = +\infty$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\nu_n = +\infty$, тобто існує послідовність $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $1 \geq \eta_n \searrow 0$, $n \to \infty$, і $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n\alpha_n\nu_n = +\infty$.

Покладемо $\alpha_1 = 1$ і $\alpha_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} (1+\eta_k\alpha_k\nu_k)$ при $n \geq 1$. Тоді $a_n \leq a_n^*$, $n \geq 1$, $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, і

$$0 \leq \frac{\ln|a_{n+1}| - \ln|a_n|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{\ln(1+\eta_n\alpha_n\nu_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leq \frac{\eta_n\alpha_n\nu_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leq \eta_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто виконується умова (6), і за теоремою Штольца $\ln|a_n| / \lambda_n \to 0$, $n \to \infty$. А оскільки $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, то за теоремою Валірона ряд Діріхле з такими коефіцієнтами $a_n$ має нульову абсцису абсолютної збіжності.

З (16) випливає

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\Delta n(\lambda_n)}{\ln|a_n|} \geq \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\Delta n(\lambda_{n_k})}{\ln|a_{n_k}|} \geq \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\Delta n(\lambda_{n_k})}{\ln|a^*_{n_k}|} \geq \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\Delta n(\lambda_{n_k})}{\ln b_k} = +\infty,$$

і за теоремою 2 рівність (9) для цього ряду Діріхле не виконується. Теорему 3 доведено.

**5. Доведення теореми 4.** Нехай $a_n^0$ — коефіцієнти мажоранти Ньютона $F^0$ ряду Діріхле (1). Тоді $a_n^0 \to +\infty$, $n\to\infty$, $|a_n| \leq a_n^0$ для всіх $n$, $|a_{n_k}| = a_{n_k}^0$ для деякої зростаючої послідовності $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел і $\kappa_n^0(F) \nearrow 0$, $n\to\infty$, тобто коефіцієнти мажоранти Ньютона $F^0$ задовольняють умову (6) і $F^0 \in S_0^*(\lambda)$. Тоді якщо $\sup\{\Delta n(t)\colon t\geq 0\} < +\infty$ і $R_n^0(\delta) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k^0 \exp\{\delta\lambda_k\}$, то за теоремою 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(R_n^0(F,\delta)\exp\{|\delta|\lambda_n\}\right)}{\ln|a_n^0|} = 1.$$

Оскільки $R_n(F,\delta) \leq R_n^0(\delta)$ і $|a_{n_k}| = a_{n_k}^0$, звідси одержуємо співвідношення $\ln\left(R_{n_k}(F,\delta)\exp\left\{|\delta|\lambda_{n_k}\right\}\right) \leq (1+o(1))\ln|a_{n_k}|$, $k\to\infty$, з якого з урахуванням нерівності $|a_n| < R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}$ випливає (11). Достатність доведено.

Якщо ж $\sup\{\Delta n(t)\colon t\geq 0\} = +\infty$, то існує підпослідовність $(\lambda_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $\lambda_{n_{k+1}} > \lambda_{n_k}+1$ і $\Delta n(\lambda_{n_k}) \nearrow \infty$, $k\to\infty$.

Покладемо $a_{n_k} = \sqrt{\Delta n(\lambda_{n_k})}$ і $a_j = 1$ для $j \neq n_k$. Тоді $\varlimsup_{j\to\infty}|a_j| = +\infty$ і, оскільки

$$\ln a_{n_k} = \frac{1}{2}\ln\Delta n(\lambda_{n_k}) \leq \frac{1}{2}n(\lambda_{n_k}+1) = o(\lambda_{n_k}+1) = o(\lambda_{n_k}), \quad k\to\infty,$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n\leq t} 1$ — лічильна функція послідовності $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, за теоремою Валірона ряд Діріхле (1) з так вибраними коефіцієнтами має нульову абсцису абсолютної збіжності і належить до класу $S_0^{**}(\lambda)$. Зрозуміло, що $\ln\left(e^{|\delta|\lambda_j}R_j(F,\delta)\right) \geq 2\ln a_j$ для $j\neq n_k$, а для $j = n_k$ одержуємо

$$\ln\left(e^{|\delta|\lambda_{n_k}}R_{n_k}(F,\delta)\right) \geq \ln\left(e^{|\delta|\lambda_{n_k}}\sum_{\lambda_{n_k}\leq\lambda_j<\lambda_{n_k}+1} a_j e^{\delta\lambda_j}\right) \geq$$

$$\geq \ln\left(e^{|\delta|\lambda_{n_k}}e^{\delta(\lambda_{n_k}+1)}\sum_{\lambda_{n_k}\leq\lambda_j<\lambda_{n_k}+1} a_j\right) = \delta + \ln\left(a_{n_k}+\Delta n(\lambda_{n_k})-1\right) =$$

$$= \delta + \ln\left(\sqrt{\Delta n(\lambda_{n_k})}+\Delta n(\lambda_{n_k})-1\right) = (1+o(1))\ln\Delta n(\lambda_{n_k}) =$$

$$= 2(1+o(1))\ln a_{n_k}, \quad k\to\infty,$$

тобто (11) не виконується, і теорему 4 доведено.

**6. Доведення тверджень 1 і 2.** Почнемо з твердження 1. Маємо

$$R_n(F,\delta) \leq \sum_{k=n}^{\infty}\exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)\lambda_k}{\psi(\lambda_k)}+\delta\lambda_k\right\} \leq \int_{\lambda_n}^{\infty}\exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)t}{\psi(t)}+\delta t\right\}dn(t) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\lambda_n}^{\infty} n(t)\exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)t}{\psi(t)}+\delta t\right\}\left(|\delta|-\left(\frac{t}{\psi(t)}\right)'\right)dt \leq$$

$$\leq |\delta|\int\limits_{\lambda_n}^{\infty}\exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)t}{\psi(t)}+\ln n(t)+\delta t\right\}dt \leq |\delta|\int\limits_{\lambda_n}^{\infty}\exp\left\{\frac{(1+2\varepsilon)t}{\psi(t)}+\delta t\right\}dt.$$

Але за правилом Лопіталя

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{|\delta|\int\limits_{x}^{\infty}\exp\left\{\frac{(1+2\varepsilon)t}{\psi(t)}+\delta t\right\}dt}{\exp\left\{\frac{(1+2\varepsilon)x}{\psi(x)}+\delta x\right\}} \leq$$

$$\leq \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{-|\delta|\exp\left\{\frac{(1+2\varepsilon)x}{\psi(x)}+\delta x\right\}}{\exp\left\{\frac{(1+2\varepsilon)x}{\psi(x)}+\delta x\right\}\left(-|\delta|+\left(\frac{(1+2\varepsilon)x}{\psi(x)}\right)'\right)} =$$

$$= \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{|\delta|}{|\delta|-\frac{1+2\varepsilon}{\psi(x)}+\frac{(1+2\varepsilon)x\psi'(x)}{\psi^2(x)}} \leq \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{|\delta|}{|\delta|-\frac{1+2\varepsilon}{\psi(x)}} = 1.$$

Тому

$$R_n(F,\delta) \leq \exp\left\{\frac{(1+3\varepsilon)\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}+\delta\lambda_n\right\} \leq e^{\delta\lambda_n}\exp\{(1+4\varepsilon)\ln|a_n|\}, \quad n \geq n_0(\varepsilon),$$

звідки легко отримуємо (9).

Доведемо твердження 2. Нехай $a_n^0$ — коефіцієнти мажоранти Ньютона ряду Діріхле (1), а $R_n^0(\delta) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^0\exp\{\delta\lambda_k\}$. Оскільки для $k > n$

$$\ln a_k^0 - \ln a_n^0 = \sum_{j=n}^{k-1}\left(\ln a_{j+1}^0 - \ln a_j^0\right) = -\sum_{j=n}^{k-1}\varkappa_j^0\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right) \leq -\varkappa_n^0(\lambda_k-\lambda_n),$$

для всіх досить великих $n$ маємо

$$R_n^0(\delta) = a_n^0\sum_{k=n}^{\infty}\exp\{\ln a_k^0-\ln a_n^0+\delta\lambda_k\} \leq a_n^0\sum_{k=n}^{\infty}\exp\{-\varkappa_n^0(\lambda_k-\lambda_n)+\delta\lambda_k\} =$$

$$= a_n^0\exp\{\varkappa_n^0\lambda_n\}\sum_{k=n}^{\infty}\exp\{(\delta-\varkappa_n^0)\lambda_k\} =$$

$$= a_n^0\exp\{\varkappa_n^0\lambda_n\}\int\limits_{\lambda_n}^{\infty}\exp\{(\delta-\varkappa_n^0)t\}dn(t) \leq$$

$$\leq a_n^0\exp\{\varkappa_n^0\lambda_n\}(\varkappa_n^0-\delta)\int\limits_{\lambda_n}^{\infty}n(t)\exp\{(\delta-\varkappa_n^0)t\}dt \leq$$

$$\leq\ a_n^0 \exp\{\varkappa_n^0\lambda_n\}\left(\varkappa_n^0-\delta\right)\int_{\lambda_n}^{\infty}\exp\left\{\frac{t}{\psi(t)}+\left(\delta-\varkappa_n^0\right)t\right\}dt.$$

Використовуючи правило Лопіталя, як при доведенні твердження 1, отримує

$$\left(\varkappa_n^0-\delta\right)\int_{\lambda_n}^{\infty}\exp\left\{\frac{t}{\psi(t)}+\left(\delta-\varkappa_n^0\right)t\right\}dt\ \leq$$

$$\leq\ (1+o(1))\exp\left\{\frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}+\left(\delta-\varkappa_n^0\right)\lambda_n\right\},\quad n\to\infty,$$

і, отже,

$$R_n^0(\delta)\ \leq\ (1+o(1))a_n^0 e^{\delta\lambda_n}\exp\left\{\frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}\right\},\quad n\to\infty.$$

З огляду на те, що $|a_n|\leq a_n^0$, звідси випливає

$$\ln\left(R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}\right)\ \leq\ \ln\left(R_n^0(\delta)e^{|\delta|\lambda_n}\right)\ \leq$$

$$\leq\ \ln a_n^0\ +\ \frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}\ +\ o(1)\ =\ (1+o(1))\ln a_n^0,\quad n\to\infty,$$

і оскільки $|a_{n_k}|\ =\ a_{n_k}^0$ для зростаючої послідовності $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натураль чисел, то

$$\ln\left(R_{n_k}(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_{n_k}}\right)\ \leq\ (1+o(1))\ln a_{n_k}^0,\quad k\to\infty,$$

звідки, враховуючи нерівність $|a_n|\leq R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}$, одержуємо (11).

**7. Зауваження.** Внаслідок того, що з огляду на (2) $|a_n|\leq E_{n-1}(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}$ $\leq R_n(F,\delta)e^{|\delta|\lambda_n}$, у формулах (5), (7) – (9) і (11) замість $R_n(F,\delta)$ можна ви ристати $E_{n-1}(F,\delta)$.


1. *Микитюк Л. Я., Шеремета М. М.* До апроксимації рядів Діріхле експоненціальними мно членами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. – С. 35 – 39.
2. *Микитюк Л. Я.* Зауваження до апроксимації рядів Діріхле експоненціальними многоч нами // Там же. – 2000. – Вип. 57. – С. 25 – 28.
3. *Гече Ф. И., Онипчук С. В.* Об абсциссах сходимости ряда Дирихле и его мажора Ньютона // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 2. – С. 161 – 168.
4. *Rouden H. L.* Real analysis. – Macmillan Publ. Comp., 1989. – 444 p.


Одержано 23.06.2