УДК 531.36

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ ГІРОСКОПІЧНО ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ

We investigate the stability of the equilibrium position of gyroscopic coupled conservative systems in the case where the force function does not attain a local maximum in this state. We consider the situation where the gyroscopic coupling with respect to one part of coordinates is weak and with respect to other part is strong.

Досліджується стійкість положення рівноваги гіроскопічно зв'язаних консервативних систем у випадку, коли в положенні рівноваги немає локального максимуму силової функції. Розглядається ситуація, коли гіроскопічний зв'язок по одній частині координат є слабким, а по іншій — сильним.

1. Розглянемо голономну систему з n ступенями вільності

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

лагранжіан якої має вигляд

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + L_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q})^T\dot{\mathbf{q}} + L_0(\mathbf{q}). \tag{2}$$

Вважатимемо, що $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^2(D_{\mathbf{q}} \times R^n_{\dot{\mathbf{q}}})$, квадратична форма $L_2(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}})$ додатно визначена, точка $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ відповідає положенню рівноваги системи (1), (2) і $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $L_0(\mathbf{0}) = 0$.

Якщо в точці $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ функція $L_0(\mathbf{q})$ має строгий локальний максимум, то згідно з теоремою Рауса [1] положення рівноваги $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системи (1), (2) стійке. Якщо ж максимуму немає, то може бути як стійкість, зумовлена, зокрема, стабілізуючою дією гіроскопічних сил, так і нестійкість [2, 3]. При дослідженні стійкості гіроскопічно зв'язаних систем проблема полягає в тому, щоб при відсутності в положенні рівноваги локального максимуму функції $L_0(\mathbf{q})$ з'ясувати, коли ця відсутність зумовлює нестійкість рівноваги, а коли стабілізуюча дія гіроскопічних сил достатня, щоб забезпечити стійкість (див. крім [1 – 3] також [4 – 12]).

Далі припускатимемо, що

$$L_0(\mathbf{q}) = L_0^{(m)}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}), \qquad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m), \tag{3}$$

де $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ — однорідна форма (поліном) степеня $m \geq 3$, і, крім того, узагальнені координати вибрано таким чином, що

$$A(\mathbf{q}) = E + A^*(\mathbf{q}), \qquad A^*(\mathbf{0}) = 0, \qquad E \text{ — одинична матриця}, \tag{4}$$

тобто система нормалізована в лінійному наближенні. Кососиметричну матрицю, яка характеризує гіроскопічну зв'язаність системи, позначимо так:

$$G(\mathbf{q}) = (g_{ij}(\mathbf{q})), \qquad g_{ij}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right), \qquad i, j = \overline{1, n}.$$

Нижче, розвиваючи дослідження [11, 12], зупинимося на такому різновиді гіроскопічно зв'язаних систем, коли гіроскопічний зв'язок по одній частині координат є слабким, а по іншій — сильним.

Теорема 1. *Нехай поряд з вихідними припущеннями щодо лагранжіана* L *виконуються рівності* (3), (4) *і, крім того*:

1) *матриця* $G(\mathbf{0})$ *має вигляд*

$$G(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_{n-l,\,n-l}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad l < n,$$

де $\det G_{n-l,\,n-l}(\mathbf{0}) \neq 0$, *а* $G_{n-l,\,n-l}(\mathbf{q})$ — *матриця порядку* $(n-l)\times(n-l)$, *отримана з матриці* $G(\mathbf{q})$ *викреслюванням перших* l *рядків і перших* l *стовпчиків*;

2) $$\lim_{\|\mathbf{q}\|\to 0} \frac{g_{ij}(\mathbf{q})}{(\|\mathbf{q}\|)^{m/2-1+\alpha}} = 0 \quad \forall g_{ij}(\mathbf{q}) \notin G_{n-l,\,n-l}(\mathbf{q}), \quad \mathrm{const} = \alpha > 0;$$

3) *звуження функції* $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ *на підпростір* $R^{n-l} = \{q_{l+1} = \ldots = q_n = 0\}$ *не має в точці* $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ *максимуму*;

4) $$\lim_{\|\mathbf{q}\|\to 0} \left\| \frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}} \right\| (\|\mathbf{q}\|)^{-m+1-\alpha} = 0.$$

Тоді положення рівноваги $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *системи* (1), (2) *нестійке й існують розв'язки, що асимптотично прямують до нього при* $t \to \infty$ *і* $t \to -\infty$.

Доведення. Для досліджуваної системи існує інтеграл Якобі

$$L_2 - L_0 = h = \mathrm{const}, \tag{5}$$

а тому відповідно до структури лагранжіана L, що фіксується умовами теореми 1, непорожньою є множина

$$\Omega = \left\{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in s_\varepsilon = \left\{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in D_{\mathbf{q}} \times R^n_{\dot{\mathbf{q}}},\ \|\mathbf{q} \oplus \dot{\mathbf{q}}\| < \varepsilon\right\} :\ L_2 - L_0 = h \leq 0\right\}.$$

На підставі рівності (5), беручи до уваги рівності (3), (4), маємо

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 < \mu \|\mathbf{q}\|^m \quad \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Omega, \quad 0 < \mu = \mathrm{const}. \tag{6}$$

Обмежимося надалі розглядом розв'язків системи (1), (2), які проходять через Ω.

Запишемо функцію $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ у вигляді

$$L_0^{(m)}(\mathbf{q}) = \widehat{L_0^{(m)}}(\mathbf{q}) + \left(L_0^{(m)}(\mathbf{q}) - \widehat{L_0^{(m)}}(\mathbf{q})\right),$$

де $\widehat{L_0^{(m)}}(\mathbf{q})$ — обмеження функції $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ на підпростір $R^{n-l} = \{q_{l+1} = \ldots = q_n = 0\}$. Виконаємо лінійне перетворення, що охоплює перші l узагальнених координат. Згідно з [13, 14] його завжди можна вибрати так, що досліджуваний лагранжіан набере вигляду

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T E \dot{\mathbf{q}} + O\left(\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \|\mathbf{q}\|\right) + L_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \sigma q_1^m + \mathbf{q}^{*T} B(\mathbf{q}) \mathbf{q}^* + \tilde{L}_0^{(m)}(\mathbf{q}), \tag{7}$$

$$\mathbf{q}^* = (q_2, \ldots, q_l)^T, \quad 0 < \sigma = \mathrm{const}, \quad \tilde{L}_0^{(m)}(\mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in R^{n-l}.$$

Тут для зручності збережено попередні позначення для залежних змінних, а стала σ відповідає максимуму функції $\widehat{L_0^{(m)}}(\mathbf{q})$ на одиничній сфері в R^l. Надалі без обмеження загальності вважатимемо, що $\sigma = 1/m$. Щоб досягти цього, достатньо застосувати перетворення типу $\tilde{\mathbf{q}} = a\mathbf{q}$, де a — додатна стала, врахувати, що $m \geq 3$ і рівняння руху не змінюються при множенні відповідного лагранжіана на сталу.

Позначаючи $(q_1, \ldots, q_l)^T = \mathbf{x}$, $(q_{l+1}, \ldots, q_n)^T = \mathbf{y}$ і беручи до уваги нерівність (6), а також умови 2, 4 теореми, переписуємо рівняння (1) у вигляді

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L_0^{(m)}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}\right), \tag{8}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = -G_{n-l,n-l}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial L_0^{(m)}}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}\right), \tag{9}$$

де $\mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}\right)$ — вектор відповідної розмірності, кожна компонента якого в околі точки $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ має порядок мализни вищий, ніж $\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}$.

Аналогічно до [12] перетворимо векторне рівняння (9), помноживши його ліву і праву частини спочатку на матрицю $G_{n-l,n-l}^{-1}(\mathbf{q})$, а потім на матрицю $G_0 = G_{n-l,n-l}(\mathbf{0})$. У підсумку отримаємо

$$G_0\, G_{n-l,n-l}^{-1}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{y}} = -G_0\,\dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial L_0^{(m)}}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}\right). \tag{10}$$

Виконуючи в системі (10) заміну змінних

$$G_0\, G_{n-l,n-l}^{-1}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{y}} + G_0\,\mathbf{y} = G_0\,\mathbf{z} \tag{11}$$

і беручи до уваги, що

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - G_{n-l,n-l}^{-1}\,\dot{\mathbf{y}},$$

замість (10) з урахуванням нерівності (6) маємо

$$G_0\,\dot{\mathbf{z}} = \left(G_0\, G_{n-l,n-l}^{-1}\right)^{\cdot}\,\dot{\mathbf{y}} + \left.\frac{\partial L_0^{(m)}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y} \to \mathbf{z} - G_{n-l,n-l}^{-1}\dot{\mathbf{y}}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}\right). \tag{12}$$

Оскільки

$$\left(G_0\, G_{n-l,n-l}^{-1}\right)^{\cdot} = O(\|\dot{\mathbf{x}} \oplus \dot{\mathbf{y}}\|),$$

де $O(\|\dot{\mathbf{x}} \oplus \dot{\mathbf{y}}\|)$ — матриця розмірності $(n-l) \times (n-l)$ з елементами порядку $\|\dot{\mathbf{x}} \oplus \dot{\mathbf{y}}\|$, то замість рівнянь (12), беручи до уваги нерівність (6), одержуємо

$$G_0\,\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial L_0^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\beta}\right). \tag{13}$$

Тут $0 < \beta = \mathrm{const}$.

Тепер систему рівнянь (8), (9) можемо переписати у вигляді

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L_0^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\alpha}\right), \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = G_0^{-1}\left[\frac{\partial L_0^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{o}\left(\|\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}\|^{m-1+\beta}\right)\right]. \tag{15}$$

Далі використаємо підхід [11, 12], що ґрунтується на ідеї зведення істотно нелінійної системи до квазілінійної. Ця ідея, тісно пов'язана з працею [15], набула подальшого розвитку в роботах [16, 17]. Для дослідження стійкості лагранжевих систем (1), (2) при малих у порівнянні з потенціальними гіроскопічних силах цю ідею застосовано у роботі [14].

Розглянемо додаткове рівняння

$$\ddot{z} = z^{m-1}, \tag{16}$$

що за своєю структурою зводиться до першого рівняння системи (14), (15), якщо в його правій частині знехтувати всіма доданками, крім q_1^{m-1}. На підставі (16) одержуємо

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{m}z^m = c = \text{const},$$

звідки при $c = 0$ маємо

$$\dot{z} = \pm\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} z^{m/2}.$$

Обмежившись рівнянням

$$\dot{z} = -\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} z^{m/2}, \tag{17}$$

розглянемо його розв'язок

$$z = z_0\left[1 + \frac{m-2}{\sqrt{2m}}\, z_0^{(m-2)/2}\, t\right]^{-2/(m-2)}, \qquad z_0 > 0, \tag{18}$$

який задовольняє також рівняння (16). Розв'язок (18) істотно використовуватимемо далі.

Виконаємо заміну залежних змінних у системі (14), (15):

$$\mathbf{x} = z(\mathbf{e} + \mathbf{v}), \qquad \mathbf{e} = (1, 0, \ldots, 0)^T, \qquad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_l)^T, \tag{19}$$

$$\mathbf{z} = z\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{n-l})^T.$$

Тоді замість (14), (15) будемо мати

$$z\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} - 2\left[\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} z^{m/2}\right]\frac{d\mathbf{v}}{dt} = z^{m-1}\left[C\mathbf{v} + D\mathbf{w} + \mathbf{O}\left(\|\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}\|^2\right)\right] +$$

$$+\ z^{m-1+\gamma}\, \mathbf{f}_1(\mathbf{e} + \mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad 0 < \gamma = \text{const}, \tag{20}$$

$$z\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} z^{m/2}\mathbf{w} + G_{n-l,n-l}^{-1}(\mathbf{0})\, z^{m-1}\left[F\mathbf{v} + H\mathbf{w} + \mathbf{O}\left(\|\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}\|^2\right) + \mathbf{a}\right] +$$

$$+\ z^{m-1+\beta}\, \mathbf{f}_2(\mathbf{e} + \mathbf{v}, \mathbf{w}), \tag{21}$$

де

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & c_{l2} & \ldots & c_{ll} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1,n-l} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2,n-l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{l1} & d_{l2} & \ldots & d_{l,n-l} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-l,1} & f_{n-l,2} & \ldots & f_{n-l,l} \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-l,1} & h_{n-l,2} & \ldots & h_{n-l,n-l} \end{pmatrix}$$

— матриці зі сталими коефіцієнтами, причому $c_{11} = m - 2$; $\mathbf{a}$ — сталий вектор.

Перейдемо за допомогою (17), (18) до нової незалежної змінної. На підставі рівнянь (20), (21) одержимо

$$z^2\frac{d^2\mathbf{v}}{dz^2} + \left(\frac{m}{2} + 2\right)z\frac{d\mathbf{v}}{dz} = \frac{m}{2}\left[C\mathbf{v} + D\mathbf{w} + \mathbf{O}\left(\|\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}\|^2\right) + z^{\gamma}\, \mathbf{f}_1(\mathbf{e} + \mathbf{v}, \mathbf{w})\right], \tag{22}$$

$$-z\frac{d\mathbf{w}}{dz} = \mathbf{w} + \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} G_{n-l,n-l}^{-1}(\mathbf{0})\, z^{m/2-1}\left[F\mathbf{v} + H\mathbf{w} + \mathbf{O}\left(\|\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}\|^2\right) + \mathbf{a}\right] +$$

$$+ z^{m/2-1+\beta}\,\mathbf{f}_2(\mathbf{e}+\mathbf{v}, \mathbf{w}). \qquad (23$$

.Поклавши далі

$$\varphi = -\ln z, \qquad (24$$

.запишемо систему (22) – (24) у вигляді

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{d\varphi^2} - \left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = \frac{m}{2}\left[C\mathbf{v} + D\mathbf{w} + \mathbf{O}\left(\|\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}\|^2\right) + z^{\gamma}\,\mathbf{f}_1(\mathbf{e}+\mathbf{v}, \mathbf{w})\right], \qquad (25$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\varphi} = \mathbf{w} + \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} G_{n-l,n-l}^{-1}(\mathbf{0})\, z^{m/2-1}\left[F\mathbf{v} + H\mathbf{w} + \mathbf{O}\left(\|\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}\|^2\right) + \mathbf{a}\right] +$$

$$+ z^{m/2-1+\beta}\,\mathbf{f}_2(\mathbf{e}+\mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad (26$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -z. \qquad (27$$

Функції $\mathbf{f}_1(\mathbf{e}+\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{e}+\mathbf{v}, \mathbf{w})$ в загальному випадку у точці $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ в .нуль не перетворюються, а числа $\gamma, m/2-1$ можуть бути меншими за одиницю .тому, щоб забезпечити лінійність найнижчого наближення системи (25) – (27, .виконаємо заміну

$$z^* = z^{\delta}, \quad 0 < \delta < \min(\gamma, m/2-1), \quad \delta = \text{const}. \qquad (28$$

.У підсумку одержимо

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{d\varphi^2} - \left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = \frac{m}{2}(C\mathbf{v} + D\mathbf{w}) + \mathbf{o}\left(\|(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}, z^*)\|\right), \qquad (29$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\varphi} = \mathbf{w} + \mathbf{o}\left(\|(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}, z^*)\|\right), \qquad (30$$

$$\frac{dz^*}{d\varphi} = -\delta z^*, \qquad (31,$$

де $\mathbf{o}\left(\|(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}, z^*)\|\right)$ — вектор з компонентами більш високого порядку мализни в околі точки $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$, $z^* = 0$, ніж $\|(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}, z^*)\|$.

Характеристичне рівняння лінійного наближення системи (29) – (31) має вигляд

$$\begin{vmatrix} P_{11}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & -md_{11}/2 & \ldots & -md_{1,n-l}/2 & 0 \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \ldots & -mc_{2l}/2 & -md_{21}/2 & \ldots & -md_{2,n-l}/2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & -mc_{l2}/2 & \ldots & P_{ll}(\lambda) & -md_{l1}/2 & \ldots & -md_{l,n-l}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda-1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda+\delta \end{vmatrix} = 0, \qquad (32$$

де

$$P_{ii}(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{m}{2}+1\right)\lambda - \frac{m}{2}c_{ii}, \quad i=\overline{1,l}.$$

Як випливає з рівняння (32) і, зокрема, з його наслідку — рівнянь

$$P_{11}(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{m}{2}+1\right)\lambda - \frac{m}{2}(m-2) = 0, \quad \lambda+\delta=0,$$

в розглядуваному випадку маємо принаймні два дійсні від'ємні корені. На підставі (19), враховуючи (18), (24), робимо висновок про існування розв'язку системи (14), (15), який асимптотично прямує до точки $\mathbf{x}=\mathbf{z}=\mathbf{0}$ при $t\to\infty$. Беручи до уваги, що система (14), (15) є результатом перетворення вихідної системи, виводимо існування асимптотичного руху, який притягується при $t\to\infty$ до досліджуваного положення рівноваги $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$.

Щоб довести існування руху, що асимптотично прямує до положення рівноваги, коли $t\to-\infty$, розглядаємо систему з лагранжіаном $L(\mathbf{q},-\dot{\mathbf{q}})$ або замість рівняння (17) розглядаємо рівняння

$$\dot{z} = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} z^{m/2}.$$

Як наслідок звідси виводимо нестійкість рівноваги.

***Зауваження* 1.** За умовами теореми 1 $l<n$, тобто слабким гіроскопічним зв'язком охоплено лише перші l координат. Якщо ж $l=n$, то гіроскопічний зв'язок є слабким по всіх координатах, і приходимо до розглянутого раніше випадку (див. теорему 3 в [18]).

Наслідок. *Нехай* $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^{m+1}(D_{\mathrm{q}}\times R^n_{\dot{\mathrm{q}}})$, *число ступенів вільності системи* (1), (2) *непарне і в рівності* (3) $m=3$. *Тоді положення рівноваги* $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ *системи* (1), (2) *нестійке й існують розв'язки, які асимптотично прямують до нього при* $t\to\infty$ *і* $t\to-\infty$, *якщо* $\partial L_0^{(3)}/\partial\mathbf{q}\neq\mathbf{0}$ $\forall\mathbf{q}\in R^n\backslash\{0\}$.

Доведення. В умовах наслідку $\det G(\mathbf{0})=0$, а тому принаймні по частині узагальнених координат гіроскопічний зв'язок є слабким. Звідси, беручи до уваги зауваження до теореми 1 й умови наслідку, робимо висновок про справедливість останнього.

2. Дослідимо систему (1), (2), в якій

$$L_0(\mathbf{q}) = L_0^{(2)}(\mathbf{q}) + L_0^{(m)}(\mathbf{q}) + R(\mathbf{q}), \quad R(\mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^m), \tag{33}$$

а функція $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$, як і вище, є однорідною формою степеня $m\geq 3$. Припускатимемо, що вибір узагальнених координат здійснюється таким чином, що виконується рівність (4) і

$$L_0^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\lambda_r q_r^2, \quad k<n, \quad \mathrm{const}=\lambda_r<0. \tag{34}$$

Розглянемо в R^n гіперплощину π, яка визначається рівнянням

$$\sum_{r=1}^{k}\lambda_r q_r^2 = 0,$$

і позначимо обмеження довільної функції (в тому числі і векторної) $\Psi(\mathbf{q})$ на π через $\widehat{\Psi}(\mathbf{q})$. Систему з лагранжіаном

$$\widehat{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T E\dot{\mathbf{q}} + O(\|\dot{\mathbf{q}}\|^2\|\mathbf{q}\|) + L_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \widehat{L_0}(\mathbf{q}) \tag{35}$$

назвемо обмеженням вихідної системи на множину нулів квадратичної форми $L_0^{(2)}(\mathbf{q})$.

Теорема 2. *Нехай поряд із вихідними припущеннями щодо лагранжіана* L *виконуються рівності* (4), (33), (34), *а лагранжіан обмеження вихідної системи на множину нулів квадратичної форми визначається виразом* (35). *Вважатимемо, крім того, що виконуються умови:*

1) *матриця* $G_{n-k,n}(\mathbf{0})$, *яку отримуємо з* $G(\mathbf{0})$ *викреслюванням перших* k *рядків, має вигляд*

$$G_{n-k,n}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_{n-k-l,k+l}(\mathbf{0}) & G_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \quad k+l<n,$$

де $\det G_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{0}) \neq 0$, *а* $G_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{q})$ — *матриця порядку* $(n-k-l)\times$ $\times(n-k-l)$, *одержана з матриці* $G(\mathbf{q})$ *викреслюванням перших* $k+l$ *рядків і перших* $k+l$ *стовпчиків*;

2) $$\lim_{\|\mathbf{q}\|\to 0} \frac{g_{ij}(\mathbf{q})}{(\|\mathbf{q}\|)^{m/2-1+\alpha}} = 0 \quad \forall i=\overline{k+1,\ k+l}, \quad \forall j=\overline{1,n}, \quad \text{const}=\alpha>0;$$

3) *обмеження функції* $\widehat{L_0^{(m)}}(\mathbf{q})$ *на підпростір* $R^{n-k-l} = \{q_{k+l+1} = \ldots = q_n = 0\}$ *не має в точці* $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ *максимуму*;

4) $$\lim_{\|\mathbf{q}\|\to 0} \left\| \frac{\partial R}{\partial \mathbf{q}} \right\| (\|\mathbf{q}\|)^{-m+1-\alpha} = 0.$$

Тоді положення рівноваги $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ *розглядуваної системи нестійке й існують розв'язки, що асимптотично прямують до нього при* $t\to\infty$ *і* $t\to-\infty$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, застосуємо лінійне неособливе перетворення, що охоплює координати $q_{k+1}, \ldots, q_{k+l}$. Тоді лагранжіан $\widehat{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, який визначається виразом (35), набирає вигляду

$$L^*(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T E\,\dot{\mathbf{q}} + O\left(\|\dot{\mathbf{q}}\|^2\|\mathbf{q}\|\right) + L_1(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \sigma q_{k+1}^m + \mathbf{q}^{*T}B(\mathbf{q})\,\mathbf{q}^* + \tilde{L}_0^{(m)}(\mathbf{q}),$$
$$\mathbf{q}^* = (q_{k+2},\ldots,q_{k+l})^T, \quad \tilde{L}_0^{(m)}(\mathbf{q}) = 0 \quad \forall\mathbf{q}\in R^{n-k-l} = \{q_{k+l+1}=\ldots=q_n=0\}, \tag{36}$$

де $0<\sigma=\text{const}$ і для зручності збережено попередні позначення для залежних змінних.

Виписуючи далі останні $n-k$ рівнянь системи (1) і враховуючи нерівність

$$q_1^2+\ldots+q_k^2 \le \mu^*\|\widehat{\mathbf{q}}\|^m, \quad \text{const}=\mu^*>0,$$

з допомогою попередньої схеми приходимо до висновку про справедливість теореми 2. Зазначимо лише, що аналогом заміни змінних (11) у розглядуваному випадку є заміна

$$G_0\,G_{n-k-l,\,n-k-l}^{-1}\,\dot{\mathbf{y}} + G_0\,G_{n-k-l,\,n-k-l}^{-1}\,G_{n-k-l,\,k+l}\,\mathbf{x} + G_0\,\mathbf{y} = G_0\,\mathbf{z},$$

де $G_0 = G_{n-k-l,\,n-k-l}(\mathbf{0})$, $\mathbf{x}=(q_1,\ldots,q_{k+l})$, $\mathbf{y}=(q_{k+l+1},\ldots,q_n)$.

Зауваження 2. Теорема 2 залишається справедливою, якщо $k+l=n$. У цьому випадку гіроскопічний зв'язок є слабким по останніх $n-k$ координатах, що дозволяє скористатися наведеною вище схемою.

Наслідок. *Нехай* $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\in C^{m+1}(D_{\mathbf{q}}\times R_{\dot{\mathbf{q}}}^n)$, *число ступенів вільності системи* (1), (2) *непарне і в рівності* (33) $m=3$. *Тоді положення рівноваги* $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=$

$= \mathbf{0}$ *системи* (1), (2) *нестійке й існують розв'язки, які асимптотично прямують до нього при* $t \to \infty$ *і* $t \to -\infty$, *якщо* $\partial L_0^{(3)} / \partial \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{q} \in R^n \setminus \{0\}$.

Доведення. В умовах наслідку залежно від того $l \neq 0$ чи $l = 0$, де число l має той же зміст, що і в теоремі 2, виконуються або умови теореми 2, або умови теореми 1 з [12].

3. Запропонований підхід до дослідження стійкості можна поширити на неголономні системи Чаплигіна

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta \mathbf{q} = 0, \qquad \mathbf{q} \in D \subset R^n, \tag{37}$$

$$\dot{q}_{n-k+i} = \sum_{j=1}^{n-k} b_{ij}(\mathbf{q})\,\dot{q}_j, \qquad i = \overline{1, k}, \quad k < n, \tag{38}$$

де лагранжіан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, що визначається виразом (2), а також коефіцієнти $b_{ij}(\mathbf{q}) \in C_{\mathbf{q}}^2(D)$ не залежать від координат $q_{n-k+1}, \ldots, q_n$. Відомо [19, 20], що система (37), (38), (2) у цьому випадку зводиться до рівнянь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta_2}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial(\Theta_2 + L_0)}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\kappa=1}^{n-k}\Theta_1\,\beta_{ir\kappa}\,\dot{q}_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{n-k} g_{r\kappa}\dot{q}_\kappa, \qquad r = \overline{1, n-k},$$

в яких

$$\beta_{ir\kappa} = \frac{\partial b_{ir}}{\partial q_\kappa} - \frac{\partial b_{i\kappa}}{\partial q_r}, \qquad \beta_{ir\kappa} = -\beta_{i\kappa r},$$

$$g_{r\kappa} = \frac{\partial f_\kappa}{\partial q_r} - \frac{\partial f_r}{\partial q_\kappa} + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f_{n-k+i}}{\partial q_r} b_{i\kappa} - \frac{\partial f_{n-k+i}}{\partial q_\kappa} b_{ir}\right), \qquad g_{r\kappa} = -g_{\kappa r},$$

а величини Θ_2 і Θ_1 одержуємо відповідно з L_2 і $\partial L_2 / \partial \dot{q}_{n+i}$ вилученням $\dot{q}_{n-k+i}$ за допомогою рівнянь в'язей (38).

Оскільки в неголономних системах Чаплигіна можна відокремити динамічні рівняння руху від неінтегровних рівнянь в'язей, то ці системи фактично зводяться до голономних з додатковими в порівнянні з (1) силами. Останні можна інтерпретувати як збурення системи (1), яке за певних умов може бути надто малим в околі розглядуваного положення рівноваги, щоб істотно впливати на якісні властивості системи. Отже, в рамках наведеного вище підходу відкривається шлях для дослідження стійкості неголономних систем Чаплигіна.

Теорема 3. *Нехай щодо вихідного лагранжіана* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ *неголономної системи Чаплигіна* (37), (38) *виконуються рівності* (3), (4), *умова* 4 *теореми* 1 *і, крім того*:

1) *матриця* $\mathcal{G}(\mathbf{0}) = (g_{r\kappa}(\mathbf{q}))$ *має вигляд*

$$\mathcal{G}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \qquad l < n-k,$$

де $\det \mathcal{G}_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{0}) \neq 0$, *а* $\mathcal{G}_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{q})$ — *матриця порядку* $(n-k-l) \times (n-k-l)$, *одержана з матриці* $\mathcal{G}(\mathbf{q}) = (g_{r\kappa}(\mathbf{q}))$ *викреслюванням перших* l *рядків і перших* l *стовпчиків*;

2) $\lim\limits_{\|\mathbf{q}\| \to 0} \dfrac{g_{r\kappa}(\mathbf{q})}{(\|\mathbf{q}\|)^{m/2-1+\alpha}} = 0 \quad \forall g_{r\kappa}(\mathbf{q}) \notin \mathcal{G}_{n-k-l,n-k-l}(\mathbf{q}), \quad \mathrm{const} = \alpha > 0;$

3) *звуження функції* $L_0^{(m)}(\mathbf{q})$ *на підпростір* $R^{n-k-l} = \{ q_{l+1} = \ldots = q_{n-k} = 0 \}$ *не має в точці* $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ *максимуму.*

Тоді положення рівноваги $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *розглядуваної системи нестійке й існують розв'язки, які асимптотично прямують до нього при* $t \to \infty$ *і* $t \to -\infty$.

Для доведення достатньо скористатися схемою, яка наведена в п. 1.

Зауважимо, що для теореми 3 справедливі аналоги зауваження 1 і наслідку з теореми 1.

Не становить жодних труднощів отримання для неголономних систем Чаплигіна й аналогу теореми 2.

1. *Routh E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion. – London: McMilland and Co, 1892. – 224 p.
2. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. – Oxford: Clarendon Press, 1867. – Vol. 1. – 727 p.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
4. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т. 6. – 132 с.
5. *Румянцев В. В., Сосницкий С. П.* О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, вып. 6. – С. 144–166.
6. *Hagedorn P.* Über die Instabilität conservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1975. – **58**, № 1. – S. 1–9.
7. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. – 1980. – № 4. – С. 84–89.
8. *Сосницкий С. П.* Действие по Гамильтону и устойчивость равновесия консервативных систем // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 99–106.
9. *Болотин С. В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. – 1993. – № 6. – С. 66–75.
10. *Bolotin S., Negrini P.* Asymptotic solutions of Lagrangian systems with gyroscopic forces // Nonlinear Different. Equat. and Appl. – 1995. – **2**, № 4. – P. 417–444.
11. *Сосницкий С. П.* О стабилизации равновесия консервативных систем с помощью гироскопических сил // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып. 1. – С. 59–69.
12. *Sosnitskii S. P.* On the instability of equilibrium of gyroscopic coupled conservative systems // Int. J. Nonlinear Mech. – 2000. – **35**, № 3. – P. 487–496.
13. *Козлов В. В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // Прикл. математика и механика. – 1982. – **46**, вып. 4. – С. 573–577.
14. *Moauro V., Negrini P.* On the inversion of the Lagrange–Dirichlet theorem // Different. and Integer. Equat. – 1989. – **2**, № 4. – P. 471–478.
15. *Briot C, Bouquet T.* Recherches sur les propriètés des fonctions definies par des équations differentielles // J. Ecole Polytechn. Paris. – 1856. – **21**, № 36. – P. 133–199.
16. *Каменков Г. В.* Избранные труды. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 258 с.; 1972. – Т. 2. – 214 с.
17. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.
18. *Сосницкий С. П.* О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 124–127.
19. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 543 с.
20. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.

Одержано 19.11.2001