УДК 517.95+511.2

**Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк**
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

# БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕІЗОТРОПНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We investigate the correctness of a problem with multipoint conditions on a selected variable $t$ and periodicity conditions on coordinates $x_1, \ldots, x_p$ for anisotropic (concerning the differentiation with respect to $t$ and $x_1, \ldots, x_p$) partial differential equation with constant complex coefficients. We establish conditions for the existence and uniqueness of solution of the considered problem. We prove metric theorems on lower bounds of small denominators that appear in constructing the solution of the problem.

Досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною $t$ та умовами періодичності за координатами $x_1, \ldots, x_p$ для неізотропного (стосовно диференціювання по $t$ та $x_1, \ldots, x_p$) рівняння з частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Багатоточкові задачі для гіперболічних, параболічних і безтипних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [1 – 19] та наведену в них бібліографію). Зокрема, в роботах [2, 3] встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності задач із багатоточковими умовами за виділеною змінною $t$ та умовами росту на нескінченності за іншими координатами для систем диференціальних рівнянь. До цих робіт примикають праці [17 – 19], в яких застосовано узагальнений метод відокремлення змінних для побудови розв'язків багатоточкових задач в необмежених областях. У роботах [12 – 15] вивчено розв'язність багатоточкових задач у гільбертових просторах для диференціально-операторних рівнянь, коефіцієнтами яких є лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення. У роботах [4 – 11] досліджено багатоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях, розв'язність яких пов'язана із проблемою малих знаменників.

Інтерес до вивчення багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними пов'язаний як з важливістю їхньої фізичної інтерпретації, що полягає у знаходженні процесу, який описується даним рівнянням, коли відомі стани цього процесу при декількох спостереженнях (див. [5], розділ 2), так і з побудовою загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними.

Дана праця є розвитком результатів [6, 8, 11] на випадок загальніших (неізотропних стосовно диференціювання по $t$ та $x_1, \ldots, x_p$) рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. У ній встановлено умови коректності задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною $t$ у класі періодичних по $x_1, \ldots, x_p$ функцій; запропоновано новий (порівняно з [5, 6, 8]) метод доведення теорем про оцінки знизу малих знаменників, який базується на встановлених у роботі твердженнях метричного характеру (леми 1, 2). Для побудови коефіцієнтів Фур'є розв'язку задачі використано нормальні фундаментальні системи розв'язків відповідних диференціальних рівнянь (див. п. 3). На відміну від робіт [5, 6, 8] це дозволило уникнути тих малих знаменників, які мають вигляд різниць коренів характеристичних рівнянь.

**1.** Будемо використовувати такі позначення:

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p; \qquad k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p,$$

$$|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|; \qquad (k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p;$$

$\mu_n A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A$; $\Omega_p$— $p$-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}^p: 0 \le x_r \le 2\pi, r = 1, \dots, p\}$, $Q_p = (0, T) \times \Omega_p$; $C^{(n, N)}(\overline{Q}_p)$ — простір гладких в $\overline{Q}_p$ функцій $u(t, x)$ з нормою

$$\| u(t, x) \|_{C^{(n, N)}(\overline{Q}_p)} = \sum_{\substack{j \le n, \\ |q| \le N}} \max_{(t, x) \in \overline{Q}_p} \left| \frac{\partial^{j+|q|} u(t, x)}{\partial t^j \partial x_1^{q_1} \dots \partial x_p^{q_p}} \right|;$$

$G_{\beta, \delta}$, $\beta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, — простір $2\pi$-періодичних по $x_1, \dots, x_p$ комплекснозначних функцій

$$\varphi(x) = \sum_{|k| \ge 0} \varphi_k \exp(ik, x),$$

для яких є скінченною норма

$$\| \varphi \|_{\beta, \delta} = \sum_{|k| \ge 0} |\varphi_k| \exp\left(\delta |k|^\beta\right);$$

$C^n([0, T]; G_{\beta, \delta})$ — простір функцій $u(t, x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0, T]$ похідні $\partial^j u(t, x) / \partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать простору $G_{\beta, \delta}$ і як елементи цього простору є неперервними по $t$ на $[0, T]$. Норма в просторі $C^n([0, T]; G_{\beta, \delta})$ задається формулою

$$\| u(t, x) \|_{n; \beta, \delta} = \sum_{j=0}^{n} \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \right\|_{\beta, \delta}.$$

**2.** Розглянемо задачу вигляду

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t, x) \equiv \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(D) \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} = F(t, x), \qquad (t, x) \in Q_p, \quad (1)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T, \quad x \in \Omega_p, \quad (2)$$

де

$$D = \left( -\frac{i\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{i\partial}{\partial x_p} \right),$$

$A_j(\xi) \equiv A_j(\xi_1, \dots, \xi_p)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1, \dots, \xi_p$ не перевищує $N_j$, $j = 1, \dots, n$. Вигляд області $Q_p$ накладає умови $2\pi$-періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ на функції $u(t, x)$, $F(t, x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

**3.** Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp(ik, x). \quad (3)$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком багатоточкової задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(k) \frac{d^j u_k(t)}{dt^j} = F_k(t), \qquad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T, \quad (5)$$

де $F_k(t)$, $\varphi_{jk}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти розвинень функцій $F(t, x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, у ряди Фур'є за змінними $x_1, \ldots, x_p$. Позначимо через $\{f_q(t, k),\ q = 1, \ldots, n\}$ таку фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння, яке відповідає (4), що $f_q^{(j-1)}(0, k) = \delta_{jq}$, $j = 1, \ldots, n$, де $\delta_{jq}$ — символ Кронекера. Нехай $W(t, k)$ — вронскіан системи функцій $\{f_q(t, k),\ q = 1, \ldots, n\}$, $W_q(t, k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $f_q^{(n-1)}(t, k)$ у визначнику $W(t, k)$,

$$H(t, \tau, k) = \sum_{q=1}^{n} \frac{f_q(t, k) W_q(\tau, k)}{W(\tau, k)},$$

$$\Delta(k) = \det \left\| f_q(t_j, k) \right\|_{j, q = 1}^{n},$$

$\Delta_{jq}(k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $f_q(t_j, k)$ у визначнику $\Delta(k)$.

**Теорема 1.** *Для единості розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{(n, N)}(\overline{Q}_p)$, $N = \max\limits_{1 \le j \le n} \{N_j\}$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{6}$$

***Доведення*** проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з розділу 2 [5] із урахуванням того, що задача (4), (5) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли справджується умова (6).

***Зауваження*** **1.** Якщо для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $\lambda$-корені рівняння $L(\lambda, k) = 0$ є дійсними, тобто $L(d/dt, k)$ є композицією диференціальних операторів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, то на підставі теореми 2 із [20] умова (6) виконується для довільних $t_1, \ldots, t_n$ таких, що $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T$.

**4.** Надалі вважатимемо, що умова (6) справджується. Нехай $F_k(t) \in C[0, T]$. Використовуючи метод варіації довільних сталих, отримуємо, що розв'язок задачі (4), (5) з класу $C^n[0, T]$ зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{kq} f_q(t, k) + \int_0^t H(t, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau, \tag{7}$$

де сталі $C_{kq}$, $q = 1, \ldots, n$, визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{kq} f_q(t_j, k) = \varphi_{jk} - \int_0^{t_j} H(t_j, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Визначник системи (8) збігається з $\Delta(k)$. Застосовуючи правило Крамера для знаходження сталих $C_{kq}$, $q = 1, \ldots, n$, на підставі (3) та (7) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \ge 0} \left\{ \sum_{j, q = 1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} f_q(t, k) \left[ \varphi_{jk} - \int_0^{t_j} H(t_j, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau \right] + \right.$$
$$\left. + \int_0^t H(t, \tau, k) F_k(\tau)\, d\tau \right\} \exp(ik, x). \tag{9}$$

Ряд (9) може, взагалі, розбігатися, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

***Зауваження 2.*** Якщо справджується умова (6), а $\varphi_j(x) \in \mathrm{T}(\mathrm{T}')$, $j = 1, \dots, n$, $F(t, x) \in C([0, T]; \mathrm{T})$ $(C([0, T]; \mathrm{T}'))$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить класу $C^n([0, T]; \mathrm{T})$ $(C^n([0, T]; \mathrm{T}'))$, де $\mathrm{T}, \mathrm{T}'$ — простори тригонометричних поліномів та формальних тригонометричних рядів відповідно [21] (розділ 2, § 6.2).

Нехай $\lambda_1(k), \dots, \lambda_s(k)$, $s \equiv s(k)$, — різні корені рівняння $L(\lambda, k) = 0$, кратності яких відповідно дорівнюють $n_1(k), \dots, n_s(k)$, $n_1(k) + \dots + n_s(k) = n$. Позначимо

$$\gamma = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{N_j}{j} \right\}, \qquad M_1 = \sup \left\{ \frac{|\lambda_j(k)|}{1 + |k|^\gamma}, \ j = 1, \dots, s(k), \ k \in \mathbb{Z}^p \right\},$$

$$M_2 = \max\left\{0; \sup \left\{ \frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1 + |k|^\gamma}, \ j = 1, \dots, s(k), \ k \in \mathbb{Z}^p \right\}\right\},$$

$$M_3 = -\min\left\{0; \inf \left\{ \frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1 + |k|^\gamma}, \ j = 1, \dots, s(k), \ k \in \mathbb{Z}^p \right\}\right\}.$$

Нижче у роботі фігурують додатні сталі $C_j$, $j = 1, \dots, 20$, що не залежать від $k$.

**Теорема 2.** *Нехай справджується умова* (6) *і для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| > |k|^{-\omega} \exp(-\delta |k|^\gamma), \qquad \omega, \delta \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

*Якщо*

$$\varphi_j(x) \in G_{\gamma, \delta_1}, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad F(t, x) \in C\big([0, T]; G_{\gamma, \delta_2}\big),$$
$$\delta_1 > \delta + n M_2 T, \qquad \delta_2 > \delta + (n+1) M_2 T,$$

*то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з класу* $C^{(n, N)}(\overline{Q}_p)$, *який зображається рядом* (9) *і неперервно залежить від функцій* $F(t, x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

***Доведення.*** Для функцій $f_q(t, k)$, $q = 1, \dots, n$, $H(t, \tau, k)$ та їхніх похідних справедливі зображення у вигляді контурних інтегралів [22, с. 162]

$$f_q^{(j-1)}(t, k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{R_k} \frac{\lambda^{j-1} S_q(\lambda, k) \exp(\lambda t)}{L(\lambda, k)} \, d\lambda,$$
$$q, j = 1, \dots, n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^{j-1} H(t, \tau, k)}{\partial t^{j-1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{R_k} \frac{\lambda^{j-1} S_q(\lambda, k) \exp(\lambda(t - \tau))}{L(\lambda, k)} \, d\lambda,$$
$$j = 1, \dots, n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{12}$$

де

$$S_q(\lambda, k) = \lambda^{n-q} + \sum_{j=q}^{n-1} A_{n-j}(k) \lambda^{j-q}, \qquad q = 1, \dots, n-1, \qquad S_n(\lambda, k) \equiv 1,$$

$R_k$ — межа області

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq M_1\left(1+|k|^{\gamma}\right)+1,\ -M_3\left(1+|k|^{\gamma}\right)-1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq M_2\left(1+|k|^{\gamma}\right)+1\right\},$$

а обхід контура $R_k$ здійснюється проти годинникової стрілки. На контурі $R_k$ справджуються нерівності

$$\left|S_q(\lambda, k)\right| \leq C_1(1+|k|)^{\gamma(n-q)}, \quad |L(\lambda, k)| \geq 1,$$

$$|\exp(\lambda t)| \leq \exp\left((M_2(1+|k|^{\gamma})+1)T\right).$$

Оскільки довжина кóнтура $R_k$ не перевищує $2\pi(M_1(1+|k|^{\gamma})+1)$, то з формул (11), (12) маємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|f_q^{(r)}(t,k)\right| \leq C_2(1+|k|)^{\gamma(n+r+1-q)}\exp\left(M_2T|k|^{\gamma}\right), \quad r=0,\dots,n-1, \tag{13}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^r}{dt^r}\int_0^t H(t,\tau,k)F_k(\tau)\,d\tau\right| \leq C_3\overline{F}_k(1+|k|)^{\gamma(r+1)}\exp\left(M_2T|k|^{\gamma}\right), \tag{14}$$

$$r=0,\dots,n-1,$$

$$\left|\Delta_{jq}(k)\right|\left|f_q^{(r)}(t,k)\right| \leq C_4(1+|k|)^{\gamma(n(n-1)/2+r)}\exp\left(nM_2T|k|^{\gamma}\right), \tag{15}$$

$$j,q,r=1,\dots,n,$$

де

$$\overline{F}_k = \max_{t\in[0,T]}|F_k(t)|, \quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Нехай

$$\rho_k = (1+|k|)^{N+\omega+\eta}\exp\left((\delta+nM_2T)|k|^{\gamma}\right),$$

$$\eta = \gamma\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right), \quad \sigma_k = \rho_k(1+|k|)^{\gamma}\exp\left(M_2T|k|^{\gamma}\right).$$

З нерівностей (10), (13) – (15) та формули (9) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(r)}(t)\right| \leq C_5\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_{jk}\right|\rho_k + \overline{F}_k\sigma_k\right), \quad r=0,\dots,n. \tag{16}$$

Із формул (3) та (16) дістаємо

$$\|u(t,x)\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)} \leq C_6\sum_{r=0}^{n}\sum_{|k|\geq 0}\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(r)}(t)\right|(1+|k|)^N \leq$$

$$\leq C_7\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{|k|\geq 0}\left|\varphi_{jk}\right|(1+|k|)^N\rho_k + \sum_{|k|\geq 0}\overline{F}_k(1+|k|)^N\sigma_k\right) \leq$$

$$\leq C_8\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{|k|\geq 0}\left|\varphi_{jk}\right|(1+|k|)^{2N+\omega+\eta}\exp\left((\delta+nM_2T)|k|^{\gamma}\right) +\right.$$

$$+ \sum_{|k|\geq 0} \overline{F}_k(1+|k|)^{2N+\omega+\eta+\gamma}\exp\Big((\delta+(n+1)M_2T)|k|^{\gamma}\Big)\Bigg) \leq$$

$$\leq C_9\left(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{\gamma,\delta_1} + \|F\|_{0;\gamma,\delta_2}\right), \qquad (17)$$

що й завершує доведення теореми.

***Зауваження* 3.** За умов теореми 2 розв'язок задачі (1), (2) належить простору $C^n([0,T];G_{\gamma,\delta_3})$, де

$$\delta_3 < \min\{\delta_1 - \delta - nM_2T,\ \delta_2 - \delta - (n+1)M_2T\}.$$

**5.** Наступні два твердження будуть використані при дослідженні питання про можливість виконання нерівності (10).

**Лема 1.** *Нехай функція* $f(t)\in C^n([0,T];\mathbb{C})$ *і в кожній точці* $t\in[0,T]$ *справджує умову*

$$\left|f^{(n)}(t)+a_1f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nf(t)\right|\geq\delta>0,$$

*де* $a_j\in\mathbb{C}$, $|a_j|\leq G^j$, $j=1,\ldots,n$. *Якщо*

$$y_j(t)=\mathrm{Re}f^{(j)}(t), \qquad y_{n+1+j}(t)=\mathrm{Im}f^{(j)}(t), \qquad j=0,\ldots,n,$$

*а кількість точок межі множини*

$$E=\{t\in(0,T):\ y_j(t)\pm y_q(t)=0,\ 0\leq j<q\leq 2n+1\}$$

*не перевищує* $K$, *то для довільного* $\varepsilon<\delta/(2(n+1)G^n)$

$$\mu_1\{t\in[0,T]:|f(t)|<\varepsilon\}\leq C_{10}(K+1)\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}, \qquad C_{10}=C_{10}(n).$$

***Доведення.*** Нехай $\xi_1<\ldots<\xi_m$, $m\leq K$, — елементи межі множини $E$, $\xi_0=0$, $\xi_{m+1}=T$. Кожна з функцій $y_j(t)\pm y_q(t)$, $0\leq j<q\leq 2n+1$, не може набувати на $[\xi_{i-1},\xi_i]$, $i=1,\ldots,m+1$, значень різних знаків. Тому на кожному з відрізків $[\xi_{i-1},\xi_i]$ для довільних $j,q$ або $|y_j(t)|\geq|y_q(t)|$, або $|y_q(t)|\geq$ $\geq|y_j(t)|$. Отже, існує таке $j_0$, $0\leq j_0\leq 2n+1$, що $\left|y_{j_0}(t)\right|=\max\limits_{0\leq j\leq 2n+1}\left|y_j(t)\right|$, $t\in[\xi_{i-1},\xi_i]$. З умови леми випливає, що для всіх $t\in[\xi_{i-1},\xi_i]$

$$\left|\mathrm{Re}\,f^{(j_0)}(t)\right|=\left|y_{j_0}(t)\right|\geq\frac{\delta}{2(n+1)G^{n-j_0}}, \qquad \text{якщо} \quad 0\leq j_0\leq n,$$

$$\left|\mathrm{Im}\,f^{(j_0-n-1)}(t)\right|=\left|y_{j_0}(t)\right|\geq\frac{\delta}{2(n+1)G^{2n+1-j_0}}, \qquad \text{якщо} \quad n+1\leq j_0\leq 2n+1.$$

Якщо $j_0=0$ або $j_0=n+1$, то при $\varepsilon<\delta/(2(n+1)G^n)$ множина $\{t\in[\xi_{i-1},\xi_i]:\left|y_{j_0}(t)\right|<\varepsilon\}$ є порожньою; якщо ж $j_0\neq 0$ або $j_0\neq n+1$, то при $\varepsilon<$ $<\delta/(2(n+1)G^n)$ за лемою 2 із [4] або

$$\mu_1\{t\in[\xi_{i-1},\xi_i]:|\mathrm{Re}\,f(t)|<\varepsilon\}\leq C_{10}\left(\frac{\varepsilon G^{n-j_0}}{\delta}\right)^{1/j_0}\leq C_{10}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{1/n}$$

(коли $1 \le j_0 \le n$), або

$$\mu_1\{t \in [\xi_{i-1}, \xi_i] : |\operatorname{Im} f(t)| < \varepsilon\} \le C_{10}\left(\frac{\varepsilon G^{2n+1-j_0}}{\delta}\right)^{1/(j_0-n-1)} \le C_{10}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{1/n}$$

(коли $n+2 \le j_0 \le 2n+1$). Враховуючи очевидні включення

$$\{t \in [\xi_{i-1}, \xi_i] : |f(t)| < \varepsilon\} \subset \{t \in [\xi_{i-1}, \xi_i] : |\operatorname{Re} f(t)| < \varepsilon\},$$

$$\{t \in [\xi_{i-1}, \xi_i] : |f(t)| < \varepsilon\} \subset \{t \in [\xi_{i-1}, \xi_i] : |\operatorname{Im} f(t)| < \varepsilon\},$$

маємо

$$\mu_1\{t \in [0, T] : |f(t)| < \varepsilon\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \mu_1\{t \in [\xi_{i-1}, \xi_i] : |f(t)| < \varepsilon\} \le C_{10}(K+1)\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}.$$

Зауважимо, що лема 1 узагальнює результати леми 2 з [4] та лем 2, 4 з [23].

**Лема 2.** *Нехай* $f(t) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\lambda_j t) h_j(t)$, *де* $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_j \ne \lambda_q$, $j \ne q$, $h_j(t)$ — *многочлени степеня* $n_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$, $n = n_1 + \ldots + n_m$. *Якщо* $y_j(t) = \operatorname{Re} f^{(j)}(t)$, $y_{n+1+j}(t) = \operatorname{Im} f^{(j)}(t)$, $j = 0, \ldots, n$, $z_{jq}^{\pm}(t) = y_j(t) \pm y_q(t)$, $0 \le j < q \le 2n+1$, *і* $\max\limits_{1 \le j \le m} |\lambda_j| \le G$, $G > 0$, *то кількість точок межі множини*

$$E = \left\{t \in (0, T) : z_{jq}^{\pm}(t) = 0,\ 0 \le j < q \le 2n+1\right\}$$

*не перевищує* $C_{11} \max\{1, G\}$, $C_{11} = C_{11}(n, T)$.

***Доведення.*** Зауважимо, що кількість точок межі множини $E$ не перевищує кількості точок межі множини

$$\tilde{E} = \left\{t \in (0, GT) : \tilde{z}_{jq}^{\pm}(t) = 0,\ 0 \le j < q \le 2n+1\right\},$$

де

$$\tilde{z}_{jq}^{\pm}(t) = z_{jq}^{\pm}(t/G), \qquad t \in (0, GT), \qquad 0 \le j < q \le 2n+1.$$

Легко перевірити, що функції $\tilde{y}_0(t) \equiv y_0(t/G)$ та $\tilde{y}_{n+1}(t) \equiv y_{n+1}(t/G)$ справджують рівняння

$$R\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) \equiv \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{2\operatorname{Re}\lambda_j}{G}\frac{d}{dt} + \frac{|\lambda_j|^2}{G^2}\right]^{n_j} y(t) = 0. \tag{18}$$

Оскільки

$$R\left(\frac{d}{dt}\right) y^{(r)}(t) = \frac{d^r}{dt^r} R\left(\frac{d}{dt}\right) y(t),$$

то функції $\tilde{z}_{jq}^{\pm}(t)$, $0 \le j < q \le 2n+1$, також є розв'язками рівняння (18). Модулі всіх коефіцієнтів рівняння (18) не перевищують деякої сталої $C_{12}$, $C_{12} = C_{12}(n)$. Покладемо $h = (1 + C_{12})^{-1}$. За теоремою Валле Пуссена [24] на кожному з проміжків $[\xi, \eta] \subset [0, GT]$, $\eta - \xi \le h$, кожна з функцій $\tilde{z}_{jq}^{\pm}(t)$ або тотожно дорівнює нулю (у цьому випадку $\tilde{z}_{jq}^{\pm}(t) \equiv 0$ на всьому відрізку $[0, GT]$), або має не більше ніж $n-1$ нулів. Тому множина

$$\tilde{E}_{jq}^{\pm} = \left\{t \in (0, GT) : \tilde{z}_{jq}^{\pm}(t) = 0\right\}$$

або збігається з $(0, GT)$, або складається не більше ніж з $(n-1)([GT/h]+1)$ відокремлених точок, де $[a]$ — ціла частина числа $a$. Оскільки

$$\tilde{E} \subset \bigcup_{0 \le j < q \le 2n+1} \tilde{E}_{jq}^{\pm},$$

то кількість точок межі множини $\tilde{E}$ не перевищує сумарної кількості точок меж усіх множин $\tilde{E}_{jq}^{\pm}$, $0 \le j < q \le 2n+1$.

Лему доведено.

**6.** Вияснимо, наскільки „багата" множина задач (1), (2), для яких виконується нерівність (10). Нехай

$$m_0(k) = 0, \quad m_j(k) = n_1(k) + \ldots + n_j(k), \quad j = 1, \ldots, s(k).$$

Для кожного $q$, $1 \le q \le n$, позначимо

$$g_q(t, k) = t^{q - m_{j-1}(k) - 1} \exp\left(\lambda_j(k) t\right)\left(\left(q - m_{j-1}(k) - 1\right)!\right)^{-1},$$

$$P_q(\mu, k) = (\mu - \lambda_1(k))^{n_1(k)} \ldots \left(\mu - \lambda_{j-1}(k)\right)^{n_{j-1}(k)} \left(\mu - \lambda_j(k)\right)^{q - m_{j-1}(k)},$$

$$\Lambda_q(k) = \left(\lambda_j(k) - \lambda_1(k)\right)^{n_1(k)} \ldots \left(\lambda_j(k) - \lambda_{j-1}(k)\right)^{n_{j-1}(k)},$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < q \le m_j(k)$, а $\Lambda_q(k) \equiv 1$, $q = 1, \ldots, n_1(k)$.

**Теорема 3.** *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$ *нерівність* (10) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\delta \ge n M_3 T$, $\omega > (p + \gamma) n(n-1)/2$.

***Доведення.*** Нехай

$$\Gamma(k) \equiv \Gamma(k; t_1, \ldots, t_n) = \det\left\| g_q(t_j, k) \right\|_{j, q = 1}^{n},$$

$$\Gamma_q(k) \equiv \Gamma_q(k; t_1, \ldots, t_q), \quad q = 1, \ldots, n,$$

— визначник, який отримуємо з $\Gamma(k; t_1, \ldots, t_n)$ викреслюванням останніх $n - q$ рядків та останніх $n - q$ стовпців, $\Gamma_{qj}(k; t_1, \ldots, t_{q-1})$ — алгебраїчне доповнення елемента $g_j(t_q, k)$, $j = 1, \ldots, q$, у визначнику $\Gamma_q(k; t_1, \ldots, t_q)$. Для $\Gamma_q(k)$, $q = 1, \ldots, n$, справедливі співвідношення

$$P_{q-1}(\partial / \partial t_q, k)\, \Gamma_q(k; t_1, \ldots, t_q) = \exp\left(\lambda_j(k) t_q\right) \Lambda_q(k) \Gamma_{q-1}(k; t_1, \ldots, t_{q-1}), \qquad q = 2, \ldots, n, \tag{19}$$

де $j = j(q)$ таке, що $m_{j-1}(k) < q \le m_j(k)$.

Для фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$ через $N_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1})$, $q = 2, \ldots, n$, позначимо кількість точок межі множини

$$\left\{t_q \in (0, T) : y_{qj}(k; t_1, \ldots, t_q) \pm y_{qr}(k; t_1, \ldots, t_q) = 0,\ 0 \le j < r \le 2q + 1\right\},$$

де

$$y_{qj} = \frac{\partial^j}{\partial t_q^j} \operatorname{Re} \Gamma_q(k; t_1, \ldots, t_q),$$

$$y_{q,\,q+1+j} = \frac{\partial^j}{\partial t_q^j}\operatorname{Im}\Gamma_q(k;t_1,\ldots,t_q), \quad j = 0,\ldots,q.$$

Функція

$$\Gamma_q(k;t_1,\ldots,t_q) = \sum_{j=1}^{q} g_j(t_q,k)\Gamma_{qj}(k;t_1,\ldots,t_{q-1})$$

як функція змінної $t_q$ (при фіксованих $t_1,\ldots,t_{q-1}$) є квазімногочленом, тому за лемою 2

$$N_q(k) \equiv N_q(k;t_1,\ldots,t_{q-1}) \le C_{13}\max_{1\le j\le s(k)}\left(\left|\lambda_j(k)\right|+1\right) \le C_{14}(1+|k|)^{\gamma},$$
$$C_{14} = C_{14}(n,M_1,T). \tag{20}$$

Розглянемо множини

$$G(k) = \left\{\bar t\in[0,T]^n : |\Delta(k;t_1,\ldots,t_n)| < |k|^{-\omega}\exp\left(-\delta|k|^{\gamma}\right)\right\},$$

$$B(k) = \left\{\bar t\in[0,T]^n : |\Gamma(k;t_1,\ldots,t_n)| < \nu_n\right\},$$

$$B_1(k) = \left\{\bar t\in[0,T]^n : |\Gamma_1(k)| < \nu_1\right\},$$

$$B_q(k) = \left\{\bar t\in[0,T]^n : \left|\Gamma_q(k;t_1,\ldots,t_q)\right| < \nu_q,\ \left|\Gamma_{q-1}(k;t_1,\ldots,t_{q-1})\right| \ge \nu_{q-1}\right\},$$
$$q = 2,\ldots,n,$$

де

$$\nu_q \equiv \nu_q(k), \quad q = 1,\ldots,n, \quad \nu_1 = \exp\left(-M_3T(1+|k|^{\gamma})\right),$$
$$\nu_q = \nu_1\nu_{q-1}\left|\Lambda_q(k)\right||k|^{-(q-1)(\gamma+p)-\varepsilon/(n-1)},$$
$$q = 2,\ldots,n, \quad 0<\varepsilon<\omega-(p+\gamma)n(n-1)/2.$$

Легко перевірити, що

$$\Delta(k;t_1,\ldots,t_n) = \Gamma(k;t_1,\ldots,t_n)\det J,$$

де $J$ — матриця переходу від фундаментальної системи $\left\{g_q(t,k)\right\}_{q=1}^{n}$ розв'язків однорідного рівняння, яке відповідає (4), до фундаментальної системи $\left\{f_q(t,k)\right\}_{q=1}^{n}$. Оскільки $\det J = W(0,k)V^{-1}(0,k)$, де $V(t,k)$ — вронскіан системи функцій $\left\{g_q(t,k)\right\}_{q=1}^{n}$, а

$$V(0,k) = \prod_{s(k)\ge j>q\ge 1}\left(\lambda_j(k)-\lambda_q(k)\right)^{n_j(k)n_q(k)}$$

(див. [25, с. 86]) (зазначимо, що $V(0,k)=1$, коли $s(k)=1$), то

$$\Delta(k;t_1,\ldots,t_n) = \Gamma(k;t_1,\ldots,t_n)\prod_{q=1}^{n}\Lambda_q^{-1}(k). \tag{21}$$

Якщо $\bar t\in G(k)$, то, враховуючи формули для $\nu_q$, $q=1,\ldots,n$, та формули (20), (21), отримуємо

$$|\Gamma(k;\bar{t})| = |\Delta(k;\bar{t})| \prod_{q=1}^{n} |\Lambda_q(k)| < \frac{\prod_{q=2}^{n} |\Lambda_q|}{|k|^{\omega} \exp(\delta|k|^{\gamma})} =$$

$$= \frac{\nu_n \prod_{q=2}^{n} |k|^{(q-1)\gamma} |k|^{p(q-1)+\varepsilon/(n-1)}}{\nu_1^n |k|^{\omega} \exp(\delta|k|^{\gamma})} \le \frac{C_{15}\nu_n |k|^{\varepsilon} \prod_{q=2}^{n} |k|^{(q-1)(p+\gamma)}}{|k|^{\omega} \exp(\delta|k|^{\gamma} - nM_3T(1+|k|)^{\gamma})} =$$

$$= \frac{C_{15}\nu_n |k|^{(p+\gamma)n(n-1)/2+\varepsilon}}{|k|^{\omega} \exp(\delta|k|^{\gamma} - nM_3T(1+|k|)^{\gamma})} \le \nu_n$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_1$, де

$$K_1 = K_1(n, p, \omega, \varepsilon, \gamma, T, C_{15}), \quad C_{15} = C_{15}(n, C_{14}).$$

Отже, $G(k) \subset B(k)$ при $|k| > K_1$. Якщо ж $\bar{t} \in B_q(k)$, $q = 2, \ldots, n$, то з рівності (21) випливає

$$|P_{q-1}(\partial/\partial t_q, k)\,\Gamma_q(k; t_1, \ldots, t_q)| \ge \nu_1 \nu_{q-1} |\Lambda_q(k)|, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{22}$$

Для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\bar{0}\}$ у диференціальному операторі $P_q(\partial/\partial t_q, k)$, $q = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, модуль коефіцієнта $a_{jq}$ при $(\partial/\partial t_q)^{q-1-j}$ не перевищує $C_{16}|k|^{\gamma j}$, $j =$ $= 0, \ldots, q-1$, $C_{16} = (n, M_1)$. Оскільки

$$\nu_q \nu_1^{-1} \nu_{q-1}^{-1} |\Lambda_q|^{-1} = |k|^{-(q-1)(p+\gamma)-\varepsilon/(n-1)} < \left(2qC_{16}|k|^{-(q-1)\gamma}\right)^{-1},$$
$$q = 2, \ldots, n,$$

де

$$k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| > K_2, \quad K_2 = K_2(\varepsilon, n, M_1, \gamma, p, C_{16}),$$

то з леми 1 та нерівності (20) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_2$, отримуємо

$$\begin{gathered} \mu_1 B_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) \le C_{10}(N_q(t_1, \ldots, t_{q-1}) + 1) \times \\ \times \sqrt[q-1]{\nu_q \nu_1^{-1} \nu_{q-1}^{-1} |\Lambda_q|^{-1}} \le C_{17}|k|^{-p-\varepsilon/((q-1)(n-1))}, \\ C_{17} = C_{17}(n, T), \quad q = 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{23}$$

де

$$B_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) =$$
$$= \{ t_q \in [0, T] : (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_q, t_{q+1}, \ldots, t_n) \in B_q(k) \}, \quad q = 2, \ldots, n.$$

Інтегруючи оцінку (23) за змінними $t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n$ у кубі $[0, T]^{n-1}$, для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_2$, маємо

$$\mu_n B_q(k) \le C_{17} T^{n-1} |k|^{-p-\varepsilon/((q-1)(n-1))}, \quad q = 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Оскільки

$$|\exp(\lambda_j(k)t)| \ge \exp(-M_3T(1+|k|^{\gamma})) = \nu_1(k), \quad t \in [0, T],$$

то $B_1(k) = \varnothing$, і, отже, $B(k) = \bigcup_{q=2}^{n} B_q(k)$. З нерівності (24) випливає

$$\sum_{|k|\geq 0} \mu_n B(k) \leq \sum_{|k|\geq 0} \sum_{q=2}^{n} \mu_n B_q(k) \leq C_{18} \sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^{p+\varepsilon/(n-1)^2}} < \infty.$$

Для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_1$, $G(k) \subset B(k)$, тому ряд $\sum_{|k|\geq 0} \mu_n G(k)$ є збіжним. За лемою Бореля – Кантеллі [26] міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих векторів $\bar{t}$, які належать нескінченній кількості множин $G(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулеві.

Теорему доведено.

***Зауваження* 4.** У формулюванні теореми 3 нижню межу для показника $\delta$ в нерівності (10) можна замінити на $mM_3T$, де $m \equiv m(k)$ — кількість $\lambda$-коренів рівняння $L(\lambda, k) = 0$ з від'ємною дійсною частиною (із урахуванням кратності).

Запропонований при доведенні теореми 3 підхід до аналізу оцінки знизу модуля визначника $\Delta(k)$ відрізняється від відомого методу П. І. Штабалюка [6] і в технічному плані є зручнішим.

З теорем 2, 3 випливає таке твердження про розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх векторів $\bar{t} \in [0, T]^n$.

**Теорема 4.** *Нехай*

$$\varphi_j(x) \in G_{\gamma,\delta_1}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad F(t, x) \in C\big([0, T]; G_{\gamma,\delta_2}\big),$$

$$\delta_1 > (nM_2 + mM_3)T, \quad \delta_2 > ((n+1)M_2 + mM_3)T.$$

*Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\bar{t} \in [0, T]^n$ і довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння* (1) *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з класу $C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)$, який зображається рядом* (9) *і неперервно залежить від функцій $F(t, x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.*

Результат теореми 4 є сильнішим порівняно з результатами робіт [6, 8, 11] і в тому плані, що в них встановлено коректну розв'язність багатоточкових задач для майже всіх векторів $\bar{t} \in [0, T]^n$ і для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівняння (1).

***Зауваження* 5.** Якщо в рівнянні (1) $A_j(\xi)$ — однорідні форми степеня $j$, $j = 1, \ldots, n$ (тобто $\gamma = 1$), і оператор $L(\partial/\partial t, D)$ є строго гіперболічним (тобто всі $\lambda$-корені рівняння $L(\lambda, k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є уявними та різними), то нерівність (10) виконується для майже всіх векторів $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$ при $\delta = 0$, $\omega > (p+1)n(n-1)/2$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. У цьому випадку для майже всіх $\bar{t} \in [0, T]^n$ існує розв'язок задачі (1), (2) з класу $C^n(\overline{Q}_p)$, якщо $F(t, x) \in C^{(0, z_1)}(\overline{Q}_p)$, $\varphi_j(x) \in C^{z_2}(\overline{\Omega}_p)$, $j = 1, \ldots, n$, де

$$z_1 > z_2 + 1, \quad z_2 > p + pn(n-1)/2 + n(n+1).$$

**7.** У випадку, коли справджуються співвідношення

$$t_j = (j-1)t_0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 < t_0 \leq T/(n-1), \tag{25}$$

визначник задачі (4), (5) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) \equiv \Delta(k, t_0) =$$

$$= t_0^{\alpha(k)} \exp(\beta(k)t_0) \prod_{s(k)\geq j>q\geq 1} \left[\frac{\exp\big(\lambda_j(k)t_0\big) - \exp\big(\lambda_q(k)t_0\big)}{\lambda_j(k) - \lambda_q(k)}\right]^{n_j(k)n_q(k)}, \tag{26}$$

де

$$\alpha(k) = \sum_{q=1}^{s(k)} \frac{n_q(k)\big(n_q(k)-1\big)}{2}, \quad \beta(k) = \sum_{q=1}^{s(k)} \frac{n_q(k)\big(n_q(k)-1\big)\lambda_q(k)}{2}.$$

З теореми 1 та формули (24) випливає таке твердження.

**Теорема 5.** *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2), (23) *у просторі* $C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)$ *необхідно і досить, щоб для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *і для всіх* $l \in \mathbb{Z}$ *виконувались нерівності*

$$(\lambda_j(k) - \lambda_q(k))\, t_0 \neq i2\pi l, \quad 1 \le j < q \le s(k).$$

***Наслідок.*** *Задача* (1), (2), (25) *не може мати двох різних розв'язків із простору* $C^{(n,N)}(\overline{Q}_p)$, *якщо для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справедливі нерівності*

$$\operatorname{Re}\big(\lambda_j(k) - \lambda_q(k)\big) \neq 0, \quad 1 \le j < q \le s(k).$$

**Теорема 6.** *Для визначника* (26) *нерівність* (10) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_0 \in [a, T/(n-1)]$, $a > 0$, *при*

$$\delta \ge (n^2/(n-1) + n/2) M_3 T, \quad \omega > n^2(p+\gamma)$$

*для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

***Доведення.*** Нехай

$$\psi_{jq}(k, t_0) = \frac{\exp\big(\lambda_j(k) t_0\big) - \exp\big(\lambda_q(k) t_0\big)}{\lambda_j(k) - \lambda_q(k)},$$

$$s(k) \ge j > q \ge 1, \quad P_q(\mu, k) = \mu - \lambda_q(k), \quad q = 1, \ldots, s(k),$$

$$\gamma_1(k) = \exp\big(-M_3 T (1 + |k|^\gamma)/(n-1)\big),$$

$$\gamma_2(k) = (1 + |k|)^{-p-\gamma-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно, що

$$|P_q(d/dt_0, k)\psi_{jq}(k, t_0)| = |\exp(\lambda_j(k) t_0)| \ge \gamma_1(k).$$

Тому із лем 1, 2 випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K_3$, $K_3 = K_3(\varepsilon, M_1)$,

$$\mu_1\{t_0 \in [a, T/(n-1)] : |\psi_{jq}(k, t_0)| < \gamma_1(k)\gamma_2(k)\} \le C_{18}(1 + |k|)^{-p-\varepsilon}.$$

Оскільки при $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{|k| \ge 0} (1 + |k|)^{-p-\varepsilon}$ збігається, то за лемою Бореля – Кантеллі для майже всіх чисел $t_0 \in [a, T/(n-1)]$ нерівність

$$\prod_{s(k) \ge j > q \ge 1} \left|\psi_{jq}(k, t_0)\right|^{n_j(k) n_q(k)} \ge \prod_{s(k) \ge j > q \ge 1} \left|\gamma_1(k)\gamma_2(k)\right|^{n_j(k) n_q(k)} \ge$$

$$\ge \frac{\exp\big(-n^2 M_3 T |k|^\gamma/(n-1)\big)}{|k|^{n^2(p+\gamma+\varepsilon)}} \tag{27}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Оскільки для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується оцінка

$$|\exp(\beta(k) t_0)| \ge \exp\big(-n M_3 T (1 + |k|^\gamma)/2\big),$$

то з (26) і нерівності (27) випливає твердження теореми.

**8.** У теоремі 3 вказано оцінки знизу для показників $\delta, \omega$, при яких нерівність (10) виконується для майже всіх векторів $\bar{t} \in [0, T]^n$ і для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Однак можуть існувати такі вектори $\bar{t} \in [0, T]^n$, що нерівність (10) не виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при як завгодно великих $\delta, \omega$. Покажемо це на прикладі такої задачі:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in Q_1,$$
$$u(t_1, x) = \varphi_1(x), \qquad u(t_1 + \alpha, x) = \varphi_2(x), \qquad x \in \Omega_1. \tag{28}$$

Для задачі (28) $\Delta(0) = \alpha$, $\Delta(k) = k^{-1}\sin(k\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\gamma = 1$. За теоремою Хінчина [27, с. 48] для довільних $\delta > 0$, $\omega > 0$ існує таке ірраціональне число $\alpha > 0$, що нерівність $|k\alpha - m\pi| < |k|^{1-\omega}\exp(-\delta|k|)$ має нескінченну множину розв'язків в цілих числах $k, m$. Оскільки

$$|\sin(k\alpha)| = |\sin(k\alpha - m\pi)| \le |k\alpha - m\pi|,$$

де $m \in \mathbb{Z}$, то нерівність $|\Delta(k)| < |k|^{-\omega}\exp(-\delta|k|)$ має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k$.

Нижні межі для показників $\delta, \omega$ з нерівності (10) в окремих випадках є точнішими, ніж в теоремі 3. Розглянемо, наприклад, задачу з умовами (2) (де $t_1 \ge \alpha > 0$) для рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in Q_1.$$

Для цієї задачі $p = 1$, $\gamma = 2$, $M_3 = 1$, $m = 0$, а

$$\Delta(k) = \exp\left(k^2(t_1 + \ldots + t_n)\right) \prod_{j=2}^{n} ((j-1)!)^{-1} \prod_{n \ge j > q \ge 1} (t_j - t_q). \tag{29}$$

На підставі теореми 3, враховуючи зауваження 4, отримуємо, що для майже всіх векторів $\bar{t}$ і для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел $k$ виконується нерівність

$$|\Delta(k)| > |k|^{-n(n-1)-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0; \tag{30}$$

разом з тим із формули (29) випливає оцінка $|\Delta(k)| \ge C_{20}\exp(n\alpha k^2)$, $C_{20} = C_{20}(\bar{t}, n) > 0$, яка є точнішою, ніж оцінка (30).


1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
2. *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1972. – Вып. 16. – С. 98 – 109.
3. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29 – 34.
4. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637 – 645.

5. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – **35**. – С. 210 – 215.
7. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Допов. НАН України. – 1996. – № 3. – С. 10 – 14.
8. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 66 – 79.
9. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там же. – № 11. – С. 1468 – 1476.
10. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 42 – 48.
11. *Василишин П. Б.* Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2001. – 20 с.
12. *Валицкий Ю. Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 4. – С. 44 – 53.
13. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Там же. – 1996. – **37**, № 2. – С. 251 – 258.
14. *Абдо С. А., Юрчук Н. И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 3. – С. 417 – 425.
15. *Абдо С. А., Юрчук Н. И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Априорные оценки // Там же. – № 5. – С. 806 – 815.
16. *Сайдаматов Э. М.* О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений // Узб. мат. журн. – 1995. – № 2. – С. 77 – 88.
17. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 232 с.
18. *Клюс І. С., Нитребич З. Н.* Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 220 – 226.
19. *Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М.* Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 144 – 152.
20. *Скоробогатько В. Я.* Разложимость дифференциального оператора на множители и теорема о дифференциальных неравенствах // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 2. – С. 215 – 219.
21. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
22. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
23. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59 – 62.
24. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
25. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
26. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Выща шк., 1979. – 408 с.
27. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.


Одержано 11.04.2001