УДК 517.929; 519.21

Д. Г. Кореніівський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НЕМОЖЛИВІСТЬ СТАБІЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ЗБУРЕННЯМИ ЇЇ КОЕФІЦІЄНТІВ СТОХАСТИЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ТИПУ „БІЛОГО ШУМУ"

We consider the question of whether it is possible to stabilize in mean square solutions to a system of linear determined difference equations with discrete time by means of perturbations of its coefficients by a stochastic "white noise" type process. The answer is negative and is based on the analysis of the corresponding Sylvester algebraic equation introduced earlier by the author into the theory of stability of stochastic systems. We simultaneously give a similar answer to the same question concerning a vector-matrix system of linear difference equations with continuous time and a vector-matrix system of differential equations.

Ставиться питання про стабілізацію в середньому квадратичному розв'язків системи лінійних детермінованих різницевих рівнянь з дискретним часом збуреннями її коефіцієнтів стохастичним процесом типу „білого шуму". Відповідь — негативна і ґрунтується на аналізі відповідного матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра, введеного автором в теорію стійкості стохастичних систем раніше. Водночас дається аналогічна відповідь на таке саме питання відносно векторно-матричної системи лінійних різницевих рівнянь з неперервним часом та векторно-матричної системи диференціальних рівнянь.

1. Історія питання для диференціальних рівнянь і деяке узагальнення автора. В роботах 60-х років (див., наприклад, [1 – 4] і [5] (гл. VI, § 9)) широко висвітлювалось питання про можливість стабілізації в середньому квадратичному нестійкого розв'язку диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, якщо до коефіцієнтів цього рівняння додати випадкову функцію часу $\alpha(t)$ типу гауссівського „білого шуму" (тобто випадкового процесу із статистичними характеристиками $M\{\alpha(t)\} = 0$, $M\{\alpha(t)\alpha(t+\tau)\} = s\delta(\tau)$, де M — символ математичного сподівання, $\delta(\tau)$ — дельта-функція Дірака, s — інтенсивність шуму). Правильна відповідь для випадку середньоквадратичної стійкості, одержана в [1], виявилась негативною (див. [3]).

У роботі Ю. Л. Работнікова [4] негативна відповідь була одержана і для скалярного диференціального рівняння n-го порядку. В доведеннях суттєво використано перетворення Лапласа.

Дослідження питання про можливість стабілізації нестійких розв'язків задачі Коші для лінійної детермінованої векторно-матричної системи диференціальних рівнянь загального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad 0 \le t_0 \le t < \infty, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1)$$

шляхом збурення постійної матриці A матричними стохастичними добавками типу „білого шуму" $B\alpha(t)$ (B — стала матриця із $\mathbb{R}^{n\times n}$) не проводилось. Проте *негативна відповідь* на це питання випливає із досліджень автора алгебраїчних коефіцієнтних критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для лінійної векторно-матричної системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx(t) = [Adt + Bdw(t)]x(t), \quad 0 \le t_0 \le t < \infty,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad dw(t) = \alpha(t)dt, \quad (2)$$

виражених у термінах матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра (див. [6], гл. 1).

Наведемо це просте (неопубліковане) алгебраїчне матричне доведення неможливості стабілізувати розв'язки системи (2) (і, отже, неможливості стабілізувати і систему (1)) шляхом збурення матриці A матрицею $B\,dw(t)$.

Щоб уникнути надалі повторів, нагадаємо деякі терміни з матричного аналізу.

Означення 1. *Матриця A називається стійкою, якщо її власні значення $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мають від'ємні дійсні частини,* $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$ (*див.* [7, *с.*280]).

Стійку матрицю часто називають також *гурвіцевою*.

Означення 2. *Матриця A називається збіжною, якщо її власні значення $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, мають модулі менші одиниці,* $|\lambda_i(A)| < 1$ (*див.* [8, *с.* 15]).

Збіжну матрицю часто називають також *стійкою за Шуром* (на відміну від гурвіцевої матриці).

Для загальної векторно-матричної системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто (2) відомо (див. [6], теорема 1.2), що її тривіальний розв'язок $(x(t) = 0)$ *асимптотично стійкий за Ляпуновим у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли матриця A гурвіцева та існує додатно визначений розв'язок H, $H = H^T > 0$, матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра*

$$A^T H + HA + B^T HB = -E, \quad E \text{ — одинична матриця.} \tag{3}$$

Які ж судження можна висловити на основі дослідження матричного рівняння Сільвестра (3)? Перш за все, якщо детермінована система диференціальних рівнянь (1) (вона відповідає випадку $B = 0$ в (2)) нестійка, тобто коли матриця A негурвіцева, то неважко бачити із (3), що при будь-якій матриці $H >> 0$ матрична рівність $A^T H + HA + B^T HB = -E$ неможлива; це означає, що нестійку детерміновану диференціальну систему загального вигляду (1) неможливо зробити стійкою при збуренні її коефіцієнтів (тобто збуренні матриці A) стохастичними матричними добавками $B\,dw(t)$. З іншого боку, якщо детермінована система асимптотично стійка (тобто матриця A гурвіцева), то в лівій частині матричної рівності (3) при $H > 0$ матриця $A^T H + HA$ від'ємно визначена, а матриця $B^T HB$ завжди невід'ємно визначена (більш того, при невиродженій матриці B матриця $B^T HB$ завжди додатно визначена). Отже, і у випадку гурвіцевої матриці A можливий клас матриць B з такою нормою, що $B^T HB > > A^T H + HA$, звідки випливає, що не існує матриці $H > 0$ — розв'язку матричного рівняння Сільвестра (3). Іншими словами, стохастичні збурення в системі (2) мають *односторонню дію* — дію лише на зменшення запасу стійкості аж до повної втрати системою властивостей стійкості.

2. Основний результат. Питання про можливість стабілізувати нестійку дискретну динамічну систему, математичною моделлю якої є векторно-матрична система лінійних детермінованих різницевих рівнянь з дискретним часом

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{4}$$

збуреннями матриці A стохастичним процесом типу дискретного „білого шуму" $\xi(k)$, $\xi(k) = w(k+1) - w(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (тобто процесу із статистичними характеристиками: $\mathrm{M}\{\xi(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\xi^2(k)\} = 1$, $\mathrm{M}\{\xi(k)\xi(j),\ k \neq j\} = 0$) в літературі ніде не обговорювалось.

Покажемо, що негативна відповідь на це питання випливає із наших попередніх опублікованих досліджень алгебраїчних коефіцієнтних критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для векторно-матричної системи лінійних стохастичних різницевих рівнянь

$$x(k+1) = [A + B\xi(k)]x(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x(0) = x_0, \tag{5}$$

виражених у термінах матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра (див. [6], теорема 2.2). Міркування при обгрунтуванні такої відповіді аналогічні міркуванням для векторно-матричної системи диференціальних рівнянь (2), наведених у п. 1. Отже, перейдемо тепер до алгебраїчного матричного обгрунтування.

Відомо [6] (теорема 2.2), що *тривіальний розв'язок* $(x(k)=0)$ *системи рівнянь* (5) *асимптотично стійкий за Ляпуновим у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли матриця* A *збіжна та існує додатно визначений розв'язок* H, $H=H^T>0$, *матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра*

$$H - A^T HA - B^T HB = E. \tag{6}$$

Проаналізуємо рівняння (6). З одного боку, якщо детермінована система різницевих рівнянь (4) (вона відповідає випадку $B=0$ в (5)) нестійка, тобто матриця A не збіжна, то, як видно із (6), при будь-якій матриці $H>0$ матрична рівність $H - A^T HA - B^T HB = E$ неможлива; це означає, що нестійку детерміновану різницеву систему рівнянь (4) неможливо зробити стійкою при збуренні її коефіцієнтів (тобто збуренні матриці A) стохастичними матричними добавками $B\xi(k)$.

З іншого боку, якщо розв'язки задачі Коші детермінованої лінійної системи (4) асимптотично стійкі, то в лівій частині матричної рівності (6) при $H>0$ матриця $H - A^T HA$ додатно визначена. Отже, і у випадку збіжної матриці A можливий клас матриць B з такою нормою, що $B^T HB > H - A^T HA$. Звідси випливає, що не існує матриці $H>0$ — розв'язку матричного рівняння Сільвестра (6). Іншими словами, стохастичні збурення в системі (5) мають *односторонню дію* — дію лише на зменшення запасу стійкості аж до повної втрати системою властивостей стійкості.

3. Аналогія для різницевих рівнянь з неперервним часом. Розглянемо тепер задачу Коші для лінійної детермінованої векторно-матричної системи різницевих рівнянь з неперервним часом t

$$x(t+\tau_0) = Ax(t), \quad 0 \le t_0 \le t < \infty, \quad x(t_0) = x_0, \quad \tau_0 = \text{const} > 0, \tag{7}$$

і сталою матрицею коефіцієнтів A. Деякі дослідження стійкості розв'язків такого класу різницевих рівнянь відображені в роботах [9 – 12], а стохастичних різницевих рівнянь з неперервним часом

$$\begin{gathered} x(t+\tau_0) = [A + B\xi(t)]x(t), \quad 0 \le t_0 \le t < \infty, \\ x(t_0) = x_0, \quad \tau_0 = \text{const} > 0, \\ \mathrm{M}\{\xi(t)\} = 0, \quad \mathrm{M}\{\xi^2(t)\} = 1, \quad \mathrm{M}\{\xi(t)\xi(t_1),\ t \ne t_1\} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

— в роботах [13 – 16]. Проте питання про можливість стабілізації нестійких розв'язків такої задачі Коші шляхом стохастичного збурення матриці A в них не розглядались.

Якщо поставити задачу: чи можна нестійку детерміновану систему (7) шляхом збурення її матриці коефіцієнтів A стохастичною матричною добавкою $B\xi(t)$ зробити асимптотично стійкою в середньому квадратичному, то, як і у випадку різницевих рівнянь з дискретним часом, *відповідь негативна*. Обгрунтовується вона аналогічно тому, як це було виконано в п. 2 для різницевих рівнянь з дискретним часом. Відправним твердженням для обгрунтування є відома теорема [13, 14], згідно з якою *тривіальний розв'язок* $(x(t)=0)$ *системи рівнянь* (8) *асимптотично стійкий за Ляпуновим у середньому квадратичному* *тоді і тільки тоді, коли матриця A збіжна та існує додатно визначений розв'язок H, $H = H^T > 0$, матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра* (6).

1. *Caughey T. K.* Comments on „On the stability of random systems by J. C. Samuels" // J. Acoust. Soc. Amer. – 1960. – **32**, № 10. – P. 1356.
2. *Bogdanoff J. L., Kozin F.* Moments of the output of linear random systems // Ibid. – 1962. – **34**, № 8. – P. 1063 – 1066.
3. *Арайрэтнам С. Т., Греиф П. В.* Линейные системы со случайными коэффициентами // Техн. кибернетика за рубежом: Сб. переводов. – М.: Машиностроение, 1968. – С. 108 – 134. – (Перевод из Int. J. Contr., Int. J. Electr., 1966).
4. *Работников Ю. Л.* О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 5. – С. 935 – 940.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 348 с.
6. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
7. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Пер. с англ. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
8. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
9. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
10. *Жабко А. П., Харитонов В. Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления. – СПб.: СПб. ун-т, 1993. – 320 с.
11. *Кайзер К., Кореневский Д. Г.* Алгебраические коэффициентные признаки абсолютной устойчивости линейных разностных систем с непрерывным временем и запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 1. – С. 22 – 27.
12. *Кореневский Д. Г., Кайзер К.* Коэффициентные условия асимптотической устойчивости решений систем линейных разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 516 – 522.
13. *Кореневский Д. Г.* Критерии асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений систем линейных стохастических разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием // Там же. – № 8. – С. 1073 – 1081.
14. *Кореневский Д. Г.* Асимптотическая устойчивость решений систем линейных разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием при случайных возмущениях коэффициентов // Докл. РАН. – 1999. – **365**, № 1. – С. 13 – 16.
15. *Коренівський Д. Г.* Взаємозв'язок спектрального і коефіцієнтного критеріїв стійкості в середньому квадратичному для систем лінійних стохастичних диференціальних та різницевих рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 2. – С. 228 – 233.
16. *Кореневский Д. Г.* Критерии устойчивости решений систем линейных детерминированных и стохастических разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 2. – С. 213 – 229.

Одержано 17.01.2001