УДК 517.574

Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк (Львів. нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕНІ УМОВИ ЛІНДЕЛЬОФА СКІНЧЕННОСТІ λ-ТИПУ СУБГАРМОНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ*

We establish a criterion of λ-type finiteness of a subharmonic function. If $\lambda(r) = r^{\rho} L(r)$, $\rho \in \mathbb{N}$, where L is a slowly varying function, this criterion coincides with the Lindelöf criterion.

Встановлено критерій скінченності λ-типу субгармонійної функції. У випадку, коли $\lambda(r) = r^{\rho} L(r)$, $\rho \in \mathbb{N}$, де L — повільно змінна функція, цей критерій збігається з критерієм Ліндельофа.

Функцією зростання назвемо довільну додатну, неперервну, зростаючу, необмежену на $(0, +\infty)$ функцію. Через ρ^* і μ_* позначимо порядок і нижній порядок Пойя функції зростання λ [1],

$$\rho^* = \varlimsup_{t,\tau \to +\infty} \frac{\log\lambda(\tau t) - \log\lambda(t)}{\log\tau}, \quad \mu_* = \varliminf_{t,\tau \to +\infty} \frac{\log\lambda(\tau t) - \log\lambda(t)}{\log\tau}.$$

Зауважимо (див., наприклад, [2]), що $\rho^* < +\infty$ тоді і лише тоді, коли $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$.

Для субгармонійної в $\mathbb{C}$ функції u позначимо $B(r, u) = \max\{u(z) : |z| \le r\}$.

Означення [3]. *Нехай λ — функція зростання, $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$. Субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція u називається функцією скінченного λ-типу, якщо $B(r, u) \le a\lambda(r)$ при деякому $a > 0$ для всіх $r > 0$. Клас таких функцій u, гармонійних в деякому околі нуля, $u(0) = 0$, позначимо через Λ_S.*

Нехай μ — міра Рісса субгармонійної функції u, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, $u(0) = 0$, $n(t) = n(t, u) = \mu(\{z : |z| \le t\})$, $N(r, u) = \int_0^r n(t, u) t^{-1} dt$,

$$u(z) = \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k z^k \tag{1}$$

— розвинення в деякому околі точки $z = 0$. Порядком функції u називається порядок зростання функції $B(r, u)$,

$$\rho[u] = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log B(r, u)}{\log r}.$$

Основним результатом статті є така теорема.

* Виконана при підтримці INTAS (проект № 99-00089).

Теорема. *Нехай функція зростання* λ *задовольняє умову* $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$. *Якщо* $u \in \Lambda_S$, *то існує стала* a *така, що*

$$N(r, u) \le a\lambda(r), \quad r > 0, \tag{2}$$

$$r^k \left| \alpha_k + \frac{1}{k} \int_{|\zeta| \le r} \frac{d\mu_\zeta}{\zeta^k} \right| \le a\lambda(r), \quad r > 0, \tag{3}$$

при $k \in \mathbb{N}$ *та* α_k, *що визначаються співвідношенням* (1).

Якщо порядок $\rho[u]$ *субгармонійної функції* u *не перевищує порядку Пойя* ρ^* *функції зростання* λ *і при деякому* $a > 0$ *виконуються* (2), *а також* (3) *при* $k \in [\mu_*, \rho^*] \cap \mathbb{N}$, *то* $u \in \Lambda_S$.

У випадку $u = \log|f|$ (f — ціла функція), $\lambda(r) = r^\rho L(r)$ ($\rho \in \mathbb{N}$, $L(r)$ — повільно змінна функція) критерій скінченності λ-типу функції u був встановлений Ліндельофом [4].

Позначимо

$$c_k(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При доведенні теореми будемо використовувати таке твердження.

Лема [3]. *Нехай функція зростання* λ *задовольняє умову* $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$. *Субгармонійна функція* u *буде функцією скінченного* λ*-типу тоді і лише тоді, коли*

$$|c_k(r, u)| \le a\lambda(r), \quad r > 0, \tag{4}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$ *при деякому* $a > 0$.

Доведення теореми. Коефіцієнти Фур'є функції u мають вигляд [3, 5]

$$c_0(r, u) = N(r, u),$$

$$c_k(r, u) = \frac{1}{2} \alpha_k r^k + \frac{1}{2k} \int_{|\zeta| \le r} \left[\left(\frac{r}{\zeta} \right)^k - \left(\frac{\bar{\zeta}}{r} \right)^k \right] d\mu_\zeta, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$c_{-k}(r, u) = \overline{c_k(r, u)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Зауважимо, що

$$\left| \int_{|\zeta| \le r} \left(\frac{\bar{\zeta}}{r} \right)^k d\mu_\zeta \right| \le \int_{|\zeta| \le r} d\mu_\zeta = n(r, u) \le N(er, u), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Якщо $u \in \Lambda_S$, то з (4), (5) і (7) отримуємо (2) та (3) при $k \in \mathbb{N}$.

Нехай тепер субгармонійна функція u така, що $\rho[u] \le \rho^*$. Тоді при $\lambda_1(r) = r^{\rho^* + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, вона є функцією скінченного λ_1-типу. За лемою існує стала a_1 така, що $|c_k(r, u)| \le a_1 \lambda_1(r)$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Звідси, з (5) та (7) випливають нерівності

$$r^k \left| \alpha_k + \frac{1}{k} \int_{|\zeta| \le r} \frac{d\mu_\zeta}{\zeta^k} \right| \le br^{\rho^* + \varepsilon}, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

при деякому $b > 0$. Поділимо обидві частини цих нерівностей на r^k і перейдемо до границі при $r \to +\infty$, $k > \rho^*$, вважаючи $\varepsilon < k - \rho^*$. Отримаємо

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu_\zeta}{\zeta^k}, \quad k > \rho^*.$$

Отже,

$$c_k(r, u) = -\frac{1}{2k} \int_{|\zeta|>r} \left(\frac{r}{\zeta}\right)^k d\mu_\zeta - \frac{1}{2k} \int_{|\zeta|\le r} \left(\frac{\overline{\zeta}}{r}\right)^k d\mu_\zeta, \quad k > \rho^*,$$

і тому

$$|c_k(r, u)| \le \frac{1}{2k} \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k dn(t) + \frac{1}{2k} \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k dn(t) \le \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(t)}{t} d(t), \quad k > \rho^*.$$

За умови (2) звідси отримуємо

$$|c_k(r, u)| \le a_1 \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{\lambda(t)}{t} dt = a_1 \int_1^{+\infty} \frac{\lambda(rt)}{t^{k+1}} dt, \quad k > \rho^*.$$

За означенням ρ^* для довільного ε, $0 < \varepsilon < k - \rho^*$, знайдуться t_0, r_0 такі, що при $r > r_0$, $t > t_0$ виконується $\lambda(rt) \le \lambda(r) t^{\rho^* + \varepsilon}$. Отже,

$$|c_k(r, u)| \le a_1 \int_1^{t_0} \frac{\lambda(rt)}{t^{k+1}} dt + a_1 \lambda(r) \int_{t_0}^{+\infty} t^{\rho^* + \varepsilon - k - 1} dt, \quad k > \rho^*, \quad r > r_0.$$

Враховуючи, що $\lambda(rt_0) \le b\lambda(r)$ при деякому $b > 0$ для всіх $r > 0$, отримуємо (4) для $k > \rho^*$ при деякому $a > 0$.

Якщо виконується (3) при $k \in [\mu_*, \rho^*] \cap \mathbb{N}$, то на підставі (7) для таких k виконується і (4). При $\mu_* < 1$ з огляду на (6) отримуємо, таким чином, (4) для $k \in \mathbb{Z}$. За лемою $u \in \Lambda_S$.

Нехай тепер $\mu_* > 1$. При $0 < k < \mu_*$ маємо

$$2|c_k(r, u)| \le |\alpha_k| r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(t)}{t} dt + \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n(t)}{t} dt \le$$

$$\le |\alpha_k| r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n(t)}{t} dt + N(r, u). \tag{8}$$

За означенням μ_* для довільного ε, $0 < \varepsilon < \mu_* - k$, знайдуться t_0, τ_0 такі, що при $t \ge t_0$, $\tau \ge \tau_0$ виконується $\lambda(t\tau) \ge \lambda(t) \tau^{\mu_* - \varepsilon}$. Звідси $\tau^k \le \lambda(t_0\tau)/\lambda(t_0) \le$ $\le c\lambda(\tau)$, $\tau > 0$, при деякому $c > 0$, а також

$$\lambda(t) \le \lambda(r) \left(\frac{t}{r}\right)^{\mu_* - \varepsilon}$$

при $t_0 \le t \le r/\tau_0$. Отже, за умови (2) співвідношення (8) набирає вигляду

$$2|c_k(r,u)| \leq b\lambda(r) + r^k \int_0^{t_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt + \lambda(r) \int_{t_0}^{r/t_0} \left(\frac{t}{r}\right)^{\mu_* - k - \varepsilon} \frac{dt}{t} +$$

$$+ n(r) \int_{r/t_0}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{dt}{t} \leq b_1 \lambda(r), \quad r > 0, \quad 0 < k < \mu_*,$$

при деякому $b_1 > 0$. Тоді з огляду на (6) отримуємо (4) для всіх $k \in \mathbb{Z}$. За лемою $u \in \Lambda_\varsigma$, що завершує доведення теореми.

1. *Drasin D., Shea D.* Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – **34**, № 2. – P. 403 – 411.
2. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1991. – **85**. – С. 5 – 186.
3. *Noverraz P.* Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes // Ann. Inst. Fourier. – 1969. – 19, № 2. – P. 419 – 493.
4. *Lindelöf E.* Sur les fonctions entieres d'ordre entier // Ann. sci. École norm. supér. – 1905. – **22**. – P. 365 – 395.
5. *Васильків Я. В.* Деякі властивості δ-субгармонічних функцій скінченного λ-типу // Вісн. Львів. у-ту. Сер. мех.-мат. – 1983. – **21**. – С. 14 – 21.

Одержано 02.03.2000

УДК 517.5+519.3+513.83

Ю. Б. Зелинский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЛОКАЛЬНО ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

We construct a counterexample to the hypothesis on global linear convexity of locally linear convex domains with an everywhere smooth boundary. We make more precise the theorem on topological classification of linearly convex domains with smooth boundary.

Побудовано контрприклад до гіпотези про глобальну лінійну опуклість локально лінійно опуклих областей з усюди гладкою межею. Уточнено теорему про топологічну класифікацію лінійно опуклих областей з гладкою межею.

В настоящей работе изучаются связи между разными понятиями обобщенной выпуклости, которые используются в комплексном анализе, для областей с гладкой в большинстве точек границей. Используемые термины соответствуют принятым в монографии [1].

Определение 1. *Множество* $E \subset \mathbb{C}^n$ *называется линейно выпуклым, если через каждую точку* $z \in \mathbb{C}^n \setminus E$ *проходит комплексная гиперплоскость* $l(z) \ni z$, $l(z) \cap E = \varnothing$.

Определение 2. *Область* $D \subset \mathbb{C}^n$ *называется локально линейно выпуклой, если для каждой точки* $z \in \partial D$ *существуют окрестность* $U(z)$ *и комплексная гиперплоскость* $l(z) \ni z$ *такие, что* $D \cap l(z) \cap U(z) = \varnothing$.

Определение 3. *Область* $D \subset \mathbb{C}^n$ *называется сильно линейно выпуклой* (*$\mathbb{C}$-выпуклой*), *если каждое ее сечение комплексной прямой связное и односвязное.*

Как известно, в вещественном случае из локальной выпуклости области во всех точках границы следует ее выпуклость. Естественно предположить существование комплексного аналога этого результата. Но если на границу не накладывать дополнительных условий, то легко построить контрпример [1]. Поэтому, чтобы из локальной линейной выпуклости следовала глобальная, накладывают дополнительные условия полной или частичной гладкости границы. То, что для ограниченных областей в $\mathbb{C}^2$ с гладкой границей локальная линейная выпуклость обеспечивает глобальную и даже $\mathbb{C}$-выпуклость, показано в [2]. Для произвольного $n \geq 2$ этот результат получен в [3]. Другие его доказательства получены в [4, 5]. В работе [6] дана топологическая классификация линейно выпуклых областей с гладкой границей. Показано также, что для $\mathbb{C}$-выпуклости в неограниченном случае к предыдущим условиям необходимо и достаточно добавить связность границы. В работе [7] для локально линейно выпуклых областей с гладкой границей в проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ доказана линейная выпуклость и $\mathbb{C}$-выпуклость.

Отметим, что:

1) изучение локальной линейной выпуклости достаточно проводить для областей со связной границей, поскольку область с несвязной границей можно представить как пересечение областей со связными границами;

2) случай неограниченной области не сводится к случаю областей, вложенных в проективное пространство. Мы ничего не знаем о гладкости части границы, которая находится на бесконечно удаленной гиперплоскости. Естественно, что локальная выпуклость там есть, так как бесконечно удаленная гиперплоскость в область не входит. Если добавить требование гладкости границы в точках этой гиперплоскости, то задача сведется к изученному проективному случаю. Но нам априори это неизвестно и, как мы увидим дальше, вызывает дополнительные эффекты. Некоторые исследователи полагали результаты работ [2 – 5] верными и в неограниченном случае и существенно их использовали [8].

Одной из целей настоящей работы является построение примера, опровергающего это предположение. Кроме того, здесь исследуется случай неограниченных линейно выпуклых областей с гладкой связной границей, когда бесконечно удаленная гиперплоскость не входит в замыкание ограниченной части D. Этот случай не рассматривался в работе [6].

Перейдем к последовательному построению контрпримера. Начнем с вещественного случая.

1. Пусть D_1 — плоская область в $\mathbb{R}^2$,

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid \left[\left(x^2+y^2<2\right)\wedge(x<0)\right] \vee \left[x^2+(y-1)^2<1\right] \vee \left[x^2+(y+1)^2<1\right]\right\}.$$

Очевидно, что эта область локально выпукла и гладкая во всех точках границы, за исключением начала координат $(0,0)$. Пусть теперь $D_2 = D_1 \times I \subset \mathbb{R}^3$, где I — отрезок $[-1, 1]$. Эта область локально выпукла во всех точках границы, за исключением отрезка $J = (0,0)\times I$, и гладкая во всех точках границы, за исключением отрезка J и остова $T = \partial D_1 \times \{-1 \bigcup 1\}$.

Приблизим эту область изнутри последовательностью областей D_ε, гладких во всех точках границы, за исключением отрезка J. Заметим, что точки остова T однозначно задаются цилиндрическими координатами (ρ, φ, z), где $-\pi < \varphi < \pi$, $z = -1$ или 1, а ρ однозначно определяется каждой парой координат (φ, z). Для каждого ε, $0<\varepsilon<1/2$, рассмотрим в области D_2 пару замкнутых кривых

$$C_1 = \left(\rho - \frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}, \varphi, 1-\frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}\right),$$

$$C_2 = \left(\rho - \frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}, \varphi, -1+\frac{|\varphi|\varepsilon}{\pi}\right).$$

Каждое сечение полуплоскостью, проходящей через отрезок J в направлении угла φ, вырезает из области D_2 прямоугольник $D(\varphi)$, который пересекает каждую из кривых C_1 и C_2 в одной точке. Проведем операцию округления двух углов каждого прямоугольника. Заменим пару отрезков $([\rho-|\varphi|\varepsilon/\pi, \rho], \varphi, 1)$ и $(\rho, \varphi, [1-|\varphi|\varepsilon/\pi, 1])$ на четверть окружности с центром на кривой C_1, а пару отрезков $([\rho-|\varphi|\varepsilon/\pi, \rho], \varphi, -1)$ и $(\rho, \varphi, [-1+|\varphi|\varepsilon/\pi, -1])$ на четверть окружности с центром на кривой C_2. Сглаженный прямоугольник $D(\varphi)$ обозначим $D_\varepsilon(\varphi)$. Полученная таким образом область $D_\varepsilon = \bigcup_\varphi D_\varepsilon(\varphi)$ будет гладкой и локально выпуклой во всех точках границы, за исключением отрезка J. В этой области можно уточнить один результат Паскалини [9]. Она показывает, что множество невыпуклости локально выпуклой функции (или часть границы, где локальная выпуклость нарушается) может полностью лежать в $(n-2)$-мерной плоскости.

2. Используя построенные области D_2 и D_ε, построим похожие области и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, которое будем рассматривать как комплексное пространство $\mathbb{C}^2$. В комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим полупространство $\mathbb{C}\times\mathbb{R}_+$ и верхние половины областей

$$D_2^+ = \left\{(x,y,z)\in D_2 \mid z \geq 0\right\},\ D_\varepsilon^+ = \left\{(x,y,z)\in D_\varepsilon \mid z\geq 0\right\}$$

как изображения полных областей Гартогса [10, с. 268] G, G_ε соответственно. Области G и G_ε получаются в $\mathbb{C}^2$ соответственно из D_2 и D_ε вращением или аналитически, заменой третьей координаты z на $\sqrt{u^2+v^2}$. Систему координат выбираем так, чтобы 2-плоскость $(0, 0, u, v)$ была комплексной прямой.

Полученные области G и G_ε имеют следующие свойства:

а) $G = D_1 \times D$, где D — плоский круг единичного радиуса;

б) области G_ε приближают область G изнутри, они гладкие во всех точках границы, за исключением диска $D_0 = (0, 0) \times D$, и вещественно локально выпуклые в этих же точках.

Отсюда следует, что все построенные области G_ε будут локально линейно выпуклыми во всех точках границы $\partial G_\varepsilon \setminus D_0$, так как каждая вещественная гиперплоскость, проходящая через точку $z_0 \in \partial G_\varepsilon \setminus D_0$, содержит единственную комплексную гиперплоскость, проходящую через эту же точку. В точках диска D_0 области будут даже линейно выпуклыми, так как прямая $z_1 = 0$ содержит диск D_0 и не пересекает ни одной из областей G и G_ε для каждого ε. Рассмотрим проективное преобразование пространства $\mathbb{C}^2$, переводящее прямую $z_1 = 0$ в бесконечно удаленную прямую. Это проективное отображение переводит области G и G_ε соответственно в некоторые области W и W_ε. Полученные таким образом области W_ε гладкие во всех конечных точках границы и локально выпуклы в них. Кроме этого у каждой из них граница ∂W_ε связна и представляет собой трехмерное многообразие в $\mathbb{C}P^2$. Если бы эти области были линейно выпуклыми, то, согласно [6], они были бы и $\mathbb{C}$-выпуклыми. А так как они аппроксимируют область W, то эта область также была бы $\mathbb{C}$-выпуклой. Отсюда следует $\mathbb{C}$-выпуклость области, так как свойство $\mathbb{C}$-выпуклости инвариантно относительно проективных преобразований [1]. Но, как показано в [11], область G не может быть $\mathbb{C}$-выпуклой, поскольку один из ее сомножителей по построению не является выпуклой областью. Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$, начиная с которого построенные неограниченные области не будут линейно выпуклыми. Это завершает доказательство существования контрпримера к рассмотренной в начале гипотезе.

Определение 4. *Параллельное множество K_ε на расстоянии ε от $\mathbb{C}$-выпуклого множества K есть объединение всех шаров радиуса ε, центрами которых являются точки K.*

Известно, что в выпуклом случае использование параллельных множеств позволяет из выпуклых множеств с негладкой границей получать выпуклые множества с гладкой границей. Естественно попытаться применить эту технику и в комплексном случае. Приведем примеры, которые показывают, что таким образом не всегда удается улучшить негладкую границу даже в $\mathbb{C}$-выпуклом случае.

3. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{z \,|\, z = x + iy\}$ совокупность окружностей $S_n = \left\{ z \,\middle|\, (x - 1/2n)^2 + y^2 = 1/4n^2 \right\}$ и линейно выпуклое множество $K = \bigcup_n S_n \subset \mathbb{C}^n$. Очевидно, что для произвольного ε, $0 < \varepsilon < 1/4$, параллельное множество K_ε содержит ненулевой одномерный цикл, причем граница K_ε связна. Отсюда и из [1] следует, что множество $\operatorname{int} K_\varepsilon$ не может быть линейно выпуклой областью с гладкой границей, иначе оно было бы $\mathbb{C}$-выпуклой областью, а ведь сечение $\mathbb{C}$-выпуклой области прямой односвязное, т. е. не может содержать ненулевых циклов.

4. Превратим предыдущий компакт в $\mathbb{C}$-выпуклый. Пусть $A = \left\{ z \,\middle|\, z = x + iy, |y| \geq x^4 \right\} \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим $F = K \cap A \subset \mathbb{C}^n$, где K взято из п. 3. Очевидно, что F — связный и односвязный компакт, лежащий в одномерной комплексной плоскости. Поэтому он $\mathbb{C}$-выпуклый. Однако и здесь параллельные множества F_ε не будут гладкими $\mathbb{C}$-выпуклыми аппроксимациями

F. Максимальное расстояние между точками соседних окружностей S_n и S_{n+1} легко оценивается через $2/n - 2/(n+1) = 2/n(n+1)$. Вырез в каждой окружности S_n, входящей в F, имеет длину меньшую $2/n^4$. Поэтому при $\varepsilon = 1/n^4$ F_ε содержит ненулевой одномерный цикл (так как точка $x = 2/(n+1) + 1/n(n+1) = (2n+1)/n(n+1) \notin F_\varepsilon$) и, как в п. 3, не может быть $\mathbb{C}$-выпуклым. Заметим, что последовательность ε_n таких, что граница F_ε не будет многообразием (а именно, ε_n, равные половине длины выреза окружности S_n для каждого n), можно легко подобрать.

5. В рассуждениях п. 2 мы использовали один результат топологической классификации линейно выпуклых областей с гладкими границами [6], который кратко можно сформулировать так.

Теорема. *Если $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой границей, то*:

а) *D — $\mathbb{C}$-выпукла и гомеоморфна шару, если граница ∂D — связное многообразие в $\mathbb{C}P^n$, или*

б) *D есть цилиндр $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где D_1 — плоская область, если граница ∂D несвязна.*

Эта теорема не охватывает случай, когда граница ∂D связна, но не является связным многообразием в $\mathbb{C}P^n \supset \mathbb{C}^n$.

Исследуем этот случай и покажем, что и он легко описывается с помощью второй части теоремы.

Если D связно, но не является связным $(2n-1)$-многообразием в $\mathbb{C}P^n$, то существуют бесконечно удаленные точки границы D, находящиеся на бесконечно удаленной гиперплоскости, которые не достижимы по последовательности конечных точек границы. Пользуясь линейной выпуклостью D, выберем одну из гиперплоскостей l, которые не пересекают область D. Проективным преобразованием f пространства $\mathbb{C}^n$ переведем гиперплоскость l в бесконечно удаленную гиперплоскость l_1. При этом бесконечно удаленная гиперплоскость перейдет в некоторую гиперплоскость, отличную от бесконечно удаленной. А так как по условию некоторая точка $z \in l_1$ была недостижима по конечным точкам границы ∂D, то для точки $f(z) \in \partial f(D)$ имеем гиперплоскость $f(l_1)$, не пересекающую $f(D)$. Эта гиперплоскость не может лежать в $f(\mathbb{C}^n \setminus D) \setminus l$, иначе точка z была бы достижима по конечным точкам границы. Поэтому граница $\partial f(D)$ несвязна в $\mathbb{C}^n$ и согласно п. б) теоремы $f(D)$ есть цилиндр вида $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где область D_1 получена из односвязной области выкалыванием одной точки. Возвращаясь к области D обратным проективным преобразованием, видим, что область D является проективным образом цилиндра $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Следовательно, приведенная ниже теорема полностью решает вопрос классификации линейно выпуклых областей с гладкими границами.

Теорема о классификации. *Пусть $\mathbb{C}^n$ — линейно выпукла* *область с гладкой границей. Тогда*:

а) *D — $\mathbb{C}$-выпукла и гомеоморфна шару, если граница ∂D связна и каждая точка бесконечно удаленной гиперплоскости достижима по конечным точкам границы D, или*

б) *D — цилиндр $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где D_1 — плоская область, если граница ∂D несвязна, или*

в) *D — проективный образ цилиндра $D_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$, где D_1 — плоская* *область, полученная из некоторой односвязной области выкалыванием одной точки* z_1, *при проективном преобразовании пространства, переводящего гиперплоскость* $z_1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ *в бесконечно удаленную гиперплоскость, если граница* ∂D — *связна, но есть ее точки на бесконечно удаленной гиперплоскости, недостижимые по конечным точкам* ∂D.

Результаты работы докладывались на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения М. А. Лаврентьева [12].

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
2. *Behnke H., Peschl E.* Zur der Teorie der Functionen mehrer analytischhe Veränderlichen. Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und großen // Math. Ann. – 1935. – **111**, № 2. – S. 158 – 177.
3. *Южаков А. П., Кривоколеско В. П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$ // Сиб. мат. журн. – 1971. – **12**, № 2. – С. 452 – 458.
4. *Hörmander L.* Notions of convexity. – Boston: Birhäuser, 1994. – 414 p.
5. *Anderson M., Passare M., Sigurdson R.* Complex convexity and analytic functionals I. – Reykjavik, 1995. – 71 p. – (Preprint).
6. *Зелинский Ю. Б.* О линейно выпуклых областях с гладкими границами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 53 – 58.
7. *Зелинский Ю. Б., Мельник В. Л.* О линейно выпуклых областях и аналитических полиэдрах. – Киев, 1993. – 21 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики, 93.34).
8. *Kiselman Ch. O.* A differential inequality characterizing weak lineal convexity. – Uppsala, 1997. – 10 p. – (Preprint № 2).
9. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Достаточные признаки выпуклости // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1974. – **49**. – С. 3 – 52.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
11. *Зелинский Ю. Б.* Об условиях выпуклости сильно линейно выпуклых множеств // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 64 – 71.
12. *Зелинский Ю. Б.* Локально линейно выпуклые множества // Int. Conf. Dedicated to M. A. Lavrentiev on the Occation of his Birthday Centenary, October 31 – November – 3, 2000: Abstrs. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2000. – P. 76 – 77.

Получено 25.04.2001