УДК 519.6

І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека (Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ЗАДАЧІ ТРАНСМІСІЇ З НЕОДНОРІДНИМИ ГОЛОВНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ ТА ВИСОКОТОЧНІ ЧИСЕЛЬНІ АЛГОРИТМИ ЇХ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ

We construct new transmission problems and high-exact computational algorithms of their digitization.

Побудовано нові задачі трансмісії та високоточні обчислювальні алгоритми їх дискретизації.

У роботі [1] відмічається актуальність дослідження задач трансмісії (крайових задач з розривними коефіцієнтами) та розглядається варіаційний метод розв'язання вказаних задач, у яких серед умов спряження є неоднорідна головна умова. Ця крайова задача зведена до розгляду еквівалентної варіаційної задачі на мінімакс для функціонала, що одержується за допомогою використання множника Лагранжа і для якого головна умова є природною.

У даній роботі розглядається нова крайова задача для еліптичного рівняння з неоднорідною головною умовою спряження. Для неї побудовано функціонал енергії та задачу в слабкій постановці. Доведено існування єдиного узагальненого розривного розв'язку. Шляхом введення малого параметра τ побудовано функціонал енергії та задачу в слабкій постановці з єдиними розв'язками та природними головними умовами для збуреної крайової задачі. Показано, що їх розв'язок збігається до розв'язку вихідної задачі при $\tau \to 0$, та встановлено швидкість збіжності.

Для квазілінійного рівняння з неоднорідною головною умовою спряження побудовано задачу в слабкій постановці та доведено єдиність узагальненого розв'язку.

Розглянуто задачі Неймана з неоднорідними умовами спряження та неєдиним класичним розв'язком, де єдиний розв'язок $u(x)$ визначається умовою $\int_\Omega u\, d\Omega = Q$ ($Q \in R^1$ — деяка відома стала).

На основі методу скінченних елементів (МСЕ) з використанням класів розривних функцій побудовано високоточні наближення розв'язків згаданих вище класів задач. Деякі інші задачі з неоднорідними умовами спряження авторами цієї статті розглядались, наприклад, в роботі [2].

1. Крайові задачі для еліптичного рівняння другого порядку. ***1.1. Задача з неоднорідною головною умовою спряження.*** Нехай на кожній з обмежених строго ліпшицевих областей $\Omega_1, \Omega_2 \subset R^2$ визначено рівняння

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x)u = f(x), \tag{1.1}$$

де $q|_{\Omega_l}$, $f|_{\Omega_l} \in C(\Omega_l)$, $|f| \le C_1 < \infty$, $0 \le q \le q_1 < \infty$, $C_1, q_1 = \text{const}$, $K_{ij}|_{\Omega_l} \in$ $\in C(\overline{\Omega}_l) \cap C^1(\Omega_l)$, $l = 1, 2$, $K_{ij} = K_{ji}(x)$, $x = (x_1, x_2)$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$,

$$\sum_{i,j=1}^{2} K_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ \ge\ \alpha_0 \sum_{i=1}^{2}\xi_i^2 \quad \forall \xi_i, \xi_j \in R^1,\ \forall x \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \alpha_0 = \text{const} > 0.$$

На границі $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ (γ — множина точок дотику меж $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$) задано однорідну умову Діріхле

$$u = 0, \tag{1.2}$$

а на розрізі γ області $\overline{\Omega}$ неоднорідні умови спряження мають вигляд

$$[u] = \delta(x), \tag{1.3}$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^{2} K_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right] = \beta(x)(\nu u^+ + \chi u^-) + \alpha(x), \tag{1.4}$$

де n — орт нормалі до γ, що спрямований в область Ω_2; $[u] = u^+ - u^-$, $u^+ = \{u\}^+ = u(x)$ при $x \in \gamma \cap \partial\Omega_2$, $u^- = \{u\}^- = u(x)$ при $x \in \gamma \cap \partial\Omega_1$, $\delta, \beta, \alpha \in C(\gamma)$, $\beta(x) \ge 0$, $|\delta|, \beta, |\alpha| \le C_0 = \text{const}$; $\nu, \chi \ge 0$, $\nu + \chi = 1$; $\nu, \chi = \text{const}$, $\delta = 0$ при $x \in \Gamma \cap \gamma$.

Умови спряження (1.3), (1.4) є деяким узагальненням умов спряження зосередженого власного джерела, наведених у роботі [3]. Останні отримуємо з (1.3), (1.4) при $\delta = \alpha \equiv 0$. Якщо в (1.3), (1.4) покласти $\beta \equiv 0$, то з (1.3), (1.4) отримуємо неоднорідні умови спряження, що задають відомі стрибки розв'язку та потоку на розрізі γ області $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$.

Означення 1. *Класичним розв'язком крайової задачі* (1.1) – (1.4) *називається функція* $u \in \overline{M} = \left\{v\colon v|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j) \cap C^2(\Omega_j),\ j = 1,2\right\}$, *що задовольняє співвідношення* (1.1) – (1.4).

Позначимо $\overline{H} = \left\{v\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2\right\}$, $\overline{H}_0 = \left\{v \in \overline{H}\colon v|_\Gamma = 0\right\}$. Множина $\overline{H}_0$ — повний гільбертовий простір з нормою

$$\|v\|_{W_2^1} = \left\{\sum_{i=1}^{2} \|v\|^2_{W_2^1(\Omega_i)}\right\}^{1/2},$$

де $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega_i)}$ — норма простору Соболєва на області Ω_i.

Нехай $H = \left\{v(x) \in \overline{H}\colon v|_\Gamma = 0,\ [v]|_\gamma = \delta\right\}$. Якщо існує $z \in H$, то ця множина має безліч елементів і є замкненою опуклою підмножиною з $\overline{H}_0$.

У випадку, коли границя $\partial\Omega_j$, $j = 1, 2$, кусково-лінійна, а δ є поліномом степеня не вище k на кожному елементарному прямолінійному відрізку γ_i розбиття проміжку γ $\left(\gamma = \bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i,\ \delta = 0 \text{ при } x \in \Gamma \cap \gamma\right)$, за допомогою МСЕ легко побудувати функції з H. Нехай $\partial\Omega_j \in C^1$, $j = 1, 2$, і існують визначені на γ^-, γ^+ функції φ^-, φ^+ $(\varphi^+ - \varphi^- = \delta)$, що продовжуються на проміжки $\partial\Omega_1 \setminus \gamma^-$, $\partial\Omega_2 \setminus \gamma^+$ функціями φ_1, φ_2, де $\varphi_1|_{\partial\Omega_1 \setminus \gamma^-} = 0$, $\varphi_1|_{\gamma^-} = \varphi^-$, $\varphi_2|_{\partial\Omega_2 \setminus \gamma^+} = 0$, $\varphi_2|_{\gamma^+} = \varphi^+$ і $\varphi_i \in W^{(1/2)}(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$ (простір $W^{(1/2)}$ визначений в роботі [4, с. 310]). Тоді на основі теореми 17.5.1 [4, с. 309] непорожня множина $H = \left\{v\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2;\ v|_\Gamma = 0,\ [v]|_\gamma = \delta\right\}$ існує. Якщо функція δ така, що непорожня множина H існує, то говорять, що ця функція задовольняє умови подовження. Будемо вважати, що функція δ задовольняє умови подовження.

Визначимо задачу: необхідно знайти функцію $u(x)$, що доставляє мінімум функціоналу

$$\Phi_1(v) = \langle v,v\rangle_1 - 2l_1(v) \tag{1.5}$$

на множині H, де

$$\langle u,v\rangle_1 = \iint_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + quv \right\} dx + \int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)(\nu v^+ + \chi v^-)\, d\gamma,$$
$$l_1(v) = (f,v) - \int_\gamma \alpha v^+ d\gamma, \quad (f,v) = \iint_\Omega f v\, dx. \tag{1.6}$$

Лема 1. *Класичний розв'язок* $u(x)$ *задачі* (1.1) – (1.4) *доставляє на* H *мінімум функціоналу* (1.5).

Доведення. Враховуючи, що $u(x)$ — класичний розв'язок задачі (1.1) – – (1.4), одержуємо

$$(f,v) = \iint_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + quv \right\} dx + \int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)(\nu v^+ + \chi v^-)\, d\gamma +$$
$$+ \int_\gamma \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i) \right\}^- \delta\, d\gamma + \int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)\chi\delta\, d\gamma + \int_\gamma \alpha v^+ d\gamma. \tag{1.7}$$

Отже,

$$\Phi_1(v) = \|v-u\|_{1L}^2 - \|u\|_{1L}^2 - 2\int_\gamma \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i) \right\}^- \delta\, d\gamma - 2\int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)\chi\delta\, d\gamma, \tag{1.8}$$

де $\|v\|_{1L} = \langle v,v\rangle_1^{1/2}$.

Оскільки три останніх доданки в (1.8) не залежать від змінної $v \in H$, то найменше значення функціонала $\Phi_1(v)$ (1.5) досягається при $v = u$. Лему доведено.

Для задачі (1.1) – (1.4) задача в слабкій постановці полягає в пошуку функції $u(x) \in H$, що задовольняє співвідношення

$$\langle u,v\rangle_1 = l_1(v) \qquad \forall v(x) \in H_0 = \left\{ v(x) \colon v \in \overline{H} \colon v|_\Gamma = 0,\ [v]|_\gamma = 0 \right\}, \tag{1.9}$$

де енергетичний скалярний добуток $\langle \cdot,\cdot \rangle_1$ та лінійний функціонал $l_1(v)$ визначаються співвідношеннями (1.6).

Лема 2. *Розв'язок* $u(x)$ *задачі* (1.5) *існує і єдиний в* H.

Доведення. З урахуванням нерівності Коші – Буняковського, теореми вкладення [5, 6] для лінійного функціонала $l_1(v)$ $(v \in \overline{H}_0)$ отримуємо оцінку

$$|l_1(v)| = \left| \iint_\Omega f v\, dx - \int_\gamma \alpha v^+ d\gamma \right| \le \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\alpha\|_{L_2(\gamma)}\|v^+\|_{L_2(\gamma)} \le$$
$$\le \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{W_2^1} + \|\alpha\|_{L_2(\gamma)}\|v\|_{L_2(\partial\Omega_2)} \le$$
$$\le \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{W_2^1} + C_1\|\alpha\|_{L_2(\gamma)}\|v\|_{W_2^1(\Omega_2)} \le C_2\|v\|_{W_2^1}, \tag{1.10}$$

де C_1, $C_2 = \text{const} > 0$.

Враховуючи (1.10) та те, що $\langle v,v\rangle_1 \ge \mu\|v\|_{W_2^1}^2$, для функціонала $\Phi_1(v)$ маємо

$$\Phi_1(v) \ge \mu\|v\|_{W_2^1}^2 - 2C_2\|v\|_{W_2^1} \to \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_{W_2^1} \to \infty,\ \mu = \text{const} > 0,\ v \in H,$$
$$\Phi_1(v) \ge -C_2^2/\mu.$$

Отже, функціонал $\Phi_1(v)$ — коерцитивний і власний. Оскільки $l_1(v)$ — лінійний функціонал, а $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ — енергетичний скалярний добуток, то розглядуваний функціонал — строго опуклий, тобто

$$\Phi_1(\lambda u+(1-\lambda)v) \;<\; \lambda\Phi_1(u) + (1-\lambda)\Phi_1(v)$$
$$\forall\lambda\in(0,1), \quad \forall u,v\in H, \quad u\neq v.$$

З урахуванням нерівності Коші – Буняковського для енергетичного скалярного добутку отримуємо

$$|\langle u,v\rangle_1| \;\le\; \|u\|_{1L}\|v\|_{1L} \quad \forall u,v\in\overline{H}_0. \tag{1.11}$$

Оцінимо енергетичну норму

$$\|u\|_{1L}^2 \;\le\; C_3\|v\|_{W_2^1}^2 + a_1(u^+) + a_2(u^-,u^+) + a_3(u^-),$$

де

$$a_1(u^+) \;=\; \int\limits_\gamma\beta\nu^2(u^+)^2d\gamma \;\le\; C_0\nu^2\int\limits_\gamma(u^+)^2d\gamma \;\le\; C_4\|u\|_{W_2^1(\Omega_2)}^2 \;\le\; C_4\|u\|_{W_2^1}^2,$$

$$a_3(u^-) \;\le\; C_5\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)}^2 \;\le\; C_5\|u\|_{W_2^1}^2,$$

$$a_2(u^-,u^+) \;=\; 2\int\limits_\gamma\beta\nu\chi u^-u^+d\gamma \;\le\; C_0\nu\chi\left(\int\limits_\gamma(u^-)^2d\gamma+\int\limits_\gamma(u^+)^2d\gamma\right) \;\le$$
$$\le\; C_6\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega_1)}^2+\|u\|_{W_2^1(\Omega_2)}^2\right) \;=\; C_6\|u\|_{W_2^1}^2.$$

Отже,

$$\|u\|_{1L} \;\le\; C_7\|u\|_{W_2^1}. \tag{1.12}$$

Враховуючи (1.12), з (1.11) одержуємо

$$|\langle u,v\rangle_1| \;\le\; C_8\|u\|_{W_2^1}\|v\|_{W_2^1} \quad \forall u,v\in\overline{H}_0. \tag{1.13}$$

Нерівність (1.13) засвідчує [7], що білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ неперервна за сукупністю аргументів. З (1.10), (1.13) випливає, що функціонал $\Phi_1(v)$ неперервний на $\overline{H}_0$.

Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}\subset H$, що слабко збігається до $x_0\in H$. Оскільки $\langle x_0, x_n-x_0\rangle_1 - l_1(x_n-x_0)$ — лінійний неперервний функціонал відносно x_n-x_0 і x_n слабко збігається до x_0 $(x_n\rightharpoonup x_0)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\{\langle x_0, x_n-x_0\rangle_1 - l_1(x_n-x_0)\} \;=\; 0. \tag{1.14}$$

Має місце співвідношення

$$\Phi_1(x_n) - \Phi_1(x_0) \;\ge\; 2(\langle x_0,\, x_n-x_0\rangle_1 - l_1(x_n-x_0)). \tag{1.15}$$

Враховуючи (1.14), з (1.15) одержуємо, що на довільній послідовності $\{x_n\}\subset H$, яка слабко збігається до x_0 $(x_n\rightharpoonup x_0)$, виконується нерівність

$$\varliminf_{n\to\infty}\Phi_1(x_n) \;\ge\; \Phi_1(x_0),$$

тобто функціонал Φ_1 — слабко напівнеперервний знизу на H [8].

Таким чином, функціонал $\Phi_1(v)$ — строго опуклий, власний, слабко напівнеперервний знизу, коерцитивний на замкненій опуклій підмножині H гільбертового простору $\overline{H}_0$. Отже, на підставі твердження 1.2 [9, с. 44] задача (1.5) має єдиний розв'язок $u(x)\in H$.

Лему доведено.

Співвідношення (1.9) є необхідною умовою того, що функція $u(x)$ доставляє мінімум функціоналу (1.5) на H. Отже, розв'язок задачі (1.5) є розв'язком задачі Гальоркіна (1.9).

Нехай існують два розв'язки $u' \neq u'' \in H$ задачі (1.9). Тоді отримуємо суперечність

$$0 = \langle u' - u'', u' - u'' \rangle_1 = \| u' - u'' \|_{1L}^2 > 0.$$

Отже, задача (1.9) має єдиний розв'язок. Легко бачити, що задачі (1.5), (1.9) еквівалентні і їх розв'язок існує і єдиний в H.

Означення 2. *Розв'язок* $u(x) \in H$ *задач* (1.5), (1.9) *називається узагальненим розв'язком, а задачі* (1.5), (1.9) — *узагальненими задачами крайової задачі* (1.1) – (1.4).

Теорема 1. *Крайова задача* (1.1) – (1.4) *має єдиний узагальнений розв'язок* $u(x) \in H$. *Якщо* $u|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j) \cap C^2(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, *то* $u(x)$ — *класичний розв'язок задачі* (1.1) – (1.4), *де умова* (1.4) — *природна*.

Справедливість теореми встановлюється на основі леми 2 з урахуванням результатів роботи [10].

***Зауваження* 1.** Крайову задачу (1.1) – (1.4) будемо називати задачею 1.

1.2. Задача з малим параметром. Умову спряження (1.3) можемо розглядати як граничний випадок $(\tau \to 0)$ умови

$$\tau(\nu' q_u^- + \chi' q_u^+) = [u] - \delta(x), \qquad x \in \gamma, \tag{1.16}$$

де $\nu'/(\nu' + \chi') = \nu$, $\chi'/(\nu' + \chi') = \chi$. Можна вважати, що $\nu' = \nu$, $\chi' = \chi$,

$$q_u^{\pm} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right\}^{\pm}, \qquad x \in \gamma^{\pm}. \tag{1.16$'$}$$

Узагальнений розв'язок крайової задачі (1.1), (1.2), (1.4), (1.16) (задачі 1′) доставляє мінімум на $H' = \{ v(x) \in \overline{H} : v|_{\Gamma} = 0 \}$ функціоналу енергії

$$\Phi_1'(v) = \| v \|_{1L}^2 + \frac{1}{\tau(\nu' + \chi')} \int_{\gamma} [v]^2 d\gamma - 2 \iint_{\Omega} f v \, d\Omega - 2 \int_{\gamma} \frac{\tau \chi' \alpha + \delta}{\tau(\nu' + \chi')} [v] d\gamma + 2 \int_{\gamma} \alpha v^+ d\gamma \tag{1.17}$$

і є розв'язком задачі Гальоркіна

$$\langle u', v \rangle_1 + \frac{1}{\tau(\nu' + \chi')} \int_{\gamma} [u'][v] d\gamma = \iint_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\gamma} \frac{\tau \chi' \alpha + \delta}{\tau(\nu' + \chi')} [v] d\gamma - \int_{\gamma} \alpha v^+ d\gamma \quad \forall v \in H'. \tag{1.18}$$

При кожному фіксованому τ задачі (1.17), (1.18) — еквівалентні і їх розв'язок $u'(x, \tau) \in H'$ існує і єдиний.

Нехай $u(x)$ — класичний розв'язок задачі (1.1) – (1.4). Тоді умову спряження (1.3) можна записати у вигляді

$$\tau(\nu' q_u^- + \chi' q_u^+) = [u] - \delta'(x, \tau), \qquad x \in \gamma, \tag{1.19}$$

де $\delta' = \delta - \tau(\nu' q_u^- + \chi' q_u^+)$.

Отже, класичний розв'язок $u(x) \in H'$ задачі (1.1) – (1.4) є єдиним розв'язком задачі Гальоркіна

$$\langle u, v \rangle_1 + \frac{1}{\tau(\nu' + \chi')} \int_{\gamma} [u][v] d\gamma = \iint_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\gamma} \frac{\tau \chi' \alpha + \delta'}{\tau(\nu' + \chi')} [v] d\gamma - \int_{\gamma} \alpha v^+ d\gamma \quad \forall v \in H'. \tag{1.20}$$

Нехай $v = u - u'(x, \tau)$, тоді з (1.18), (1.20) випливає

$$\|u-u'\|_{1L}^2 + \frac{1}{\tau(\nu'+\chi')}\int_\gamma [u-u']^2 d\gamma = \int_\gamma \frac{\delta'-\delta}{\tau(\nu'+\chi')}[u-u']d\gamma. \tag{1.20'}$$

Отже,

$$\left\{\int_\gamma [u-u']^2 d\gamma\right\}^{1/2} \le \tau C_0, \tag{1.21}$$

де $C_0^2 = \int_\gamma (\nu' q_u^- + \chi' q_u^+)^2 d\gamma$.

Враховуючи (1.21), на основі нерівностей Фрідріхса, Коші – Буняковського з (1.20′) отримуємо

$$\|u-u'\|_{W_2^1}^2 \le C_1\tau, \tag{1.22}$$

де $C_1 = \mathrm{const}$.

Тобто замість крайової задачі (1.1) – (1.4) з головною умовою спряження (1.3) можна розв'язувати задачу з малим параметром τ (1.1), (1.2), (1.4), (1.16) з природними умовами спряження. При цьому похибка отриманого розв'язку $u'(x,\tau)$ оцінюється співвідношенням (1.22).

1.3. Наближені розв'язки МСЕ. Кожну із задач 1, 1′ можна розв'язувати за допомогою МСЕ. Для цього кожну з багатокутних областей $\overline{\Omega}_l$ розбиваємо на скінченне число N_l трикутників $\overline{e}_j^l$, $j=\overline{1,N_l}$, $l=1,2$. Введемо в розгляд клас $\overline{H}_k^N$ $(N=N_1+N_2)$ функцій v_k^N, що неперервні на областях $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, є повними поліномами степеня k на кожному трикутному скінченному елементі $\overline{e}_j^l$ та задовольняють умову (1.2). Через $\overline{H}_0$ позначимо простір функцій $v\in\overline{H}$, що задовольняють умову (1.2).

Лема 3. *Нехай* u *— класичний розв'язок задачі* 1, а v *— довільна функція з* $\overline{H}_0$. *Тоді має місце рівність*

$$\Phi_1(v)-\Phi_1(u) = \|v-u\|_{1L}^2 + \tilde{l}_1(v-u) \qquad \forall v\in\overline{H}_0, \tag{1.23}$$

де $\tilde{l}_1$ *— лінійний функціонал і* $\tilde{l}_1=0$ *при* $v\in H=\left\{v\in\overline{H}: [v]|_\gamma=\delta,\ v|_\Gamma=0\right\}$,

$$\tilde{l}_1(v-u) = 2\int_\gamma \left\{\sum_{i,j=1}^2 K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right\}^-(\delta-\delta')d\gamma + 2\int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)\chi(\delta-\delta')d\gamma, \tag{1.24}$$

де $\delta'=[v]|_\gamma$.

Доведення. Нехай $u(x)$ — класичний розв'язок задачі (1.1) – (1.4). Аналогічно (1.7) отримуємо

$$(f,v) = \langle u,v\rangle_1 + \int_\gamma \left\{\sum_{i,j=1}^2 K_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\right\}^- \delta' d\gamma + \int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)\chi\delta' d\gamma + \int_\gamma \alpha v^+ d\gamma$$

$$\forall v\in\overline{H}_0.$$

Отже,

$$\Phi_1(v) = \|v\|_{1L}^2 - 2\langle u,v\rangle_1 - 2\int_\gamma \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n,x_i) \right\}^- \delta' d\gamma - 2\int_\gamma \beta(\nu u^+ + \chi u^-)\chi\delta' d\gamma. \tag{1.25}$$

Враховуючи (1.25), отримуємо шукану рівність (1.23). Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $u(x)$ *— класичний розв'язок крайової задачі* 1, *де* $u|_{\Omega_j} \in C^{k+1}(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, *а функція* δ *є поліномом степеня не вище* k *відповідних змінних на* γ. *Тоді для єдиного наближеного узагальненого розв'язку* $u_k^N \in H_k^N$ *має місце оцінка*

$$\left\| u_k^N - u \right\|_{W_2^1} \le \frac{Ch^k}{f(\theta)}, \tag{1.26}$$

де $C = \text{const}$, h *— найбільша з довжин сторін всіх трикутників* $\bar{e}_j^l$, $f(\theta) = \cos\theta$, θ *— половина величини найбільшого з кутів всіх* $\bar{e}_j^l$ *при* $k = 1$; *при* $k = 2, 3$ $f(\theta) = \sin\theta$, θ *— найменший з кутів всіх* $\bar{e}_j^l$, $H_k^N = \left\{ v_k^N \in \overline{H}_k^N : [v_k^N]|_\gamma = \delta \right\}$, k *— степінь поліномів МСЕ.*

Доведення. Оскільки $H_k^N \subset H$, то, враховуючи нерівність Фрідріхса та співвідношення (1.23), отримуємо

$$\mu \left\| u_k^N - u \right\|_{W_2^1}^2 \le \left\| u_k^N - u \right\|_{1L}^2 = \Phi_1(u_k^N) - \Phi_1(u) =$$

$$= \min_{v_k^N \in H_k^N} \Phi_1(v_k^N) - \Phi_1(u) \le \Phi_1(\bar{u}_k^N) - \Phi_1(u) = \left\| \bar{u}_k^N - u \right\|_{1L}^2, \quad \mu = \text{const}, \tag{1.27}$$

де $\bar{u}_k^N$ — функція з H_k^N, що є повним інтерполяційним поліномом розв'язку u на кожному трикутнику $\bar{e}_j^l$. Використовуючи оцінки інтерполяції, що отримані в роботах [11, 12], з (1.27) одержуємо шукану нерівність (1.26). Теорему доведено.

Зауваження 2. Задачу 1′ можна розв'язувати за допомогою МСЕ, де наближений розв'язок $u_k^{N'}$ шукаємо на підпросторі $\overline{H}_k^N \subset H'$. Якщо при кожному k класичний розв'язок u задачі 1′ належить класу $C^{k+1}(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, то при фіксованому k

$$\left\| u_k^{N'} - u' \right\|_{W_2^1} \le \frac{Ch^k}{f(\theta)}, \tag{1.28}$$

де $C = \text{const} > 0$.

Отже, враховуючи оцінки (1.22), (1.28), можна отримати загальну похибку наближення розв'язку u наближеним $u_k^{N'}$ з підпростору $\overline{H}_k^N$.

Теорема 3. *Нехай* $u(x)$ *— класичний розв'язок крайової задачі* 1, *де* $u|_{\overline{\Omega}_j} \in C^{k+1}(\overline{\Omega}_j)$, *а* $\delta \in C^{k+1}(\gamma)$. *Тоді для наближеного узагальненого розв'язку* $u_k^N(x) \in H_k^N$ *мають місце нерівність вигляду* (1.26) *та оцінка*

$$0 \le \Phi(u_k^N) - \Phi(u) \le \frac{C_1 h^{2k}}{f^2(\theta)} + C_2 \bar{h}^{k+1}, \tag{1.29}$$

де C_1, $C_2 = \text{const} > 0$; h, k, $f(\theta)$ *описані в теоремі* 2, $\bar{h}$ *— довжина най-*

більшого відрізка $\bar{h}_j$ *скінченноелементного розбиття проміжку* γ.

Доведення. Довільна функція $v_k^N(x) \in \tilde{H}_k^N$ має вигляд

$$v_k^N(x) = \sum_{i=1}^{n_1} v_i \varphi_i(x), \tag{1.30}$$

де $\tilde{H}_k^N$ — множина неперервних на $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ функцій $v_k^N(x)$, що є повними поліномами степеня k на кожному трикутнику $\bar{e}_j^l$ розбиття області $\bar{\Omega}$ з розрізом γ; $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n_1}$ — базис МСЕ простору $\tilde{H}_k^N$. У випадку використання лагранжевих поліномів $v_i = v_k^N(x_i)$, де x_i — i-та вузлова точка. При використанні ермітових поліномів v_i — значення функції $v_k^N(x)$ або її частинної похідної в певній вузловій точці. Нехай всі функції $v_k^N(x) \in \tilde{H}_k^N$ є лагранжевими поліномами (хоча це не є принциповим) на кожному трикутнику розбиття багатокутників $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$. Останніми пронумеруємо m_1 вузлових точок, що знаходяться на границі Γ, і покладемо $v_{n_1-m_1+1} = \ldots = v_{n_1} = 0$. З (1.30) випливає

$$v_k^N(x) = \sum_{i=1}^{n_2=n_1-m_1} v_i \varphi_i(x), \qquad v_k^N\big|_\Gamma = 0, \tag{1.31}$$

тобто $v_k^N(x) \in \overline{H}_k^N$.

У першому співвідношенні (1.31) останніми послідовно пронумеруємо m вузлів спочатку на γ^+, а потім m вузлів на γ^-. Отже, базисні функції $\varphi_{n_2-2m+1}, \ldots, \varphi_{n_2-m}, \varphi_{n_2-m+1}, \ldots, \varphi_{n_2}$ розривні на γ [13, с. 13] і $v_{j+m} = v_j + \delta(x_j)$ $(j = n_2-2m+1, \ldots, n_2-m)$. Таким чином, з (1.31) випливає

$$v_k^N(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n+1}^{n_2=n+m} (v_{i-m} + \delta_{i-m}) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{\varphi}_i(x) + w(x), \tag{1.32}$$

де $n = n_2 - m$, $\delta_j = \delta(x_j)$,

$$w(x) = \sum_{i=n+1}^{n_2=n+m} \delta_{i-m} \varphi_i(x). \tag{1.33}$$

Легко бачити, що функція $w(x)$ є повним інтерполяційним поліномом степеня k функції $\delta = \delta(x)$ на кожному елементарному відрізку γ_j скінченноелементного розбиття проміжку γ. Функції $\tilde{\varphi}_i(x)$ — неперервні на $\bar{\Omega}$ і $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^{n}$ — базис простору $\overline{H}_{k0}^N$ неперервних на $\bar{\Omega}$ функцій $v_k^N(x)$, що є повними поліномами степеня k на кожному трикутнику $\bar{e}_j^l$ та набувають нульових значень на Γ. Тут

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) \qquad \text{при} \qquad i = \overline{1, n-m},$$

а для $i = n-m+1, \ldots, n$ маємо

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}_1; \\ \varphi_{i+m}(x) & \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}_2. \end{cases}$$

Отже, функції v_k^N вигляду (1.32) задовольняють умову

$$[v_k^N]\big|_\gamma = w\big|_\gamma. \tag{1.34}$$

Сукупність функцій $v_k^N(x)$ вигляду (1.32) утворює допустиму множину МСЕ H_k^N. Враховуючи (1.34), з (1.24) одержуємо

$$\tilde{l}_1(v_k^N - u) = \text{const} \qquad \forall v_k^N \in H_k^N. \tag{1.35}$$

Тоді з (1.23) маємо

$$\left\| u_k^N - u \right\|^2_{W_2^1} \le \frac{1}{\mu} \left\| u_k^N - u \right\|^2_{1L} \le \left\| \overline{u}_k^N - u \right\|^2_{1L} \le \frac{C_1 h^{2k}}{f^2(\theta)}, \tag{1.36}$$

де $\mu = \text{const} > 0$, $\overline{u}_k^N \in H_k^N$ — функція, що є повним інтерполяційним поліномом степеня k класичного розв'язку u на кожному трикутнику $\overline{e}_j^l$ розбиття області $\overline{\Omega}_j$, $l = \overline{1, N_j}$, $j = 1, 2$. Враховуючи (1.35), (1.36), з (1.23) одержуємо оцінку (1.29). Теорему доведено.

2. Крайова задача для квазілінійного еліптичного рівняння. ***2.1. Задача з головною неоднорідною умовою спряження.*** Нехай у кожній з областей $\Omega_1, \Omega_2 \in R^2$ визначено рівняння

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0, \tag{2.1}$$

де $x = (x_1, x_2)$, $K_{ij} = K_{ji}(x)$, $i, j = 1, 2$;

$$(f(x,p) - f(x,q))(p_0 - q_0) + \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij}(x)(p_j - q_j)(p_i - q_i) \ge \mu_1 \sum_{\alpha=0}^{2} (p_\alpha - q_\alpha)^2,$$

$$\mu_1 = \text{const} > 0, \tag{2.2}$$

$$| f(x,p) - f(x,q) | \le \mu_2 \left\{ \sum_{\alpha=0}^{2} (p_\alpha - q_\alpha)^2 \right\}^{1/2}, \quad p = (p_0, p_1, p_2),$$

$$\left| K_{ij} \right| \le C_1 < \infty.$$

На границі $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma$ задано однорідну умову Діріхле (1.2), а на розрізі γ області $\overline{\Omega}$ неоднорідні умови спряження мають вигляд (1.3), (1.4).

Означення 3. *Узагальненим розв'язком крайової задачі* (2.1), (1.2) – (1.4) *називається функція* $u(x) \in H$, *яка задовольняє інтегральну рівність*

$$(Lu, v) \equiv \iint_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) v \right\} dx \; +$$

$$+ \int_{\gamma} \beta(\nu u^+ + \chi u^-)(\nu v^+ + \chi v^-) d\gamma + \int_{\gamma} \alpha v^+ d\gamma = 0 \quad \forall v(x) \in H_0, \tag{2.3}$$

де

$$H = \left\{ v(x)\colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2;\ v|_{\Gamma} = 0,\ [v]|_{\gamma} = \delta \right\},$$

$$H_0 = \left\{ v(x)\colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2;\ v|_{\Gamma} = 0,\ [v]|_{\gamma} = 0 \right\}.$$

Лема 4. *Крайова задача* (2.1), (1.2) – (1.4) *має не більше одного узагальненого розв'язку.*

Справедливість леми встановлюється від супротивного з урахуванням умов (2.2).

Означення 4. *Наближеним узагальненим розв'язком крайової задачі* (2.1), (1.2) – (1.4) *називається функція* $u_k^N(x) \in H_k^N$, *що задовольняє інтегральну рівність*

$$\iint_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij}(x) \frac{\partial u_k^N}{\partial x_j} \frac{\partial v_k^N}{\partial x_i} + f\left(x, u_k^N, \frac{\partial u_k^N}{\partial x_1}, \frac{\partial u_k^N}{\partial x_2} \right) v_k^N \right\} dx \; +$$

$$+ \int_\gamma \beta(\nu u_k^{N^+} + \chi u_k^{N^-})(\nu v_k^{N^+} + \chi v_k^{N^-})\, d\gamma + \int_\gamma \alpha v_k^{N^+}\, d\gamma = 0 \quad \forall v_k^N(x) \in H_{k0}^N, \tag{2.4}$$

де H_k^N *збігається з підмножиною* H_k^N, *що введена в п. 1.3, а* $H_{k0}^N =$ $= \left\{ v_k^N(x) \in H_k^N : [v_k^N]|_\gamma = 0 \right\}$.

З урахуванням того, що кожну функцію $u_k^N(x) \in H_k^N$ можна зобразити у вигляді

$$u_k^N(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x) + w(x), \tag{2.5}$$

де $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ — базис підпростору H_{k0}^N, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ — шуканий чисельний наближений розв'язок МСЕ, $w(x)$ — деяка відома функція, відмінна від нуля в околі відрізка γ і породжена функцією $\delta(x)$ з умови (1.3), з (2.4) випливає

$$(A(U), V) = 0, \quad U \in E^n, \quad \forall V \in E^n, \tag{2.6}$$

тобто вектор $A(U)$ ортогональний n-вимірному евклідову простору E^n, де $A(U) = \overline{U}$ і компонента $\overline{U}_s$, $s = \overline{1,n}$, вектора $\overline{U}$ має вигляд

$$\overline{U}_s = \sum_{l=1}^{n} u_l \left\{ \iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} dx + \int_\gamma \beta(\nu\varphi_l^+ + \chi\varphi_l^-)(\nu\varphi_s^+ + \chi\varphi_s^-)\, d\gamma \right\} +$$

$$+ \iint_\Omega f\left(x, \sum_{l=1}^{n} u_l \varphi_l + w, \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{l=1}^{n} u_l \varphi_l + w \right), \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_{l=1}^{n} u_l \varphi_l + w \right) \right) \varphi_s\, dx \; +$$

$$+ \int_\gamma \alpha \varphi_s^+\, d\gamma + \iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} dx + \int_\gamma \beta(\nu w^+ + \chi w^-)(\nu\varphi_s^+ + \chi\varphi_s^-)\, d\gamma, \quad s = \overline{1,n}. \tag{2.7}$$

Таким чином, існує оператор B, який кожному вектору $U \in E^n$ ставить у відповідність функцію $u_k^N(x) \in H_k^N$, а оператор $\overline{A}$ функцію u_k^N переводить в E^n, тобто оператор $A = \overline{A}B$ відображає E^n в E^n і визначається співвідношеннями (2.7).

Отже, шуканий наближений чисельний розв'язок U крайової задачі (2.1), (1.2) – (1.4) є розв'язком системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$A(U) = 0. \tag{2.8}$$

Лема 5. *Оператор* A *неперервний на* E^n.

Доведення. Розглянемо різницю $A(z_1) - A(z_2)$ $\forall z_1, z_2 \in E^n$:

$$|A(z_1) - A(z_2)|^2 = \sum_{l=1}^{n} (Z_{1,l} - Z_{2,l})^2 = \sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{s=1}^{n} (z_{1,s} - z_{2,s}) \left(\iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} dx \; + \right.\right.$$

$$+ \int\limits_{\gamma} \beta(\nu\varphi_s^+ + \chi\varphi_s^-)(\nu\varphi_l^+ + \chi\varphi_l^-)\,d\gamma\Bigg) +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} \Bigg(f\Bigg(x, \sum_{l=1}^{n} z_{1,s}\varphi_s + w, \frac{\partial}{\partial x_1}\Bigg(\sum_{s=1}^{n} z_{1,s}\varphi_s + w\Bigg), \frac{\partial}{\partial x_2}\Bigg(\sum_{s=1}^{n} z_{1,s}\varphi_s + w\Bigg)\Bigg) -$$

$$- f\Bigg(x, \sum_{s=1}^{n} z_{2,s}\varphi_s + w, \frac{\partial}{\partial x_1}\Bigg(\sum_{s=1}^{n} z_{2,s}\varphi_s + w\Bigg), \frac{\partial}{\partial x_2}\Bigg(\sum_{s=1}^{n} z_{2,s}\varphi_s + w\Bigg)\Bigg)\Bigg)\varphi_l\,dx \Bigg\}^2, \quad (2.9)$$

де $z_i^N = \sum_{l=1}^{n} z_{i,l}\varphi_l(x) + w(x)$, $l = 1, 2$, $z_i = (z_{i,1}, \ldots, z_{i,n})^T$, $A(z_i) = Z_i$, $Z_i = (Z_{i,1}, \ldots, Z_{i,n})^T$.

Враховуючи умови (2.2), з (2.9) отримуємо

$$|A(z_1) - A(z_2)|^2 \le C_1 |z_1 - z_2|^2,$$

де $C_1 = \text{const}$. Лему доведено.

Розглянемо вираз

$$(A(z), z) = \iint\limits_{\Omega} \Bigg\{ \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial z_k^N}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{z}_k^N}{\partial x_i} + f\Bigg(x, z_k^N, \frac{\partial z_k^N}{\partial x_1}, \frac{\partial z_k^N}{\partial x_2}\Bigg)\bar{z}_k^N \Bigg\} dx +$$

$$+ \int\limits_{\gamma} \beta(\nu z_k^{N+} + \chi z_k^{N-})(\nu \bar{z}_k^{N+} + \chi \bar{z}_k^{N-})\,d\gamma + \int\limits_{\gamma} \alpha \bar{z}_k^{N+}\,d\gamma -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{z}_k^N}{\partial x_i}\,dx - \iint\limits_{\Omega} f\Bigg(x, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}\Bigg)\bar{z}_k^N\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} K_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{z}_k^N}{\partial x_i}\,dx + \iint\limits_{\Omega} f\Bigg(x, w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2}\Bigg)\bar{z}_k^N\,dx \quad \forall z \in E^n, \qquad (2.10)$$

де $\bar{z}_k^N(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i\varphi_i(x)$, $z_k^N(x) = \bar{z}_k^N(x) + w(x)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$.

На підставі припущення (2.2) з (2.10) випливає

$$(A(z), z) \ge C_2(z, z) - C_3(z, z)^{1/2}, \qquad (2.11)$$

де C_2, $C_3 = \text{const} > 0$.

З нерівності (2.11) одержуємо

$$(A(z), z) > 0 \quad \text{за умови} \quad |z| > \frac{C_3}{C_2}. \qquad (2.12)$$

В силу умови (2.12) та неперервності оператора A розв'язок U системи (2.8) існує.

Теорема 4. *Крайова задача* (2.1), (1.2) – (1.4) *має єдиний наближений узагальнений розв'язок* $u_k^N(x) \in H_k^N$.

Доведення. Існування наближеного узагальненого розв'язку $u_k^N(x) \in H_k^N$ забезпечується існуванням розв'язку $U \in E^n$ нелінійної алгебраїчної задачі (2.8). Припустимо, що існують два розв'язки u_{1k}^N, $u_{2k}^N \in H_k^N$ $(u_{1k}^N \ne u_{2k}^N)$. Тоді з урахуванням умов (2.2) отримуємо суперечність

$$0 = L(u_{1k}^N, u_{1k}^N - u_{2k}^N) - L(u_{2k}^N, u_{1k}^N - u_{2k}^N) \ge C_0 \| u_{1k}^N - u_{2k}^N \|_{W_2^1}^2 \ge 0,$$

де $C_0 = \text{const} > 0$. Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай* $u(x)$ *— класичний розв'язок крайової задачі* (2.1), (1.2)

– (1.4) *для квазілінійного еліптичного рівняння, який на кожній з областей* Ω_1, Ω_2 *має всі неперервні обмежені частинні похідні до* $(k+1)$*-го порядку включно, функція* $\delta(x)$ *з умови* (1.3) *на* γ *є поліномом степеня не вище* k. *Тоді для наближеного узагальненого розв'язку* $u_k^N(x) \in H_k^N$ *має місце оцінка*

$$\|u - u_k^N\|_{W_2^1} \le \frac{Ch^k}{f(\theta)}, \tag{2.13}$$

де $C = \mathrm{const} > 0$; k *— степінь поліномів МСЕ, а* h, $f(\theta)$ *визначені в теоремі* 2 (*п.* 1.3).

Доведення. Нехай $u(x)$ та $u_k^N(x)$ — класичний та наближений узагальнений з H_k^N розв'язки задачі (2.1), (1.2) – (1.4). Тоді справедливі співвідношення

$$L(u, z_k^N) = 0, \quad L(u_k^N, z_k^N) = 0 \quad \forall z_k^N \in H_{k0}^N \subset H_0,$$

або

$$L(u, z_k^N) - L(u_k^N, z_k^N) = 0. \tag{2.14}$$

Нехай $z_k^N = (u - u_k^N) - (u - v_k^N)$, де v_k^N — довільна функція з H_k^N. Тоді з (2.14) випливає

$$L(u, u-u_k^N) - L(u_k^N, u-u_k^N) = L(u, u-v_k^N) - L(u_k^N, u-v_k^N) \quad \forall v_k^N \in H_k^N. \tag{2.15}$$

З урахуванням припущень (2.2) для лівої частини рівності (2.15) отримуємо оцінку знизу

$$L(u, u-u_k^N) - L(u_k^N, u-u_k^N) \ge C_1 \|u - u_k^N\|_0^2, \tag{2.16}$$

а для правої — оцінку зверху

$$L(u, u-v_k^N) - L(u_k^N, u-v_k^N) \le C_2 \|u - u_k^N\|_0 \|u - v_k^N\|_0, \tag{2.17}$$

де C_1, $C_2 = \mathrm{const} > 0$,

$$\|v\|_0^2 = \|v\|_{W_2^1}^2 + \int\limits_\gamma \beta(\nu v^+ + \chi v^-)^2 d\gamma.$$

Враховуючи (2.16), (2.17), з (2.15) маємо

$$\|u - u_k^N\|_{W_2^1} \le \frac{C_2}{C_1} \|u - v_k^N\|_0. \tag{2.18}$$

Вибираючи замість v_k^N функцію $\overline{u}_k^N(x) \in H_k^N$, що є повним інтерполяційним поліномом класичного розв'язку $u(x)$ на кожному трикутнику $\overline{e}_j^l$ розбиття областей $\overline{\Omega}_j$, $j = 1, 2$; $l = \overline{1, N_j}$, з урахуванням оцінок інтерполяції [11, 12] на основі (2.18) отримуємо (2.13). Теорему доведено.

2.2. ***Задача з малим параметром.*** В п. 2.1 крайова задача (2.1), (1.2) – (1.4) розглядається і дискретизується з головною умовою спряження (1.3), яку можна отримати при $\tau \to 0$ з умови

$$\tau(\nu' q_u^- + \chi' q_u^+) = [u] - \delta(x), \qquad x \in \gamma, \tag{2.19}$$

де функції $q_u^\pm$ визначаються за допомогою виразу (1.16′).

Узагальнений розв'язок

$$u'(x,\tau) \in H' = \left\{ v(x): v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2;\ v|_\Gamma = 0 \right\}$$

крайової задачі (2.1), (1.2), (1.4), (2.19) є єдиним розв'язком задачі Гальоркіна

$$\iint_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}K_{ij}(x)\frac{\partial u'}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+f\left(x,u',\frac{\partial u'}{\partial x_1},\frac{\partial u'}{\partial x_2}\right)v\right\}dx+\frac{1}{\tau(\nu'+\chi')}\int_{\gamma}[u'][v]d\gamma+$$

$$+\int_{\gamma}\beta(\nu u'^{+}+\chi u'^{-})(\nu v^{+}+\chi v^{-})d\gamma-\int_{\gamma}\frac{\tau\chi'\alpha+\delta}{\tau(\nu'+\chi')}[v]d\gamma+\int_{\gamma}\alpha v^{+}d\gamma=0\quad\forall v\in H', \tag{2.20}$$

а розв'язок $u(x)$ задачі (2.1), (1.2) – (1.4) — розв'язком задачі

$$\iint_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{2}K_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)v\right\}dx+\frac{1}{\tau(\nu'+\chi')}\int_{\gamma}[u][v]d\gamma+$$

$$+\int_{\gamma}\beta(\nu u^{+}+\chi u^{-})(\nu v^{+}+\chi v^{-})d\gamma-\int_{\gamma}\frac{\tau\chi'\alpha+\delta'}{\tau(\nu'+\chi')}[v]d\gamma+\int_{\gamma}\alpha v^{+}d\gamma=0\quad\forall v\in H', \tag{2.21}$$

де $\delta'(x,\tau)=\delta-\tau(\nu' q_u^{-}+\chi' q_u^{+})$.

Враховуючи припущення (2.2), на основі співвідношень (2.20), (2.21) отримуємо оцінку (2.21), тобто для похибки $z(x,\tau)=u(x)-u'(x,\tau)$ має місце оцінка (1.22).

Зауважимо, що при кожному фіксованому τ задачу (2.1), (1.2), (1.4), (2.19) з природними неоднорідними умовами спряження можна розв'язати за допомогою МСЕ і якщо її розв'язок $u(x,\tau)|_{\Omega_j}\in C^{k+1}(\Omega_j)$, $j=1,2$, то для похибки розв'язку $u_k^N(x,\tau)\in\overline{H}_k^N$ має місце оцінка вигляду (2.13).

3. Задачі Неймана. ***3.1. Природні неоднорідні умови спряження.*** Нехай на інтервалах $(0,\xi)$, (ξ,l), $0<\xi<l<\infty$, визначено рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{du}{dx}\right)=f(x), \tag{3.1}$$

де $K|_{\Omega_i}\in C(\overline{\Omega}_i)\cap C^1(\Omega_i)$, $f|_{\Omega_i}\in C(\Omega_i)$, $i=1,2$, $0<K_0\le K(x)\le K_1<\infty$, $|f|<\infty$.

На кінцях відрізка $[0,l]$ задано умови Неймана

$$-K\frac{du}{dx}\Big|_{x=0}=g_1,\qquad K\frac{du}{dx}\Big|_{x=l}=g_2, \tag{3.2}$$

де $g_1,\ g_2\in R^1$.

У точці $x=\xi$ неоднорідні умови спряження мають вигляд

$$R_1\left\{K\frac{du}{dx}\right\}^{-}+R_2\left\{K\frac{du}{dx}\right\}^{+}=[u]-\delta, \tag{3.3}$$

$$\left[K\frac{du}{dx}\right]=\omega, \tag{3.4}$$

де $\delta,\ \omega\in R^1$, $[u]=u^{+}-u^{-}$, $u^{\pm}=\{u\}^{\pm}=u(\xi\pm0)$; $R_1,\ R_2\ge0$, $R_1+R_2>0$.

Легко бачити, що якщо $u(x)$ — класичний розв'язок задачі (3.1) – (3.4), то $u(x)+C$ — теж розв'язок цієї задачі. Для існування класичного розв'язку необхідно, щоб виконувалась умова

$$\int_0^l f\,dx+g_1+g_2=\omega. \tag{3.5}$$

Лема 6. *Нехай* $\overline{M}=\left\{v(x):\ v|_{\Omega_j}\in C(\overline{\Omega}_j)\cap C^1(\Omega_j),\ j=1,2\right\}$. *Тоді має місце нерівність*

$$\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \left(\int_0^l u\,dx\right)^2 + \left([u]\big|_{x=\xi}\right)^2 \geq \mu \int_0^l u^2 dx \quad \forall u \in \overline{M}, \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (3.6)$$

Доведення. Нехай $u(x)$ — довільна функція з $\overline{M}$. Виберемо в $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ дві точки $x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \in \Omega_2$. Тоді

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{\xi} \frac{du}{d\eta} d\eta + \int_{\xi}^{x_2} \frac{du}{d\eta} d\eta + [u]\big|_{x=\xi}. \quad (3.7)$$

Піднісши до квадрату обидві частини рівності (3.7) і використавши нерівність Коші – Буняковського, отримаємо

$$u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2u(x_1)u(x_2) \leq 3\left\{\left(\int_{x_1}^{\xi} \frac{du}{d\eta} d\eta\right)^2 + \left(\int_{\xi}^{x_2} \frac{du}{d\eta} d\eta\right)^2 + \left([u]\big|_{x=\xi}\right)^2\right\} \leq$$

$$\leq 3\left\{\xi \int_0^{\xi} \left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 d\eta + (l-\xi)\int_{\xi}^{l} \left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 d\eta + \left([u]\big|_{x=\xi}\right)^2\right\} \leq 3C_1\left\{\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \left([u]\big|_{x=\xi}\right)^2\right\},$$

де $C_1 = \max\{\xi, l-\xi, 1\}$.

Отже,

$$u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2u(x_1)u(x_2) \leq 3C_1\left\{\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \left([u]\big|_{x=\xi}\right)^2\right\}. \quad (3.8)$$

Якщо $x_1, x_2 \in \Omega_j$, $j = 1, 2$, то

$$u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2u(x_1)u(x_2) \leq C' \int_0^l \left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 d\eta, \quad (3.9)$$

де $C' = \max\{\xi, l-\xi\}$.

Таким чином, при довільному розміщенні точок x_1, x_2 в Ω для будь-якого $u \in \overline{M}$ має місце нерівність (3.8). Інтегруючи цю нерівність по x_1, x_2, маємо

$$2l\int_0^l u^2(x)\,dx - 2\left(\int_0^l u(x)\,dx\right)^2 \leq 3C_1 l^2\left\{\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \left([u]\big|_{x=\xi}\right)^2\right\}.$$

Тим самим доведено справедливість нерівності (3.6). Лему доведено.

Використовуючи граничний перехід в нерівності (3.6), переконуємось, що ця нерівність справедлива для всіх $u(x) \in \overline{H} = \left\{v(x) \colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2\right\}$.

Будемо шукати розв'язок $u(x)$ задачі (3.1) – (3.4), що задовольняє умову

$$(u, 1) = Q, \quad (3.10)$$

де Q — деяке відоме дійсне число, $(z, v) = \int_0^l zv\,dx$. Позначимо $H_Q = \{v(x) \colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2,\ (v,1) = Q\}$. При $Q = 0$ маємо $H_0 = \{v(x) \colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1,2,\ (v,1) = 0\}$.

Зауважимо, що задачі Неймана з неперервними коефіцієнтами розглядались, наприклад, в роботах [5, 14, 15], задача Неймана з розривним розв'язком в полярній системі координат — у роботі [16].

Означення 5. *Функція $u(x)$, що доставляє мінімум функціоналу*

$$F_1(v) = \int_0^l K\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \frac{[v]^2}{R_1+R_2} - 2\int_0^l f\, v dx - 2\frac{R_2\omega+\delta}{R_1+R_2}[v] + 2\omega v^+ - 2g_1 v(0) - 2g_2 v(l) \tag{3.11}$$

на H_Q, *називається узагальненим розв'язком крайової задачі* (3.1) – (3.4), *де* $[v] = [v]|_{x=\xi}$.

Нехай $u \in H_Q$ доставляє мінімум функціоналу $F_1(v)$ на H_Q. Тоді для будь-яких $\varepsilon \in R^1$ і $v \in H_0$ $u+\varepsilon v \in H_Q$. З необхідної умови мінімуму функціонала $F_1(v)$ отримуємо

$$\langle u, v\rangle_1 = l_1(v), \quad u \in H_Q, \quad \forall v \in H_0, \tag{3.12}$$

де

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_0^l K\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \frac{[u][v]}{R_1+R_2},$$

$$l_1(v) = \int_0^l f\, v dx + \frac{R_2\omega+\delta}{R_1+R_2}[v] - \omega v^+ + g_1 v(0) + g_2 v(l).$$

Співвідношення (3.12) засвідчує, що узагальнений розв'язок $u(x) \in H_Q$ є також слабким розв'язком крайової задачі (3.1) – (3.4), (3.10). На основі співвідношення (3.12) отримуємо єдиність слабкого розв'язку, тобто єдиність класичного та узагальненого розв'язків цієї крайової задачі. Дійсно, нехай існують два розв'язки $u', u'' \in H_Q$ $(u' \neq u'')$ задачі (3.12). Тоді

$$0 = \langle u'-u'', u'-u''\rangle = \int_0^l K\left(\frac{d(u'-u'')}{dx}\right)^2 dx + \frac{[u'-u'']^2}{R_1+R_2} \geq$$

$$\geq \min\left\{K_0, \frac{1}{R_1+R_2}\right\}\left\{\int_0^l \left(\frac{d(u'-u'')}{dx}\right)^2 dx + [u'-u'']^2 + \left(\int_0^l (u'-u'')dx\right)^2\right\} \geq$$

$$\geq C_0\int_0^l (u'-u'')^2 dx > 0,$$

де $C_0 = \mu \min\{K_0, 1/(R_1+R_2)\}$, μ — стала з узагальненої нерівності Пуанкаре (3.6), тобто розв'язки u', u'' збігаються.

Крайову задачу (3.1) – (3.4), (3.10) будемо називати задачею 2. Введемо в розгляд таку допоміжну крайову задачу $2'$.

На області $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ визначено інтегро-диференціальне рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{du}{dx}\right) + \int_0^l u\, dx = f(x) + Q. \tag{3.13}$$

Крайові умови та умови спряження задаються відповідно співвідношеннями (3.2), (3.3), (3.4).

Для крайової задачі (3.13), (3.2) – (3.4) (задачі $2'$) варіаційна задача полягає в пошуку функції, що доставляє на H мінімум функціоналу енергії

$$F_2(v) = \langle v, v\rangle_2 - 2l_2(v), \tag{3.14}$$

де

$$H = \left\{v(x) \colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2\right\},$$

$$\langle u,v\rangle_2 = \langle u,v\rangle_1 + (u,1)(v,1), \qquad l_2(v) = l_1(v) + Q(v,1).$$

Задача в слабкій постановці для задачі $2'$ полягає в пошуку функції $v(x) \in H$, яка задовольняє інтегральне співвідношення

$$\langle u,v\rangle_2 = l_2(v) \qquad \forall v \in H. \tag{3.15}$$

Лема 7. *Задачі* (3.14), (3.15) — *еквівалентні. Їх єдиний розв'язок* $u(x)$ *існує в* H.

Означення 6. *Розв'язок задач* (3.14), (3.15) *називається узагальненим розв'язком, а ці задачі — узагальненими задачами крайової задачі* (3.13), (3.2) – (3.4).

Теорема 6. *Крайова задача* $2'$ *має єдиний узагальнений розв'язок* $u(x) \in H$. *Якщо* $u|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j) \cap C^2(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, *то* u — *класичний розв'язок задачі* $2'$, *а при умові виконання співвідношення* (3.5) u — *класичний розв'язок і крайової задачі* (3.1) – (3.4), (3.10).

Доведення. Існування єдиного узагальненого розв'язку задачі $2'$ випливає з леми 7. Те, що $u(x)$ $(u|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j) \cap C^2(\Omega_j),\ j = 1,2)$ є класичним розв'язком крайової задачі $2'$, встановлюємо, використовуючи результати роботи [10]. Крім того, з (3.15) випливає

$$l(u,1) = \int_0^l f\,dx - \omega + g_1 + g_2 + Ql. \tag{3.16}$$

Враховуючи (3.5), з (3.16) одержуємо $(u,1) = Q$, або $u \in H_Q$, тобто $u(x)$ — класичний розв'язок задачі (3.1) – (3.4), (3.10), де умови (3.2) – (3.4), (3.10) — природні.

***Зауваження* 3.** Виконання умови (3.5) для задачі $2'$ не є обов'язковим.

Теорема 7. *Нехай* $u \in H$, $w \in H_Q$ — *розв'язки задач відповідно* (3.14), (3.11) *і виконується умова* (3.5). *Тоді* $u = w$.

Доведення. Нехай $u \in H$ — розв'язок задачі (3.14) і виконується умова (3.5). Тоді з урахуванням (3.16) отримуємо $u \in H_Q$. Покажемо, що u доставляє мінімум функціоналу F_1 (3.11) на H_Q.

Оскільки $v = u - w \in H_0$, то для будь-якого $\varepsilon \in R^1$ $u + \varepsilon v \in H_Q$ і

$$F_1(w) = F_1(u-v) = F_1(u) - 2\langle u,v\rangle_1 + \langle v,v\rangle_1 + 2l_1(v) \le$$
$$\le F_1\!\left(u - \frac{1}{2}v\right) = F_1(u) - \langle u,v\rangle_1 + \frac{1}{4}\langle v,v\rangle_1 + l_1(v). \tag{3.17}$$

З нерівності (3.17) випливає

$$\frac{3}{4}\langle v,v\rangle_1 + l_1(v) - \langle u,v\rangle_1 \le 0. \tag{3.18}$$

Оскільки $\langle u,v\rangle_1 = \langle u,v\rangle_2$, $(f,v) = (f + Q, v)$, то

$$\langle u,v\rangle_1 = l_1(v).$$

З урахуванням отриманої рівності з (3.18) випливає

$$\langle v,v\rangle_1 \le 0. \tag{3.19}$$

Використовуючи узагальнену нерівність Пуанкаре (3.6), з (3.19) отримуємо суперечність

$$0 \le \langle v,v\rangle_1 \le 0.$$

Отже, $u = w$. Теорему доведено.

Наближений узагальнений розв'язок $u_k^N(x)$ крайової задачі (3.1) – (3.4), (3.10) будемо шукати в класі $H_k^N \subset H$ як наближений узагальнений розв'язок допоміжної задачі (3.13), (3.2) – (3.4).

Теорема 8. *Нехай класичний розв'язок задачі Неймана* (3.1) – (3.4), (3.10) $u|_{\Omega_j} \in C^{k+1}(\Omega_j)$, $j = 1, 2$. *Тоді для наближеного узагальненого розв'язку* $u_k^N(x) \in H_k^N$ *задачі* 2′ *має місце оцінка*

$$\| u - u_k^N \|_{W_2^1} \leq Ch^k, \tag{3.20}$$

де $C = \text{const} > 0$; $h = \max_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, k *— степінь поліномів МСЕ,* H_k^N *— підпростір неперервних на* $[0,\xi]$, $[\xi,l]$ *функцій* $v_k^N(x)$, *що є повними поліномами степеня* k *змінної* x *на кожному з елементарних відрізків* $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, $i \neq \chi$, $x_\chi = \xi - 0$, $x_{\chi+1} = \xi + 0$.

3.2. ***Задача з неоднорідною головною умовою.*** Нехай на інтервалах $(0,\xi)$, (ξ,l), $0 < \xi < l$, визначено рівняння (3.1), на кінцях відрізка $[0,l]$ задано умови Неймана (3.2), а в точці $x = \xi$ — умову

$$[u] = \delta \tag{3.21}$$

та умову спряження (3.4).

Будемо шукати розв'язок задачі (3.1), (3.2), (3.4), (3.21), що задовольняє умову (3.10).

Означення 7. *Функція* $u(x)$, *що доставляє мінімум функціоналу* $F_3(v)$ *на* H_Q^δ, *називається узагальненим розв'язком крайової задачі* (3.1), (3.2), (3.4), (3.21), (3.10) (*задачі* 3), *де*

$$F_3(v) = \langle v,v \rangle_3 - 2l_3(v), \tag{3.22}$$

$$H_Q^\delta = \left\{ v(x) \colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2;\ [v] = \delta,\ (v,1) = Q \right\},$$

$$\langle u,v \rangle_3 = \int_0^l K \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx, \qquad l_3(v) = (f,v) + g_1 v(0) + g_2 v(l) - \omega v^+.$$

Якщо $u \in H_Q^\delta$ *— розв'язок задачі* (3.22), *то він є і розв'язком задачі в слабкій постановці*

$$\langle u,v \rangle_3 = l_3(v), \quad u \in H_Q^\delta, \quad \forall v \in H_0^0,$$

де

$$H_0^0 = \left\{ v(x) \colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2;\ [v] = 0,\ (v,1) = 0 \right\}.$$

Введемо в розгляд допоміжну крайову задачу 3′.

На області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ визначено інтегро-диференціальне рівняння (3.13). Крайові умови та умови спряження задаються відповідно співвідношеннями (3.2), (3.4), (3.21). Функціонал енергії $F_4(v)$ для крайової задачі (3.1), (3.2), (3.4), (3.21) (задачі 3′) має вигляд

$$F_4(v) = \langle v,v \rangle_4 - 2l_4(v) \qquad \forall v \in H, \tag{3.23}$$

де $H = \left\{ v(x) \colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1,2;\ [v] = \delta \right\}$,

$$\langle u,v \rangle_4 = \langle u,v \rangle_3 + (u,1)(v,1), \qquad l_4(v) = l_3(v) + Q(v,1).$$

Задача в слабкій постановці для задачі $3'$ полягає в пошуку функції $v(x) \in H$, яка задовольняє інтегральне співвідношення

$$\langle u, v \rangle_4 = l_4(v) \quad \forall v(x) \in H^0, \tag{3.24}$$

де $H^0 = \left\{ v(x) \colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j),\ j = 1, 2;\ [v] = 0 \right\}$.

Лема 8. *Задачі* (3.23), (3.24) — *еквівалентні. Їх єдиний розв'язок* $u(x)$ *існує в* H.

Означення 8. *Розв'язок задач* (3.23), (3.24) *називається узагальненим розв'язком, а ці задачі — узагальненими задачами крайової задачі* $3'$.

Теорема 9. *Крайова задача* $3'$ *має єдиний узагальнений розв'язок* $u(x) \in H$. *Якщо* $u|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j) \cap C^2(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, *то* u — *класичний розв'язок задачі* $3'$, *а при умові виконання співвідношення* (3.5) u — *класичний розв'язок і крайової задачі* (3.1), (3.2), (3.4), (3.21), (3.10).

Теорема 10. *Нехай* $u \in H$, $w \in H_Q^0$ — *розв'язки задач відповідно* $3'$, 3 *і виконується умова* (3.5). *Тоді* $u = w$.

Наближений узагальнений розв'язок задачі Неймана 3 будемо шукати в класі $H_k^N \subset H$ функцій $v_k^N(x)$, що неперервні на відрізках $[0, \xi]$, $[\xi, l]$, є повними поліномами степеня k змінної x на кожному елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ та задовольняють умову (3.21).

Теорема 11. *Нехай класичний розв'язок задачі Неймана* (3.1), (3.2), (3.4), (3.21), (3.10) $u|_{\Omega_j} \in C^{k+1}(\Omega_j)$, $j = 1, 2$. *Тоді для наближеного узагальненого розв'язку* $u_k^N \in H_k^N$ *задачі* $3'$ *має місце оцінка вигляду* (3.20).

1. *Комаренко О. Н., Троценко В. А.* Варіаційний метод розв'язання задач трансмісії з головною умовою спряження // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 6. – С. 762 – 775.
2. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Задачи с условиями сопряжения и высокоточные вычислительные алгоритмы их дискретизации // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 6. – С. 100 – 124.
3. *Демченко В. Ф.* Вычислительный эксперимент в теплофизике технологических процессов сварки и спецэлектрометаллургии: Автореф. дис. … д-ра техн. наук. – Киев, 1992. – 33 с.
4. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
5. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
8. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
9. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
10. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 615 с.
11. *Zlamal M.* On the finite element method // Numer. Math. – 1968. – **12**, № 5. – P. 393 – 409.
12. *Zenisek A.* Convergence of finite element procedure for solving boundary value problems of the system of elliptic equations // Appl. Mat. – 1969. – **14**, № 5. – P. 39 – 45.
13. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – Киев: Наук. думка, 1995. – 262 с.
14. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 510 с.
15. *Молчанов И. Н., Галба Е. Ф.* Дискретизация задачи Неймана методом конечных элементов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 12. – С. 17 – 19.
16. *Дейнека В. С.* Математические модели и методы исследования процессов в составных цилиндрических стенках подземных хранилищ. – Киев, 2000. – 48 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т кибернетики; 2000-1).

Одержано 09.08.2000,
після доопрацювання — 26.06.2001