УДК 517.9

Р. І. Петришин, Т. М. Сопронюк (Чернів. нац. ун-т)

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

We prove new theorems on the justification of averaging method in multifrequency oscillating systems that are influenced by pulse effect at fixed times.

Доведено нові теореми про обґрунтування методу усереднення в багаточастотних коливних системах, які зазнають імпульсного впливу у фіксовані моменти часу.

Нехай задано нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, \varphi, \tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$
$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon p_j(x, \varphi), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon q_j(x, \varphi), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in R^m$, $\tau = \varepsilon t \in I = [0, 1]$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\mathcal{D}$ — обмежена область, $\tau_0 > 0$, $\tau_{j+1} > \tau_j$ для всіх $j \in N$. Зміст всіх інших позначень такий же, як і в [1].

Метод усереднення для імпульсних систем звичайних диференціальних рівнянь стандартного вигляду вперше обґрунтував А. М. Самойленко [2]. Для систем (1) без імпульсного впливу оцінки похибки методу усереднення одержано в [3], а в роботах [4, 5] для імпульсних систем (1) з періодичними чи майже періодичними по φ правими частинами вивчено усереднення на відрізку та півосі при умові, що послідовності $\{t_{j+1} - t_j\}$, $\{p_j(x, \varphi)\}$ і $\{q_j(x, \varphi)\}$, де $t_j = \varepsilon^{-1}\tau_j$, s-періодичні по j [1]. Ми ж розглянемо аналогічну задачу без вказаного обмеження.

Вважатимемо, що $\omega(\tau) \in C_I^l, l \geq m$, а функція $c(x, \varphi, \tau) = [a(x, \varphi, \tau); b(x, \varphi, \tau)]$, $(x, \varphi, \tau) \in G \equiv \mathcal{D} \times R^m \times I$, 2π-періодична за кожною із змінних φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, розкладається в рівномірно по φ збіжний в G ряд Фур'є

$$\sum_k c_k(x, \tau) \exp\{i(k, \varphi)\},$$

причому

$$\sum_{\|k\|>0} \frac{\| c_k(x, \tau) \|}{\|k\|^{1/(l+1)}} \leq \sigma_1 \quad \forall (x, \tau) \in \mathcal{D} \times I, \quad \sigma_1 = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Припустимо, що рівномірно по x, φ існує границя

$$\lim_{j \to \infty} r_j(x, \varphi) = r(x, \varphi), \tag{3}$$

в якій функція $r(x, \varphi) = [p(x, \varphi); q(x, \varphi)]$ 2π-періодична за кожною із змінних φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, розкладається в ряд Фур'є, а коефіцієнти Фур'є $r_k(x)$ справджують нерівність

$$\sum_k \|k\| \, \| r_k(x) \| \leq \sigma_1, \quad x \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

Замість умови (4) можна було б накласти відповідну умову на коефіцієнти Фур'є кожної з функцій $r_j(x, \varphi) = [p_j(x, \varphi); q_j(x, \varphi)]$, $j \geq 1$.

Нехай

$$\lim_{j\to\infty} \bar{t}_j = \theta > 0, \tag{5}$$

де $\bar{t}_j = t_{j+1} - t_j$, $t_j = \varepsilon^{-1}\tau_j$, $\theta < \infty$. При накладених обмеженнях

$$\bar{t}_j \geq \theta_1 = \text{const} > 0, \quad j \in N.$$

Припустимо також, що для всіх $\tau', \tau'' \in I$, $x', x'' \in \mathcal{D}$, $\varphi', \varphi'' \in R^m$, $j \in N$ виконуються нерівності

$$\| c(x', \varphi', \tau') - c(x'', \varphi'', \tau'') \| \leq \sigma_1 (\| x'' - x' \| + \| \varphi'' - \varphi' \| + | \tau'' - \tau' |),$$
$$\| c(x', \varphi', \tau') \| \leq \sigma_1, \tag{6}$$

$$\| r(x', \varphi') - r(x'', \varphi'') \| \leq \sigma_1 (\| x'' - x' \| + \| \varphi'' - \varphi' \|), \quad \| r_j(x', \varphi') \| \leq \sigma_1. \tag{7}$$

Системі (1) поставимо у відповідність усереднену за всіма кутовими змінними систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{\theta}\bar{p}(\bar{x}), \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{\theta}\bar{q}(\bar{x}), \tag{8}$$

де

$$[\bar{a}(x, \tau); \bar{b}(x, \tau)] = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} [a(x, \varphi, \tau); b(x, \varphi, \tau)] d\varphi_1 \ldots d\varphi_m =$$
$$= [a_0(x, \tau); b_0(x, \tau)] = c_0(x, \tau),$$
$$[\bar{p}(x); \bar{q}(x)] = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} [p(x, \varphi); q(x, \varphi)] d\varphi_1 \ldots d\varphi_m = [p_0(x); q_0(x)] = r_0(x). \tag{9}$$

Для систем (1) і (8) задамо початкові умови

$$x|_{\tau=0} = y \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}, \quad \varphi|_{\tau=0} = \psi \in R^m, \tag{10}$$

в яких $\mathcal{D}_1$ — деяка область, і позначимо через $(x(\tau, y, \psi, \varepsilon); \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ та $(\bar{x}(\tau, y); \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ розв'язки задач відповідно (1), (10) та (8), (10).

Позначимо через $W_l(\tau)$ і $W_l^*(\tau)$ відповідно $(l \times m)$-вимірну матрицю [3]

$$W_l(\tau) = \left(\frac{d^{g-1}}{d\tau^{g-1}} \omega_\nu(\tau) \right)_{g=2, \nu=1}^{l+1, m}$$

і транспоновану.

Теорема 1. *Нехай:*

1) $\det(W_l^*(\tau) W_l(\tau)) > 0 \quad \forall \tau \in I$;

2) *виконуються умови* (2)–(7);

3) *для всіх* $\tau \in I$, $y \in \mathcal{D}_1$ *крива* $x = \bar{x}(\tau, y)$ *лежить в* $\mathcal{D}$ *разом із своїм* ρ*-околом.*

Тоді для довільного $\mu > 0$ *можна вказати таке* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > 0$, *що для кожних* $\tau \in I$, $y \in \mathcal{D}_1$, $\psi \in R^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедлива оцінка*

$$\| U(\tau, y, \psi, \varepsilon) \| \leq \mu, \tag{11}$$

де $U = (x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y); \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon))$.

Доведення. На підставі [1, с. 11] розв'язок задачі Коші (1), (10) існує. Позначимо через $[0, T)$, $T = T(y, \psi, \varepsilon)$, максимальний півінтервал відрізка [0, 1], для якого крива $x = x(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ лежить в ρ-околі кривої $x = \bar{x}(\tau, y)$. Тоді з рівнянь (1) і (8) маємо

$$U(\tau, y, \psi, \varepsilon) = \int_0^\tau \left(c(x(t, y, \psi, \varepsilon), \varphi(t, y, \psi, \varepsilon), t) - \bar{c}(\bar{x}(t, y), t)\right) dt +$$

$$+ \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} r_j\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right) - \frac{1}{\theta}\int_0^\tau \bar{r}(\bar{x}(t, y))\, dt.$$

Враховуючи нерівності (6), (7), отримуємо

$$\| U(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \le$$

$$\le \sigma_1 \int_0^\tau \|U(t, y, \psi, \varepsilon)\| dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{0<\tau_j<\tau} \left\|U(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right\| + D_1 + D_2 + D_3 + D_4, \tag{12}$$

де

$$D_1 \equiv \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} \left[r_j\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right) - r\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right)\right] \right\|,$$

$$D_2 \equiv \left\| \sum_{0<\tau_j<\tau} \left(\varepsilon \bar{r}\left(\bar{x}(\tau_j, y)\right) - \frac{1}{\theta} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \bar{r}(\bar{x}(t, y)))\, dt \right) \right\|,$$

$$D_3 \equiv \left\| \int_0^\tau \tilde{c}(\bar{x}(t, y), \bar{\varphi}(t, y, \psi, \varepsilon), t)\, dt \right\|, \quad D_4 \equiv \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} \tilde{r}\left(\bar{x}(\tau_j, y), \bar{\varphi}(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right) \right\|,$$

$$\tilde{c}(x, \varphi, t) = c(x, \varphi, t) - c_0(x, t), \qquad \tilde{r}(x, \varphi) = r(x, \varphi) - r_0(x).$$

Оскільки послідовність $\{\bar{t}_j\}$ задовольняє умову (5), а функції $r_j(x, \varphi)$ — умову (3), для довільного досить малого $\mu_1 > 0$ існує таке $j_0(\mu_1)$, що для всіх $j > j_0$ справджуються нерівності

$$\left| \frac{\bar{t}_j}{\theta} - 1 \right| < \mu_1, \quad \| r_j(x, \varphi) - r(x, \varphi)\| < \mu_1,$$

а отже, і нерівність

$$\left| \frac{\bar{\tau}_j}{\theta} - \varepsilon \right| < \varepsilon\mu_1. \tag{13}$$

Крім того, із (5) випливає існування такої додатної сталої θ_2, що

$$\bar{t}_j \le \theta_2$$

для всіх $j \in N$. Використовуючи цей факт і нерівності (7), отримуємо оцінки

$$D_1 \le \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j\le\tau_{j_0}} \left[r_j\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right) - r\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right)\right] \right\| +$$

$$+ \left\| \varepsilon \sum_{\tau_{j_0}<\tau_j<\tau} \left[r_j\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right) - r\left(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\right)\right] \right\| \le$$

$$\le 2 j_0 \varepsilon \sigma_1 + \frac{\mu_1}{\theta_1},$$

$$D_2 \le \left\| \varepsilon \sum_{0<\tau_j \le \tau_{j_0}} r_0\big(\bar{x}(\tau_j, y)\big) \right\| + \frac{1}{\theta} \left\| \sum_{0<\tau_j \le \tau_{j_0}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\bar{x}(t,y))\,dt \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{\tau_{j_0} < \tau_j < \tau} \left[\varepsilon r_0\big(\bar{x}(\tau_j, y)\big) - \frac{\bar{\tau}_j}{\theta} r_0\big(\bar{x}(\tau_j, y)\big) \right] \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{\tau_{j_0} < \tau_j < \tau} \frac{1}{\theta} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0\big(\bar{x}(\tau_j, y)\big) - r_0(\bar{x}(t,y)) \right] dt \right\| \le \varepsilon\sigma_1 j_0 + \varepsilon\sigma_1 j_0 \frac{\theta_2}{\theta} +$$

$$+ \sigma_1 \sum_{\tau_{j_0} < \tau_j < \tau} \left| \varepsilon - \frac{\bar{\tau}_j}{\theta} \right| + \frac{\theta_2^2}{\theta\theta_1} \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \sigma_1^2 \le \varepsilon\sigma_2 + \mu_1 \frac{\sigma_1}{\theta_1},$$

де $\sigma_2 \equiv \sigma_1 j_0 \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta} \right) + \frac{\theta_2^2}{\theta\theta_1} \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \sigma_1^2$. Тут використано нерівності для функції $r_0(x)$, які аналогічні нерівностям (7) для функцій $r(x, \varphi)$, $r_j(x, \varphi)$.

Для оцінки осциляційних інтеграла D_3 і суми D_4 виконаємо заміну

$$\bar{\varphi} = \bar{\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \omega(z)\,dz.$$

Тоді друге рівняння в системі (8) набирає вигляду

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = \bar{b}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{\theta} \bar{q}(\bar{x}). \tag{14}$$

Зафіксуємо досить мале $\Delta > 0$ (його ми означимо нижче) і подамо відрізок $[0, \tau]$ у вигляді $\bigcup_{\nu=0}^{s} [l_\nu, l_{\nu+1}]$, де $l_0 = 0$, $l_{\nu+1} - l_\nu = \Delta$ при $\nu < s$, $l_{s+1} = \tau$, s — ціла частина числа τ/Δ. Тоді

$$D_3 \le \sum_{\nu=0}^{s} \left\| \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \tilde{c} \left(\bar{x}(t, y), \bar{\theta}(t, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \omega(z) dz, t \right) dt \right\|,$$

$$D_4 \le \sum_{\nu=0}^{s} \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \tilde{r} \left(\bar{x}(\tau_j, y), \bar{\theta}(\tau_j, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j} \omega(z)\,dz \right) \right\|.$$

З рівнянь (8), (14) і нерівностей (6), (7) випливає, що для всіх $\tau \in [l_\nu, l_{\nu+1})$ справджується оцінка

$$\| \bar{x}(\tau, y) - \bar{x}(l_\nu, y) \| + \| \bar{\theta}(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) \| \le \sigma_3 \Delta, \tag{15}$$

де $\sigma_3 \equiv 2\sigma_1 (1 + 1/\theta)$.

На підставі [6] для осциляційного інтеграла справедлива оцінка

$$\left| \int_0^{\tau} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t (k, \omega(z))\,dz \right\} dt \right| \le \sigma_4 \varepsilon^{(l+1)^{-1}} \| k \|^{-(l+1)^{-1}}, \tag{16}$$

а для осциляційної суми [7] — оцінка

$$\left| \varepsilon \sum_{0<\tau_j<\tau} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j} (k, \omega(z))\,dz \right\} \right| \le \| k \| \mu_1. \tag{17}$$

Тут стала σ_4 не залежить від ε, а оцінки справджуються для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\mu_1)]$, $\tau \in I$.

Для оцінки D_4 скористаємось нерівностями (4), (6), (15), (17):

$$\left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \tilde{r}\left(\overline{x}(\tau_j, y), \overline{\theta}(\tau_j, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j} \omega(z)\,dz \right) \right\| \le$$

$$\le \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \left(\tilde{r}\left(\overline{x}(\tau_j, y), \overline{\theta}(\tau_j, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j} \omega(z)\,dz \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tilde{r}\left(\overline{x}(l_\nu, y), \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j} \omega(z)\,dz \right)\right) \right\| +$$

$$+ \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \tilde{r}\left(\overline{x}(l_\nu, y), \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j} \omega(z)\,dz \right) \right\| \le$$

$$\le 2\varepsilon\sigma_1 \frac{\Delta}{\varepsilon\theta_1}\left(\left\| \overline{x}(\tau_j, y) - \overline{x}(l_\nu, y) \right\| + \left\| \overline{\theta}(\tau_j, y, \psi, \varepsilon) - \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) \right\| \right) +$$

$$+ \sum_{k \ne 0} \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \left(r_k(\overline{x}(l_\nu, y)) \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon)\right)\right\} \right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j} (k, \omega(z))\,dz \right\} \right\| \le$$

$$\le 2\sigma_1\sigma_3 \frac{\Delta^2}{\theta_1} + \sigma_1\mu_1.$$

Тому

$$D_4 \le \sigma_5(\Delta + \mu_1/\Delta),$$

де $\sigma_5 \equiv \sigma_1 + 2\sigma_1\sigma_3/\theta_1$.

Враховуючи оцінки (15), (16) і умови (4), (6), оцінюємо осциляційний інтеграл D_3. Маємо

$$\left\| \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \tilde{c}\left(\overline{x}(t, y),\ \overline{\theta}(t, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz,\ t \right) dt \right\| \le$$

$$\le \left\| \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \left(\tilde{c}\left(\overline{x}(t, y),\ \overline{\theta}(t, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz,\ t \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \tilde{c}\left(\overline{x}(l_\nu, y),\ \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz,\ l_\nu \right)\right) dt \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \tilde{c}\left(\overline{x}(l_\nu, y),\ \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz,\ l_\nu \right) dt \right\| \le$$

$$\le 2\sigma_1(\sigma_3 + 1)\Delta^2 +$$

$$+ \sum_{k \ne 0} \left\| c_k(\overline{x}(l_\nu, y), l_\nu) \exp\left\{ i\left(k, \overline{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon)\right)\right\} \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon}\int_0^t (k, \omega(z))\,dz \right\} dt \right\| \le$$

$$\leq 2\sigma_1(\sigma_3+1)\Delta^2+\sigma_1\sigma_4\varepsilon^{(l+1)^{-1}},$$

тому

$$D_3 \leq \sigma_6\left(\Delta+\varepsilon^{(l+1)^{-1}}/\Delta\right),$$

де $\sigma_6 \equiv \sigma_1(2+\sigma_4+2\sigma_3)$.

Використовуючи оцінки доданків D_1, D_2, D_3, D_4, із нерівності (12) одержуємо інтегро-сумарну нерівність

$$\|U(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \leq \sigma_1\int_0^\tau \|U(t,y,\psi,\varepsilon)\|dt+\varepsilon\sigma_1\sum_{0<\tau_j<\tau}\left\|U(\tau_j,y,\psi,\varepsilon)\right\|+$$
$$+\sigma_7\left(\Delta+\left(\mu_1+\varepsilon^{(l+1)^{-1}}\right)/\Delta\right)$$

зі сталою $\sigma_7 \equiv 2j_0\sigma_1+\sigma_2+\dfrac{1}{\theta_1}+\dfrac{\sigma_1}{\theta_1}+\sigma_5+\sigma_6$, розв'язок якої згідно з [1, с. 16] задовольняє оцінку

$$\|U(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \leq \sigma_7 e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}\left(\Delta+\left(\mu_1+\varepsilon^{(l+1)^{-1}}\right)/\Delta\right). \tag{18}$$

Для довільного додатного μ виберемо величини Δ, μ_1, ε_0 так:

$$\Delta = \frac{\mu}{3\sigma_7 e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}}, \quad \mu_1 = \frac{\mu^2}{9\sigma_7 e^{T\sigma_1(1+\frac{1}{\theta_1})}}, \quad \varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1,\mu_1^{l+1}\right\}.$$

Тут ε_1 вибирається таким чином, щоб виконувались оцінки (16) та (17). Тоді з нерівності (18) випливає оцінка

$$\|U(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \leq \mu \quad \forall(\tau,y,\psi,\varepsilon)\in[0,T)\times\mathcal{D}_1\times R^m\times(0,\varepsilon_0].$$

Виберемо $\mu\leq\rho/2$. Тоді з останньої нерівності випливає, що $x(T,y,\psi,\varepsilon)\in\mathcal{D}$ разом із своїм $\rho/2$-околом. Тому $T=1$, і оцінка (11) справджується для всіх $\tau\in[0,1]$. Теорему доведено.

Зауваження. Якщо в системі (1) $\bar{t}_j\equiv\theta$ для всіх $j\in N$, а функції $r_j(x,\varphi)\equiv r(x,\varphi,\tau_j)$ і $r(x,\varphi,\tau)$ задовольняють в G умову Ліпшиця по всіх аргументах, то замість усередненої системи (8) одержуємо таку усереднену систему:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x},\tau)+\frac{1}{\theta}\bar{p}(\bar{x},\tau), \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+\bar{b}(\bar{x},\tau)+\frac{1}{\theta}\bar{q}(\bar{x},\tau),$$

де $[\bar{p}(x,\tau);\bar{q}(x,\tau)]\equiv\bar{r}(x,\tau)$ — середнє по φ в кубі періодів функції $r(x,\varphi,\tau)$, коефіцієнти Фур'є якої задовольняють умову

$$\sum_k \|k\|\,\|r_k(x,\tau)\| \leq \sigma_1 \qquad \forall(x,\tau)\in\mathcal{D}\times I.$$

Тоді оцінка (18) набирає вигляду

$$\|U(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \leq \bar{\sigma}_7\left(\Delta+\varepsilon^{(l+1)^{-1}}/\Delta\right).$$

Для отримання найкращої відносно порядку по ε оцінки покладемо $\Delta = \varepsilon^{(2(l+1))^{-1}}$ і замість (11) дістанемо нерівність

$$\|U(\tau,y,\psi,\varepsilon)\| \leq \sigma_8\,\varepsilon^{(2(l+1))^{-1}},$$

яка справджується для всіх $(\tau,y,\psi,\varepsilon)\in[0,1)\times\mathcal{D}_1\times R^m\times(0,\varepsilon_1]$. Тут стала

$\sigma_8 \equiv 2\overline{\sigma}_7$ не залежить від ε, а малість ε_1 визначається умовами виконання оцінок осциляційних інтеграла (16) та суми [4].

Припустимо тепер, що:

А) в системі (1) $r_j(x, \varphi) \equiv r_j(x) + r^*(x, \varphi, \tau_j)$ для всіх $j \in N$, а функції $r_j(x) = [p_j(x), q_j(x)]$, $r^*(x, \varphi, \tau) = [p^*(x, \varphi, \tau); q^*(x, \varphi, \tau)]$ обмежені сталою σ_1 і задовольняють в G умову Ліпшиця по x, φ, τ зі сталою σ_1;

Б) функція $r^*(x, \varphi, \tau)$ 2π-періодична по кожній із змінних φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, і розкладається в ряд Фур'є, коефіцієнти Фур'є $r_k^*(x, \tau)$ якого задовольняють умову

$$\sum_k \|k\| \|r_k^*(x, \tau)\| \leq \sigma_1 \qquad \forall (x, \tau) \in \mathcal{D} \times I, \qquad r_0^*(x, \tau) \equiv 0; \tag{19}$$

В) рівномірно по x, t існує границя

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\sum\limits_{t \leq t_j < t+T} r_j(x)}{T} \equiv \frac{\overline{r}(x)}{\theta}. \tag{20}$$

Тут $\overline{r}(x) \equiv [\overline{p}(x); \overline{q}(x)]$.

Системі (1) поставимо у відповідність систему (8), в якій використовуються наведені вище позначення. Зазначимо, що границя вигляду (20) застосовується як середнє в роботі [2] при обґрунтуванні методу усереднення для імпульсних систем стандартного вигляду.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1, 3 *теореми* 1, *припущення* А) – В) *і нерівності* (2), (5), (6), *то для довільного* $\mu > 0$ *можна вказати таке* $\varepsilon_0(\mu) > 0$, *що для кожних* $\tau \in I$, $y \in \mathcal{D}_1$, $\psi \in R^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедлива оцінка* (11).

Доведення. Повторимо схему доведення теореми 1. Тоді одержимо нерівність (12), в якій

$$\begin{aligned} D_1 &\equiv \left\| \varepsilon \sum_{0 < \tau_j < \tau} \Big(r_j\big(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\big) - \overline{r}\big(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\big) \Big) \right\|, \\ D_4 &\equiv \left\| \varepsilon \sum_{0 < \tau_j < \tau} r^*\big(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon), \tau_j\big) \right\|, \end{aligned} \tag{21}$$

а D_2, D_3 мають такий же вигляд, як і в теоремі 1.

Для оцінки D_4 виконаємо заміну

$$\varphi = \tilde{\theta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \omega(z)\, dz$$

і подамо відрізок $[0, \tau]$ у вигляді $\bigcup\limits_{\nu=0}^{s} [l_\nu, l_{\nu+1}]$. Тоді

$$D_4 \leq \sum_{\nu=0}^{s} \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} r^*\big(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon),\ \varphi(\tau_j, y, \psi, \varepsilon),\ \tau_j\big) \right\|.$$

Оскільки для всіх $\tau \in [l_\nu, l_{\nu+1})$ справджується оцінка

$$\| x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - x(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) \| + \left\| \tilde{\theta}(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \tilde{\theta}(l_\nu, y, \psi, \varepsilon) \right\| \leq 2\sigma_1 \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \right) \Delta, \tag{22}$$

використовуючи метод з теореми 1 встановлення оцінок доданків D_3, D_4, обмеження (19) і умову Ліпшиця для функції $r^*(x, \varphi, \tau)$, одержуємо нерівність

$$D_4 \leq \sigma_9(\Delta + \mu_1/\Delta)$$

з деякою сталою σ_9.

З умови (20) випливає, що для довільного досить малого $\mu_2 > 0$ існує таке T_0, що для всіх $T \geq T_0$, $x \in \mathcal{D}$, $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ справджується нерівність

$$\left\| \frac{\sum\limits_{t \leq t_j < t+T} r_j(x)}{T} - \frac{\bar{r}(x)}{\theta} \right\| < \mu_2. \tag{23}$$

З останньої нерівності і умови Ліпшиця для функцій $r_j(x)$ випливає, що функція $\bar{r}(x)$ також задовольняє умову Ліпшиця по x зі сталою $\tilde{\sigma}_1 = 2\sigma_1\theta/\theta_1$.

З обмеженості функцій $r_j(x)$ сталою σ_1 і нерівності (23) одержуємо обмеженість функції $\bar{r}(x)$ сталою $\tilde{\sigma}_1$.

При $\tau < \varepsilon T_0$ в сумі, що визначає доданок D_1, є не більше $j_1(T_0)$ доданків, тому для таких τ

$$D_1 \leq (\sigma_1 + \tilde{\sigma}_1)\varepsilon j_1. \tag{24}$$

При $\tau \geq \varepsilon T_0$ зафіксуємо $\Delta_1 = \varepsilon T_0$ і подамо відрізок $[0, \tau]$ у вигляді $\bigcup\limits_{\nu=0}^{s-1}[l_\nu, l_{\nu+1}]$, де $l_0 = 0$, $l_{\nu+1} - l_\nu = \Delta_1$ при $\nu < s-1$, $l_s = \tau$, s — ціла частина числа τ/Δ_1. Тоді для $\tau \geq \varepsilon T_0$

$$D_1 = \sum_{\nu=0}^{s-1}\left(S_1^{(\nu)} + S_2^{(\nu)}\right),$$

де

$$S_1^{(\nu)} \equiv \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} \left[r_j(x(l_\nu, y, \psi, \varepsilon)) - \bar{r}(x(l_\nu, y, \psi, \varepsilon)) \right] \right\|,$$

$$S_2^{(\nu)} \equiv \left\| \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} \left[r_j\big(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\big) - r_j(x(l_\nu, y, \psi, \varepsilon)) \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\bar{r}(x(l_\nu, y, \psi, \varepsilon)) - \bar{r}\big(x(\tau_j, y, \psi, \varepsilon)\big) \right] \right\|.$$

Позначимо $x(\tau) = x(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ і використаємо нерівності (13) і (23). Тоді

$$S_1^{(\nu)} \leq \left\| \Delta_1 \left(\frac{\varepsilon \sum\limits_{l_\nu \leq \tau_j < l_\nu + \Delta_1} r_j(x(l_\nu))}{\Delta_1} - \frac{\bar{r}(x(l_\nu))}{\theta} \right) + \frac{\Delta_1 \bar{r}(x(l_\nu))}{\theta} - \varepsilon \sum_{l_\nu \leq \tau_j \leq l_{\nu+1}} \bar{r}(x(l_\nu)) \right\| \leq$$
$$\leq \Delta_1\mu_2 + \| r(x(l_\nu)) \| \sum_{l_\nu \leq \tau_j < l_{\nu+1}} \left| \frac{\bar{\tau}_j}{\theta} - \varepsilon \right| \leq \Delta_1\mu_2 + 2\tilde{\sigma}_1\Delta_1\mu_1.$$

Згідно з умовою Ліпшиця і нерівністю (22)

$$S_2^{(\nu)} \leq \frac{2\Delta_1}{\theta_1}(\sigma_1 + \tilde{\sigma}_1)\left\| x(\tau_j) - x(l_\nu) \right\| \leq \frac{2\Delta_1^2}{\theta_1}\sigma_1(\sigma_1 + \tilde{\sigma}_1)(1 + 1/\theta_1).$$

Враховуючи, що кількість складових відрізків проміжку $[0, \tau]$ при $\tau \geq \varepsilon T_0$ не більша $1/\Delta_1$, з оцінки (24) отримуємо

$$D_1 \leq \sigma_{10}(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2)$$

із сталою $\sigma_{10} = (\sigma_1 + \tilde{\sigma}_1)\left(j_1 + \frac{2T_0\sigma_1}{\theta_1}(1 + 1/\theta_1)\right) + 2\tilde{\sigma}_1 + 1$.

Оцінка доданка D_2 збігається з встановленою в теоремі 1 оцінкою при заміні в ній сталої σ_1 на сталу $\tilde{\sigma}_1$. Доданок D_3 з нерівності (12) збігається з D_3, означеним тут, тому нерівність (11) очевидним чином встановлюється. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай виконуються всі умови теореми* 1 *або теореми* 2 *при* $\tau \in [0, \infty) = R_+$, $\left\|\left(W_l^*(\tau)W_l(\tau)\right)^{-1} W_l^*(\tau)\right\| \leq \sigma_1$, $\|\dot{\omega}(\tau)\| \leq \sigma_1$, *а функції* $\omega^{(\nu)}(\tau)$, $\nu = \overline{0, l}$, *рівномірно неперервні на* R_+.

Тоді для довільного $\mu > 0$ *можна вказати таку не залежну від* μ *і* $t \in R_+$ *сталу* $\sigma_{11} = \sigma_{11}(L)$, *що при досить малому* $\varepsilon_0(\mu) > 0$ *для кожних* $\tau \in [t, t + L]$, $y \in \mathcal{D}_1$, $\psi \in R^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$\| U(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq \sigma_{11}\mu.$$

Додаткові обмеження на частоти в наслідку обумовлені умовами, що накладаються для виконання рівномірної оцінки осциляційних інтеграла [6] та суми [7]

$$\left|\int_t^{t+\tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{\varepsilon}(k, \omega(z))\,dz\right\}d\xi\right| \leq \sigma_{12}\,\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\|k\|^{-\frac{1}{l+1}},$$

$$\left|\varepsilon \sum_{t \leq \tau_j < t+\tau} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{\tau}}^{\tau_j}(k, \omega(z))\,dz\right\}\right| \leq \overline{\sigma}_{12}\|k\|\mu.$$

Тут $\bar{\tau} \geq t$, $\tau \in [0, L]$, а сталі σ_{12}, $\overline{\sigma}_{12}$ не залежать від t, $\bar{\tau}$, k, ε, μ, але залежать від L.

У наступному твердженні через $K_\alpha(z)$ позначено кулю в R^n радіуса α з центром у точці z, а для його доведення використано схему, запропоновану в [3] при доведенні теореми 4.2.

Теорема 3. *Нехай*:

1) *виконуються всі умови наслідку*;

2) *існує рівномірно асимптотично стійкий розв'язок* $\bar{x} = \xi(\tau)$ *рівнянь*

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \overline{a}(\bar{x}, \tau) + \frac{1}{\theta}\overline{p}(\bar{x}), \tag{25}$$

який міститься в $\mathcal{D}$ *разом із своїм* ρ*-околом при* $\tau \in R_+$.

Тоді:

а) *існують таке досить мале* $\varepsilon_0(\rho)$ *і* $\alpha < \rho$, *що для всіх* $\tau \in R_+$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varphi_0 \in R^m$ *і* $x_0 \in K_\alpha(\xi(0))$ *повільні змінні* $x(\tau, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$ *кожного розв'язку* $(x(\tau, x_0, \varphi_0, \varepsilon); \varphi(\tau, x_0, \varphi_0, \varepsilon))$ *системи* (1) *рівномірно обмежені*;

б) *для довільного* $\eta \in (0, \alpha)$ *існує* $\varepsilon_1(\eta) > 0$ *таке, що для всіх* $\tau \in R_+$, $\varphi_0 \in R^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *виконується нерівність*

$$\| x(\tau, \xi(0), \varphi_0, \varepsilon) - \xi(\tau)\| < \eta. \tag{26}$$

Доведення. Позначимо через $(x_\tau(\tau, x^*, \varphi^*, \varepsilon), \varphi_\tau(\tau, x^*, \varphi^*, \varepsilon))$ розв'язок системи (1), який у момент часу $\tau = t$ набуває значення (x^*, φ^*), а через $\left(\overline{x}_\tau(t, x^*), \overline{\varphi}_\tau(t, x^*, \varphi^*, \varepsilon)\right)$ розв'язок системи (8), який при $\tau = t$ набуває такого ж значення. Оскільки розв'язок $\xi(\tau)$ системи (25) рівномірно асимптотично стійкий, то для числа $\frac{1}{2}\rho$ існує таке $\alpha > 0$, що $\|\overline{x}_\tau(t, x_0) - \xi(\tau)\| < \frac{1}{2}\rho$ для всіх $\tau \geq t \in$ $\in R_+$ при $\|x_0 - \xi(\tau)\| < \alpha$, і можна вказати таку сталу $L = L(\rho)$, що при $\tau \geq$ $\geq t + L$ справедлива оцінка $\|\overline{x}_\tau(t, x_0) - \xi(\tau)\| \leq \frac{1}{2}\alpha$.

Використовуючи наслідок, маємо, що для $\mu = \dfrac{\alpha}{2\sigma_{11}(L)}$ існує таке ε_0, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\|x_\tau(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq \|x_\tau(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \overline{x}_\tau(0, x_0)\| + \\ + \|\overline{x}_\tau(0, x_0) - \xi(\tau)\| < \sigma_{11}\mu + \frac{1}{2}\rho \leq \rho \qquad \forall \tau \in [0, L), \\ \|x_L(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \xi(L)\| < \sigma_{11}\mu + \frac{1}{2}\alpha \leq \alpha,\end{gathered} \tag{27}$$

тобто точка $x_1 \equiv x_L(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$ знаходиться в α-околі точки $\xi(L)$.

На проміжку $[L, 2L]$, як і на проміжку $[0, L]$, отримуємо

$$\begin{gathered}\|x_\tau(L, x_1, \varphi_1, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq \rho \qquad \forall \tau \in [L, 2L), \\ \|x_{2L}(L, x_1, \varphi_1, \varepsilon) - \xi(2L)\| < \alpha,\end{gathered} \tag{28}$$

де $\varphi_1 \equiv \varphi_L(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$. З нерівностей (27) і (28) знаходимо

$$\|x_\tau(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq \rho \qquad \forall \tau \in [0, 2L),$$

$$\|x_{2L}(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \xi(2L)\| < \alpha.$$

Методом математичної індукції для довільного натурального $\nu \geq 2$ дістаємо, що для всіх $\tau \in [\nu L, (\nu + 1)L)$

$$\|x_\tau(\nu L, x_\nu, \varphi_\nu, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq \rho,$$

де $x_\nu \equiv x_{\nu L}(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$, $\varphi_\nu \equiv \varphi_{\nu L}(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$, а при $\tau = (\nu + 1)L$ маємо

$$\|x_{(\nu+1)L}(\nu L, x_\nu, \varphi_\nu, \varepsilon) - \xi((\nu + 1)L)\| < \alpha.$$

Враховуючи оцінки на попередніх кроках, одержуємо

$$\begin{gathered}\|x_\tau(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq \rho \qquad \forall \tau \in [0, (\nu + 1)L), \\ \|x_{(\nu+1)L}(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon) - \xi((\nu + 1)L)\| < \alpha.\end{gathered} \tag{29}$$

Тому

$$\|x_\tau(0, x_0, \varphi_0, \varepsilon)\| \leq \rho + \sup_{R_+}\|\xi(\tau)\|$$

для всіх $\tau \in R_+$, $\varphi_0 \in R^m$, $x_0 \in K_\alpha(\xi(0))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, тобто функція $x(\tau, x_0, \varphi_0, \varepsilon)$ рівномірно обмежена.

Встановимо тепер оцінку (26). Для цього зафіксуємо довільне $\eta \in (0, \alpha)$. З означення рівномірної асимптотичної стійкості випливає, що для η існують такі сталі $\eta_1 > 0$ і $L_1 = L_1(\eta) > 0$, що із нерівності $\| x_0 - \xi(t) \| < \eta_1$ випливають оцінки

$$\| \bar{x}_\tau(t, x_0) - \xi(\tau) \| < \frac{1}{2}\eta \qquad \forall \tau \geq t,$$

$$\| \bar{x}_\tau(t, x_0) - \xi(\tau) \| < \frac{1}{2}\eta_1 \qquad \forall \tau \geq t + L_1.$$

Якщо в нерівностях (27) – (29) замінити α, ρ, L і x_0 відповідно на η_1, η, L_1 і $\xi(0)$, то отримаємо оцінку (26), в якій ε_1 визначається з наслідку при $\mu = \frac{\eta_1}{\sigma_{11}(L_1)}$. Теорему доведено.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 101 – 117.
3. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
4. *Астафьева М. Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 103 с.
5. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2001. – 131 с.
6. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Оцінки похибки методу усереднення для багаточастотних коливних систем // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 92 – 96.
7. *Сопронюк Т. М.* Асимптотична стійкість розв'язків нелінійної імпульсної системи з малим параметром // Там же. – 2001. – Вип. 111. – С. 113 – 120.

Одержано 27.03.2002