УДК 517.938

О. В. Капустян (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВИПАДКОВІ АТРАКТОРИ ДЛЯ НЕОДНОЗНАЧНО РОЗВ'ЯЗНИХ ДИСИПАТИВНИХ ЗА ЙМОВІРНІСТЮ СИСТЕМ

We prove the theorem on the existence of a random attractor for multivalued random dynamical system dissipative with respect to the probability. Abstract results are used for the analysis of the qualitative behavior of solutions of a system of ordinary differential equations which possesses continuous right-hand sides and is perturbed by a stationary random process. In terms of the Lyapunov function, for an unperturbed system, we present sufficient conditions for the existence of a random attractor.

Доведено теорему про існування випадкового атрактора для багатозначної випадкової динамічної системи, що є дисипативною за ймовірністю. Абстрактні результати застосовано до дослідження якісної поведінки розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь із неперервною правою частиною, збуреної стаціонарним випадковим процесом. У термінах функції Ляпунова для незбуреної системи наведено достатні умови існування випадкового атрактора.

Теорія випадкових динамічних систем [1] дає зручний апарат для вивчення багатьох випадкових і стохастичних рівнянь. Для опису якісної поведінки таких систем у роботах [2 – 4] розвинуто теорію випадкових атракторів — вимірних інваріантних множин, що притягують траєкторії системи в оберненому часі. Аналогічно до детермінованого випадку [5] постає питання про можливість збереження основних результатів теорії випадкових атракторів у випадку неоднозначно розв'язних систем. За умови дисипативності з імовірністю 1 (що фактично означає наявність апріорної оцінки в фазовому просторі) відповідне узагальнення одержано в [6].

У даній роботі розглядається більш широкий клас систем, що є близьким до дисипативних за ймовірністю [7]. Для таких систем доведено теорему про існування та властивості випадкового атрактора, яку застосовано до дослідження якісної поведінки неоднозначно розв'язної автономної системи диференціальних рівнянь, збуреної стаціонарним випадковим процесом.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — сепарабельний банахів простір із борелівською σ-алгеброю $\sigma(X)$, $C(X)$ $(\beta(X))$ — сукупність усіх непорожніх замкнених (непорожніх обмежених) підмножин X, для $A, B \subset X$ $\|A\| := \sup_{a\in A}\|a\|$, $\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|$, $B_\delta(A) = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}$, $B_R = \{x \in X \mid \|x\| \le R\}$, $\overline{A}$ — замикання A в X; $(\Omega, \Phi, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, $\{\theta_t : \Omega \mapsto \Omega\}_{t\in\mathbb{R}}$ — група перетворень Ω така, що $(t, w) \mapsto \theta_t w$ — вимірне і для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ $\theta_t\mathbb{P} = \mathbb{P}$, $\overline{\Phi}$ — лебегове поповнення Φ за мірою $\mathbb{P}$. Наступні означення і властивості багатозначних відображень взято з [8]:

$F : \Omega \mapsto C(X)$ називається вимірним, якщо для довільної відкритої множини $O \subset X$ $\{w \in \Omega \mid F(w) \cap O \neq \varnothing\} \in \Phi$;

F — вимірне $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $w \mapsto \operatorname{dist}(x, F(w))$ — вимірне $\Leftrightarrow$ існують вимірні $\{f_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$ такі, що $F(w) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(w)}$;

якщо F — вимірне, то $w \mapsto \|F(w)\|$ — $\overline{\Phi}$-вимірне відображення;

якщо $G \in \overline{\Phi} \times \sigma(X)$, то $\pi_\Omega G := \{w \in \Omega \mid \exists x \in X,\ (w, x) \in G\} \in \overline{\Phi}$.

Означення 1. *Багатозначне відображення* $G : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \mapsto C(X)$ *називається багатозначною випадковою динамічною системою (БВДС), якщо:*

1) *для будь якого* $x \in X$ $(t, w) \mapsto G(t, w)x$ — *вимірне для всіх* w *з вимірної* $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$*-інваріантної множини повної міри;*

2) *для-будь якого* $t \in \mathbb{R}_+$ $x \mapsto G(t, w)x$ — *напівнеперервне зверху* (*н. н. зв.*), *компактнозначне;*

3) $\forall\, t, s \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$ $G(0, w)x = x$, $G(t+s, w)x \subset G(t, \theta_s w)G(s, w)x$.

Надалі множину тих w, для яких виконується означення 1, будемо теж позначати через Ω.

Вимірне відображення $F\colon \Omega \mapsto C(X)$ будемо називати вимірною множиною $F(w)$.

Означення 2. *Вимірна множина* $A(w)$ *називається випадковим атрактором БВДС* G, *якщо для майже всіх* $w \in \Omega$:

1) $A(\theta_t w) \subset G(t, w)A(w)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ (*напівінваріантність*);

2) $\forall\, B \in \beta(X)$ $\operatorname{dist}(G(t, \theta_{-t}w)B, A(w)) \to 0$, $t \to +\infty$ (*притягання*);

3) $A(w)$ — *компакт в* X.

Щодо БВДС будемо вважати виконаними наступні умови:

G_1) для будь-якого $B \in \beta(X)$ $(t, w) \mapsto \overline{G(t, w)B}$ — вимірне;

G_2) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, R = R(\varepsilon)$ $\forall\, B \in \beta(X)$ $\exists\, T = T(B, R, \varepsilon)$ $\mathbb{P}\left\{ \sup\limits_{t \geq T} \| G(t, \theta_{-t}w)B \| > R \right\} < \varepsilon$.

З умови G_1) випливає, що відображення $(t, w) \mapsto \overline{G(t, \theta_{-t}w)B}$ є вимірним. Дійсно, для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $K_1 = \{ (t, \xi) \mid \operatorname{dist}(x, G(t, \xi)B) < a \}$ є вимірною. Тоді, оскільки відображення $\upsilon\colon (t, w) \mapsto (t, \theta_{-t}w)$ є вимірним, множина $K_2 = \upsilon^{-1}(K_1) = \{ (t, w) \mid \xi = \theta_{-t}w,\ (t, \xi) \in K_1 \}$ є вимірною, але $K_2 = \{(t, w) \mid \operatorname{dist}(x, G(t, \theta_{-t}w)B) < a \}$, звідки маємо шукане. Далі, оскільки

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{t \geq T} G(t, \theta_{-t}w)B \right) = \inf_{t \geq T} \operatorname{dist}(x, G(t, \theta_{-t}w)B)$$

і

$$\left\{ w \mid \inf_{t \geq T} \operatorname{dist}(x, G(t, \theta_{-t}w)B) < a \right\} = \pi_\Omega \{ (t, w) \mid \operatorname{dist}(x, G(t, \theta_{-t}w)B) < a,\ t \geq T \},$$

то відображення

$$w \mapsto \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{t \geq T} G(t, \theta_{-t}w)B \right)$$

є $\overline{\Phi}$-вимірним. Звідси випливає, що відображення $w \mapsto \sup_{t \geq T} \| G(t, \theta_{-t}w)B \|$ є $\overline{\Phi}$-вимірним. Отже, за умови G_1) умова G_2) означена коректно.

Те, що умову G_2) задовольняють дисипативні з імовірністю 1 системи, стверджує наступна лема.

Лема 1. *Якщо для БВДС* G *виконується умова* G_1) *та існує обмежена вимірна множина* $B(w)$ *така, що для майже всіх* $w \in \Omega$ *і для будь-якого* $B \in \beta(X)$ *існує* $T = T(B, w)$ *таке, що* $\forall\, t \geq T$ $G(t, \theta_{-t}w)B \subset B(w)$, *то виконується умова* G_2).

Доведення. Нехай умова G_2) не має місця, тобто $\exists\, \varepsilon^* > 0$ $\forall\, R$ $\exists\, B \in \beta(X)$ $\forall\, T$: $\mathbb{P}\{ \sup_{t \geq T} \| G(t, \theta_{-t}w)B \| \geq R \} \geq \varepsilon^*$. Оскільки $w \mapsto \| B(w) \|$ — $\overline{\Phi}$-вимірна, майже скрізь скінченна, то $\mathbb{P}\{ \| B(w) \| > R \} \to 0$, $R \to \infty$. Тоді існує R таке, що $\mathbb{P}\{ \| B(w) \| > R \} < \varepsilon^*/2$. Виберемо B по R. Оскільки для $K_N :=$

$:= \left\{ w \mid \sup\limits_{t\geq N} \| G(t, \theta_{-t}w)B \| > R \right\}$ $\mathbb{P}\{ K_N \} \geq \varepsilon^*$, $K_{N+1} \subset K_N$ $\forall N \geq 1$, то для $K =$ $= \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N$

$$\mathbb{P}\{ K \} = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\{ K_N \} \geq \varepsilon^* \quad \text{і} \quad K \subset \{ w \mid \| B(w) \| > R \},$$

отже, $\mathbb{P}\{ K \} < \varepsilon^*/2$, що приводить до суперечності.

Лему доведено.

Для довільної $B \in \beta(X)$ розглянемо наступні множини:

$$\Lambda_B(w) := \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} G(t, \theta_{-t}w)B}, \quad A(w) := \overline{\bigcup_{B\in\beta(X)} \Lambda_B(w)} = \overline{\bigcup_{M=1}^{\infty} \Lambda_{B_M}(w)}.$$

Із роботи [5] маємо, що $\Lambda_B(w)$ є множиною границь всіх збіжних послідовностей $\{\xi_n\}$, де $\xi_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}w)B$, $t_n \nearrow \infty$.

Лема 2. *Нехай для БВДС* G *виконуються умови* G_1), G_2) *і для будь-яких* $w \in \Omega$, $t > 0$ *і* $R > 0$ $G(t, w)B_R$ — *передкомпакт в* X. *Тоді для майже всіх* $w \in \Omega$ $\Lambda_B(w) \neq \varnothing$, *притягує* B *і є компактною напівінваріантною множиною, тобто* $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\Lambda_B(\theta_t w) \subset G(t, w)\Lambda_B(w)$.

***Зауваження* 1.** Якщо $\dim X < \infty$, то умова передкомпактності $G(t, w)B_R$ випливає з п. 2 означення 1.

Доведення. Для довільного $w \in \Omega$ $G(t, \theta_{-t}w)B \subset G(1, \theta_{-1}w)G(t-1, \theta_{-(t-1)}\theta_{-1}w)B$. Позначимо

$$\Omega(N, R, B) := \left\{ w \mid \sup_{t\geq N} \left\| G(t-1, \theta_{-(t-1)}\theta_{-1}w)B \right\| \leq R \right\}.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $R = R(\varepsilon)$ і $N = N(B, R, \varepsilon)$ такі, що $\mathbb{P}\{ \Omega(N, R, B) \} \geq 1 - \varepsilon$, $\Omega(N, R, B) \subset \Omega(N+1, R, B)$. Отже, $\forall w \in \Omega(N, R, B)$ $\forall t \geq N$ $G(t, \theta_{-t}w)B \subset G(1, \theta_{-1}w)B_R$, тобто $\Lambda_B(w) \neq \varnothing$ і є компактом. Звідси для будь-якого $w \in \Omega(R, B) := \bigcup_{N=N(B,R,\varepsilon)}^{\infty} \Omega(N, R, B)$ $\Lambda_B(w) \neq \varnothing$, є компактом і $\mathbb{P}\{ \Omega(R, B) \} \geq 1 - \varepsilon$. Оскільки $\Omega(R, B) \subset \Omega(R+1, B)$, то, взявши $\varepsilon_i \to 0$ і відповідні $R_i = R(\varepsilon_i) \nearrow \infty$, для будь-якого $w \in \Omega(B) := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega(R_i, B)$ будемо мати $\Lambda_B(w) \neq \varnothing$, є компактом і $\mathbb{P}\{ \Omega(B) \} = 1$.

Доведемо для $w \in \Omega(B)$ властивості напівінваріантності та притягання. Оскільки для будь-якого $w \in \Omega(B)$ існують R і N такі, що $w \in \Omega(N, R, B)$, то для довільних $\{ t_n \}$, $t_n \nearrow \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$, маємо $G\left(t_n + t, \theta_{-(t_n+t)}\theta_t w\right)B \subset G(t, w)\, G\left(t_n, \theta_{-t_n}w\right)B \subset G(t, w)\, \overline{G(1, \theta_{-1}w)B_R}$, починаючи з деякого n. Звідси $\Lambda_B(\theta_t w) \neq \varnothing$. Далі, для будь-якого $y \in \Lambda(\theta_t w)$ існує $\{ t_n \}$ така, що $y = \lim y_n$, $y_n \in G\left(t_n + t, \theta_{-(t_n+t)}\theta_t w\right)B$. Тоді існують $\eta_n \in G\left(t_n, \theta_{-t_n}w\right)B$ такі, що $y_n \in G(t, w)\eta_n$, і внаслідок замкненості відображення $x \mapsto G(t, w)x$ і компактності множини $\overline{G(1, \theta_{-1}w)B_R}$ існують $\eta = \lim \eta_n \in \Lambda_B(w)$ і $y \in G(t, w)\eta \subset G(t, w)\Lambda_B(w)$, що і доводить напівінваріантність.

Нехай для деякого $w \in \Omega(B)$ $\Lambda_B(w)$ не притягує B. Тоді існують $\delta > 0$, $\{ t_n \}$, $t_n \nearrow \infty$, такі, що $\operatorname{dist}\left(G\left(t_n, \theta_{-t_n}w\right)B, \Lambda_B(w)\right) \geq \delta > 0$. Отже, існують $\xi_n \in G\left(t_n, \theta_{-t_n}w\right)B$ такі, що $\operatorname{dist}(\xi_n, \Lambda_B(w)) \geq \delta$. Але аналогічно до попередніх міркувань $\{\xi_n\}$ — передкомпактна, отже, існує $\xi = \lim \xi_n \in \Lambda_B(w)$, що приводить до суперечності.

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай для БВДС G виконуються умови* G_1), G_2) *і для будь-яких $t>0$, $R>0$ і $w \in \Omega$ $G(t,w)B_R$ — передкомпакт в X. Тоді $A(w)$ є випадковим атрактором для G, причому єдиним, мінімальним серед замкнених притягуючих множин і максимальним серед компактних вимірних напівінваріантних множин.*

Доведення. Доведемо, що $A(w) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{B_n}(w)}$ є компактом майже скрізь. Для кожної B_n розглянемо $\Omega(B_n)$ з леми 2. Оскільки $\Omega(B_{n+1}) \subset \Omega(B_n)$, то множина $\Omega_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(B_n)$ має повну міру і для будь-яких $w \in \Omega_0$ і $n \geq 1$ $\Lambda_{B_n}(w)$ задовольняє лему 2. Розглянемо $\Omega_0(R, B_n) := \Omega_0 \cap \Omega(R, B_n)$, де $\Omega(R, B_n)$ визначено в лемі 2. Тоді $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, R = R(\varepsilon)\ \forall\, n \geq 1$ $\mathbb{P}\{\Omega_0(R, B_n)\} \geq 1 - \varepsilon$, $\Omega_0(R, B_{n+1}) \subset \Omega_0(R, B_n)$ і $\forall\, w \in \Omega_0(R, B_n)$ $\Lambda_{B_n}(w) \subset \overline{G(1, \theta_{-1}w)B_R}$. Далі, для $\Omega_0(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_0(R, B_n)$ маємо $\mathbb{P}\{\Omega_0(R)\} \geq 1 - \varepsilon$ і $\forall\, w \in \Omega_0(R)$ $A(w) \subset \subset \overline{G(1, \theta_{-1}w)B_R}$, тобто $A(w)$ — компакт. Візьмемо $\varepsilon_i \to 0$, $R_i = R(\varepsilon_i) \nearrow \infty$. Оскільки $\Omega_0(R_i) \subset \Omega_0(R_{i+1})$, то для будь-якого $w \in \Omega^0 := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_0(R_i)$ $A(w)$ — компакт і $\mathbb{P}\left\{\Omega^0\right\} = 1$.

Надалі все будемо розглядати на множині Ω^0. Властивість притягання випливає безпосередньо з леми 2. Далі, $A(\theta_t w) \subset \overline{\bigcup_{B \in \beta(X)} G(t,w)\Lambda_B(w)} \subset \subset \overline{G(t,w)\overline{\bigcup_{B \in \beta(X)} \Lambda_B(w)}} = \overline{G(t,w)A(w)} = G(t,w)A(w)$, де остання рівність отримується завдяки компактності $A(w)$ і н. н. зв. $x \mapsto G(t,w)x$ [8]. Вимірність відносно σ-алгебри Φ атрактора $A(w)$ випливає з $\overline{\Phi}$-вимірності $A(w) = = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\tau_m \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau_m} G(t, \theta_{-t}w)B_n}}$ і того факту, що для компактної $\overline{\Phi}$-вимірної множини $A(w)$ існує компактна Φ-вимірна множина $\tilde{A}(w)$, що збігається з $A(w)$ майже скрізь [3].

Для доведення єдиності скористаємось міркуваннями з [3]. Нехай $E(w)$ — напівінваріантна компактна множина і для детермінованої $B \in \beta(X)$ означимо $F = \{w \,|\, E(w) \subset B\}$. Тоді для $F_\infty = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \theta_n F = \{w \,|\, \theta_{-n} w \in F$ нескінченно часто$\}$ за рекурентною теоремою Пуанкаре маємо $\mathbb{P}\{F_\infty\} \geq \mathbb{P}\{F\}$. Тепер якщо $w \in F_\infty$, то $E(\theta_{-n}w) \subset B$ для нескінченно багатьох $n \in \mathbb{N}$ і внаслідок напівінваріантності $E(w) \subset G(n, \theta_{-n}w)\, E(\theta_{-n}w) \subset G(n, \theta_{-n}w)B$, тобто $E(w) \subset \subset \Lambda_B(w)$. Таким чином, $\mathbb{P}\{E(w) \subset \Lambda_B(w)\} \geq \mathbb{P}\{E(w) \subset B\}$. З іншого боку, згідно з [3], для компактної вимірної множини $E(w)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує детермінована компактна множина $K_\varepsilon \subset X$ така, що $\mathbb{P}\{E(w) \subset K_\varepsilon\} > 1 - - \varepsilon$. Таким чином, $\mathbb{P}\{E(w) \subset A(w)\} \geq \mathbb{P}\left\{E(w) \subset \Lambda_{K_\varepsilon}(w)\right\} > 1 - \varepsilon$, звідки $\mathbb{P}\{E(w) \subset A(w)\} = 1$. Отже, випадковий атрактор є єдиним і максимальним серед напівінваріантних компактних вимірних множин.

Тепер нехай $K(w)$ — замкнена притягуюча множина. Доведемо, що для будь-яких $B \in \beta(X)$ і $w \in \Omega^0$ $\Lambda_B(w) \subset K(w)$. Нехай це не так. Тоді існують $w \in \Omega^0$, $y \in \Lambda_B(w)$, $\delta > 0$ такі, що $\operatorname{dist}(y, K(w)) > \delta$. З іншого боку, існують $t_n \nearrow \infty$, $y_n \in G(t_n, \theta_{-t_n}w)B$ такі, що $y = \lim y_n$. Внаслідок властивості притягання існує $n(w)$ таке, що для будь-якого $n \geq n(w)$ $\operatorname{dist}(y_n, K(w)) < \delta/2$, що приводить до суперечності.

Теорему доведено.

Зауваження 2. З аналізу доведення теореми 1 легко бачити, що виконання умов G_1), G_2) досить вимагати для $B = B_R$ $\forall R > 0$.

Як приклад розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \sigma(x)\xi(\theta_t w),$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ — вимірна, $\mathbb{E}\|\xi\| < \infty$. Тоді згідно з [1] ті $w \in \Omega$, для яких відображення $t \mapsto \xi(\theta_t w)$ є локально інтегровним на $\mathbb{R}$, утворюють θ_t-інваріантну множину повної міри, яку теж будемо позначати Ω. Також будемо вважати, що $F \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\sigma = ((\sigma_{ij}))$, $\sigma_{ij} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$. За цих умов для будь-якого $w \in \Omega$ існує (локально) принаймні один розв'язок $x(t, w)x_0$ системи (1).

Поряд із задачею (1) при тих же умовах будемо розглядати систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x),$$
$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Для задачі (2) існує (локально) принаймні один розв'язок $x(t, x_0)$.

Будемо говорити, що гладка функція $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ належить класу $\mathbb{C}_0$, якщо $\|V_x\| \le K$. Із роботи [7] маємо, що для $V \in \mathbb{C}_0$ для майже всіх $t > 0$

$$\frac{dV(x(t, w)x_0)}{dt} \le \frac{dV(x(t, x_0))}{dt} + K\|\sigma(x(t, w)x_0)\|\|\xi(\theta_t w)\|.$$

Теорема 2. *Нехай існує невід'ємна функція* $V \in \mathbb{C}_0$ *така, що*:

1) $V_R := \inf\limits_{\|x\|>R} V(x) \to \infty$ *при* $R \to \infty$;

2) *існують константи* $c_1, c_2 > 0$ *такі, що* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(V_x(x), F(x)) \le -c_1 V(x) + c_2$ *і виконується одна з наступних умов*:

3) $\exists\, c_3 > 0$ $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|\sigma(x)\| \le c_3$;

4) $\exists\, c_4 > 0$ $\|\sigma(x)\| \le c_4 V + c_3$, $\mathbb{E}\|\xi\| < c_1 / K c_4$, $\|\xi(\theta_t w)\|$ *задовольняє посилений закон великих чисел (зокрема, якщо* θ_t *— ергодична)*;

5) *виконуються умови п. 4 з* $c_3 = c_2 = 0$, *але замість виконання посиленого закону великих чисел вимагається, щоб* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, T > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \ge T} \frac{1}{t} \int_0^t \|\xi(\theta_s w)\| ds < \frac{c_1}{K c_4} \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Тоді всі розв'язки (1) *існують для будь-якого* $t \ge 0$, *і якщо відображення* $G(t, w)x_0 := \{ x(t, w)x_0 \}$ *задовольняє умову* G_1), *то* G *є БВДС, для якої існує випадковий атрактор* $A(w)$.

Доведення. При виконанні пп. 1, 2 теореми 2 з [7] випливає, що для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $x(t, w)x_0$ існує для будь-якого $t \ge 0$. Отже, відображення G означене коректно і на підставі результатів [9] задовольняє п. 2 означення 1. Доведемо п. 1 цього означення. Для довільного $y \in G(t + s, w)x_0$ існує $x(p, w)x_0$ — розв'язок (1) такий, що $y = x(t + s, w)x_0$. Тоді легко показати, що

$$x(t+s, w)x_0 = x(s, w)x_0 + \int_0^t F(x(p+s, w)x_0)\,dp \; +$$

$$+ \int_0^t \sigma(x(p+s, w)x_0)\xi(\theta_s\theta_p w)\,dp.$$

Покладаючи $\forall\, p \geq 0$ $\psi(p, \theta_s w) := x(p+s, w)x_0$, маємо $y = \psi(t, \theta_s w) \in G(t, \theta_s w)G(s, w)x_0$.

Умова 1 означення 1 безпосередньо випливає з умови G_1). Отже, при виконанні умови G_1) відображення G утворює БВДС. Деякі міркування щодо перевірки умови G_1) містяться в лемах 3, 4. Таким чином, для застосування теореми 1 залишилось перевірити умову G_2) при кожній з умов 3 – 5. При цьому використаємо факт, що випливає з [9]: для довільних $T_2 > T_1 \geq 0$ і замкненої кулі $B \in \beta(\mathbb{R}^n)$ множина $G(\cdot, \theta_{-\cdot} w)B$ є компактом в $C\big([T_1, T_2]; \mathbb{R}^n\big)$. Тоді при виконанні умови G_1) існують момент часу $t(w) \in [T_1, T_2]$, точка $x_0(w) \in B$ і розв'язок $x(t, \theta_{-t} w)x_0(w)$ такі, що

$$\sup_{t \in [T_1, T_2]} \|G(t, \theta_{-t}w)B\| = \big\|x\big(t(w), \theta_{t(w)}w\big)x_0(w)\big\|$$

і є $\overline{\Phi}$-вимірною функцією.

За умови 3 стандартно маємо оцінки

$$\frac{dV(x(t, w)x_0)}{dt} \leq -c_1 V(x(t, w)x_0) + c_2 + Kc_3\|\xi(\theta_t w)\|,$$

$$V(x(t, \theta_{-t} w)x_0) \leq V(x_0)e^{-c_1 t} + \int_{-\infty}^0 e^{c_1 p}\big(c_2 + Kc_3\big\|\xi(\theta_p w)\big\|\big)\,dp, \tag{3}$$

де останній інтеграл є вимірною, невід'ємною, майже скрізь скінченною функцією $r(w)$ і

$$\mathbb{E}r(w) \leq r_0 := \int_{-\infty}^0 e^{c_1 p}(c_2 + Kc_3\,\mathbb{E}\|\xi\|)\,dp < \infty.$$

Нехай

$$\sup_{t \in [T, T+N]} \|G(t, \theta_{-t}w)B\| = \big\|x\big(t(w), \theta_{-t(w)}w\big)x_0(w)\big\|.$$

Тоді з (3) отримуємо $\mathbb{E}V\big(x\big(t(w), \theta_{-t(w)}w\big)x_0(w)\big) \leq V(B)e^{-c_1 T} + r_0$. Звідси аналогічно [7] маємо оцінку

$$\mathbb{P}\big\{\big\|x\big(t(w), \theta_{-t(w)}w\big)x_0(w)\big\| \geq R\big\} \leq \frac{V(B)e^{-c_1 T} + r_0}{V_R}.$$

Для $A(N) := \left\{ w \,\middle|\, \sup_{t \in [T, T+N]} \|G(t, \theta_{-t}w)B\| \geq R \right\}$

$$A(N) \subset A(N+1),$$

отже,

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{N=1}^{\infty} A(N)\right\} \doteq \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq T}\| G(t, \theta_{-t}w)B\| \geq R\right\} \leq \frac{V(B)e^{-c_1 T} + r_0}{V_R},$$

що і доводить умову G_2).

За умови 4 маємо оцінки

$$\frac{dV(x(t, w)x_0)}{dt} \leq (-c_1 + Kc_4\|\xi(\theta_t w)\|)\, V(x(t, w)x_0) + c_2 + Kc_3\|\xi(\theta_t w)\|,$$

$$V(x(t, \theta_{-t}w)x_0) \leq V(x_0)\exp\left\{\left(\frac{1}{t}\int_{-t}^{0}\|\xi(\theta_s w)\|ds - \frac{c_1}{Kc_4}\right)Kc_4 t\right\} +$$

$$+ \int_{-t}^{0} \exp\left\{\left(\frac{1}{s}\int_{s}^{0}\|\xi(\theta_p w)\|dp - \frac{c_1}{Kc_4}\right)Kc_4 s\right\}(c_2 + Kc_3\|\xi(\theta_s w)\|)\,ds. \qquad (4)$$

На підставі посиленого закону великих чисел

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{0}\|\xi(\theta_s w)\|ds \to \mathbb{E}\|\xi\|$$

при $t \to \infty$ майже скрізь. У цьому випадку зручно діяти за схемою, запропонованою в [4]. З оцінки (4) для майже всіх $w \in \Omega$ $\exists\, T(B, w)$ $\forall\, t \geq T(B, w)$ $V(x(t, \theta_{-t}w)x_0) \leq 1 + r(w)$, де

$$r(w) = \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{\int_{s}^{0}\left(Kc_4\|\xi(\theta_p w)\| - c_1\right)dp\right\}(c_2 + Kc_3\|\xi(\theta_s w)\|)\,ds$$

— вимірна, майже скрізь скінченна функція. На підставі умови 1 прообраз V^{-1} будь-якої обмеженої множини є обмеженою множиною, отже, $\forall\, t \geq T(B, w)$ $G(t, \theta_{-t}w)B \subset \overline{V^{-1}([0, 1 + r(w)])} := B(w)$ — обмежена для майже всіх $w \in \Omega$. Доведемо, що $B(w)$ — вимірна. Дійсно, для довільної відкритої множини $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$\{w \mid B(w) \cap Q = \varnothing\} = \{w \mid [0, 1 + r(w)] \cap V(Q) = \varnothing\} =$$
$$= \{w \mid 1 + r(w) \leq \inf V(Q)\} \in \Phi.$$

Звідси умова G_2) випливає з леми 1.

Перед аналізом умови 5 зауважимо, що якщо $\|\xi(\theta_t w)\|$ задовольняє посилений закон великих чисел і $\mathbb{E}\|\xi\| < D$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, T > 0 \;\; \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq T}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\|\xi(\theta_s w)\|ds < D\right\} > 1 - \varepsilon,$$

але не навпаки. Дійсно, міркуючи від супротивного, для множини

$$A(N) := \left\{w \,\middle|\, \sup_{t\geq N}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\|\xi(\theta_s w)\|ds \geq D\right\} \quad \forall\, N \geq 1$$

маємо $A(N+1) \subset A(N)$, $\mathbb{P}\{A(N)\} \geq \varepsilon^* > 0$. Тоді для $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} A(N)$ отримуємо

$$\mathbb{P}\{A\} \geq \varepsilon^*, \quad A = \left\{ w \,\middle|\, \exists \{t_n(w)\},\ \frac{1}{t_n(w)} \int\limits_0^{t_n(w)} \|\xi(\theta_s w)\| ds \geq D \right\}.$$

Але внаслідок посиленого закону великих чисел для майже всіх $w \in \Omega$ $\exists T$
$\forall\, t \geq T(w)$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\xi(\theta_s w)\| ds < D,$$

що і приводить до суперечності. Тепер нехай $\theta_t w = w$, $\xi(w)$ з імовірністю
набуває значень 1 і 2. Тоді $\mathbb{E}\xi = 3/2 < 3$, $\mathbb{P}\{\xi(w) < 3\} = 1$, проте $\xi(\theta_t w)$ не
довольняє закон великих чисел.

З умови 5 маємо оцінку

$$V(x(t, \theta_{-t} w)x_0) \leq V(x_0)\exp\left\{\left(\frac{1}{t}\int\limits_{-t}^0 \|\xi(\theta_s w)\| ds - \frac{c_1}{Kc_4}\right) Kc_4 t\right\}.$$

Вибираючи $x\big(t(w), \theta_{-t(w)} w\big)x_0(w)$ аналогічно випадку 3, маємо

$$\mathbb{P}\left\{ V\big(x\big(t(w), \theta_{-t(w)} w\big)x_0(w)\big) > V_R \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{ \frac{1}{t(w)} \int\limits_{-t(w)}^0 \|\xi(\theta_s w)\| ds - \frac{c_1}{Kc_4} > \frac{1}{t(w)}\frac{1}{Kc_4}\ln\frac{V_R}{V(B)} \right\}.$$

З умови 5 випливає

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, T > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \geq T} \frac{1}{t}\int\limits_{-t}^0 \|\xi(\theta_s w)\| ds - \frac{c_1}{Kc_4} > -\delta \right\} < \varepsilon.$$

Тепер за заданими R, B виберемо $T = T(R, B) > 0$ так, щоб

$$\frac{1}{T}\frac{1}{Kc_4}\ln\frac{V_R}{V(B)} > -\delta.$$

Тоді

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{1}{t(w)} \int\limits_{-t(w)}^0 \|\xi(\theta_s w)\| ds - \frac{c_1}{Kc_4} > \frac{1}{t(w)}\frac{1}{Kc_4}\ln\frac{V_R}{V(B)} \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \geq T} \frac{1}{t}\int\limits_{-t}^0 \|\xi(\theta_s w)\| ds - \frac{c_1}{Kc_4} > \frac{1}{T}\frac{1}{Kc_4}\ln\frac{V_R}{V(B)} \right\} < \varepsilon,$$

отже,

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \in [T, T+N]} \|G(t, \theta_{-t} w)B\| \geq R \right\} < \varepsilon.$$

Тоді аналогічно міркуванням у випадку 3 отримуємо умову G_2).

Теорему доведено.

Лема 3. *Якщо для довільного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задача* (1) *має єдиний розв'язок, існує для будь-якого $t \geq 0$, то виконується умова* G_1).

Доведення. За умовами леми $G(t, w)x_0 = x(t, w)x_0$ — однозначне відображення, причому внаслідок побудови вимірне по (t, w), неперервне по x_0 і компактнозначне. Для довільної $B \in \beta(\mathbb{R}^n)$ внаслідок сепарабельності $\mathbb{R}^n$ існує $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — скрізь щільна в B, що і доводить вимірність $(t, w) \mapsto G(t, w)B$.

Лему доведено.

Лема 4. *Якщо розмірність простору* $n = 1$, *будь-який розв'язок задачі* (1) *існує для* $t \geq 0$ *і функції* F, σ *є монотонно неспадними, то виконується умова* G_1).

Доведення. Згідно з [9] відображення $x_0 \mapsto G(t, w)x_0$ — н. н. зв. компактнозначне. Більш того, для будь-якого $T > 0$ існують розв'язки $x_1(t, w)x_0$, $x_2(t, w)x_0$ задачі (1) такі, що $\forall t \in [0, T]$ $G(t, w)x_0 = [x_1(t, w)x_0, x_2(t, w)x_0]$ (мінімальний і максимальний розв'язки, що виходять з точки x_0). Доведемо вимірність по (t, w) розв'язків $x_1(t, w)x_0$, $x_2(t, w)x_0$. Беручи вимірні по (t, w) розв'язки $\varphi_n^+(t, w)$, $\varphi_n^-(t, w)$ рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi) + \sigma(\varphi)\xi(\theta_t w),$$

що задовольняють початкові умови $\varphi_n^+(0, w) = x_0 + 1/n$, $\varphi_n^-(0, w) = x_0 - 1/n$, внаслідок монотонності F, σ легко отримуємо $x_1(t, w)x_0 = \sup_{n\geq 1} \varphi_n^-(t, w)$, $x_2(t, w)x_0 = \inf_{n\geq 1} \varphi_n^+(t, w)$, що і доводить вимірність $x_1(t, w)x_0$, $x_2(t, w)x_0$. Тоді з [8] маємо вимірність відображення $(t, w) \mapsto G(t, w)x_0$. Згідно з зауваженням 2 в умові G_1) досить розглядати $B = B_R$, отже, при $n = 1$ досить встановити вимірність відображення $(t, w) \mapsto G(t, w)[r_1, r_2]$. Із результатів роботи [9] випливає $G(t, w)[r_1, r_2] = [x_1(t, w)r_1, x_2(t, w)r_2]$, де $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ — мінімальний та максимальний розв'язки, що виходять з точок r_1 та r_2 відповідно. На підставі попередніх міркувань це вимірні по (t, w) функції, що і доводить умову G_2).

Лему доведено.

1. *Arnold L.* Random dynamical systems. – Berlin: Springer, 1998. – 581 p.
2. *Crauel H., Flandoli F.* Attractors for random dynamical systems // Probab. Theory Related Fields. – 1994. – **100**. – P. 365 – 393.
3. *Crauel H.* Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets // Ann. mat. pura ed appl. – 1999. – **126**, № 4. – P. 57 – 72.
4. *Schenk-Hoppe K. R.* Random attractors — general properties, existence and applications to stochastic bifurcation theory // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 1998. – **4**, № 1. – P. 99 – 130.
5. *Капустян А. В., Мельник В. С.* Аттракторы многозначных полудинамических систем и их аппроксимации // Допов. НАН України. – 1998. – № 10. – С. 21 – 25.
6. *Caraballo T., Langa J. A., Valero J.* Global attractors for multivalued random dynamical systems // Nonlinear Analysis. – 2002. – **48**. – P. 805 – 829.
7. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
8. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhauser, 1990. – 457 p.
9. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

Одержано 13.03.2003