УДК 517.53

А. П. Голуб (Ін-т математики НАН України, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА БАГАТОТОЧКОВІ АПРОКСИМАЦІЇ ПАДЕ

By using the method of generalized moment representations, we develop an approach to the construction and investigation of multipoint Padé approximants.

Розроблено підхід до побудови і вивчення багатоточкових апроксимацій Паде за допомогою методу узагальнених моментних зображень.

Поряд із класичними апроксимаціями Паде одним із важливих апаратів раціонального наближення функцій є так звані багатоточкові апроксимації Паде.

Означення 1 [1, с. 289]. *Нехай* $z_1, z_2, \ldots, z_R \in \mathfrak{D}$ *— деякі точки, що належать зв'язній підмножині* $\mathfrak{D}$ *комплексної площини,* M *та* N *— невід'ємні цілі числа, а* $L = (l_1, l_2, \ldots, l_R)$ *— вектор з додатними цілими координатами такими, що* $\sum_{r=1}^{R} l_r = M + N + 1$. *Будемо говорити, що раціональна функція*

$$[M/N]_f^L(z_1, \ldots, z_R; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \tag{1}$$

де $P_M(z)$ *та* $Q_N(z)$ *— алгебраїчні многочлени степенів* $\leq M$ *та* $\leq N$ *відповідно, є багатоточковою (або ж* R*-точковою) апроксимантою Паде порядку* $[M/N]$ *у точках* $z_1, z_2, \ldots, z_R$ *індексу* L *функції* f, *аналітичної в області* $\mathfrak{D}$, *якщо*

$$f(z) - [M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = O\left((z - z_r)^{l_r}\right) \tag{2}$$

при $z \to z_r$, $r = \overline{1, R}$.

Очевидно, що при $R = 1$ і $z_1 = 0$ це означення збігається з означенням класичних апроксимацій Паде (див. [1, с. 292]). У різних публікаціях багатоточкові апроксиманти Паде називаються також раціональними інтерполянтами, апроксимантами Ньютона – Паде та ін.

У роботі [2] описано підхід до побудови та вивчення двоточкових апроксимацій Паде, що базується на застосуванні узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика [3]. Наведемо відповідне означення.

Означення 2. *Узагальненим моментним зображенням числової послідовності* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *на добутку лінійних просторів* $\mathfrak{X}$ *та* $\mathfrak{Y}$ *називається двопараметрична сукупність рівностей*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{3}$$

де $x_k \in \mathfrak{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathfrak{Y}$, $j = \overline{0, \infty}$, *а* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— білінійна форма, визначена на* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

Будемо говорити, що узагальнене моментне зображення вигляду (3) є визначеним на банаховому просторі $\mathfrak{X}$, якщо $x_k \in \mathfrak{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathfrak{X}^*$, $j = \overline{0, \infty}$, і $\langle x, y \rangle = y(x)$, де $y(x)$ — значення функціонала $y \in \mathfrak{X}^*$ на елементі $x \in \mathfrak{X}$.

Легко бачити, що якщо в (3) $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathcal{L}_2[\Delta, d\mu]$ — гільбертів простір функцій, сумовних із квадратом за мірою $d\mu$ на множині $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \int_\Delta x(t) y(t)\, d\mu(t)$, за елементи x_k вибрати функції $x_k(t) = t^k$, $k = \overline{0, \infty}$, а за елементи y_j — функції $y_j(t) = t^j$, $j = \overline{0, \infty}$, то отримаємо зображення, еквівалентне класичній проблемі моментів.

У випадку, коли у просторі $\mathfrak{X}$ існує лінійний оператор $A : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ такий, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

а у просторі $\mathfrak{Y}$ — лінійний оператор $A^*: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ такий, що

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x \in \mathfrak{X}, \quad y \in \mathfrak{Y}$$

(будемо називати оператор A^* спряженим до оператора A відносно білінійної форми $\langle . , . \rangle$), зображення (3) еквівалентне зображенню

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{5}$$

При цьому твірна функція f послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \tag{6}$$

при додаткових припущеннях про збіжність рядів зображується у вигляді

$$f(z) = \left\langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \right\rangle, \tag{7}$$

де $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$ — резольвентна функція оператора A.

Наступний результат узагальнює теорему 5.1 з [2] на випадок багатоточкових апроксимацій Паде.

Теорема. *Нехай функція f є аналітичною в деякій зв'язній області D, що містить точки $z_0 := 0, z_1, \ldots, z_R$, і зображена в цій області степеневим рядом* (6), *для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathfrak{X}$ та $\mathfrak{Y}$*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{8}$$

і при цьому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ збігається в області D до аналітичної функції $\Phi : D \to \mathfrak{X}$, яка в околах точок $z_1, z_2, \ldots, z_R$ має зображення у вигляді збіжних рядів $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^{(r)} (z - z_r)^k$, $r = \overline{1, R}$. Нехай також для деяких $M, N \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq N - 1$ і деякого індексу $L = (l_0, l_1, \ldots, l_R)$, $l_0 \geq M + 1$, визначник

$$\mathcal{H}_{N,M}^{(L)} = \begin{vmatrix} s_{M+1-N} & s_{M+2-N} & \cdots & s_M \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ s_{l_0-N-1} & s_{l_0-N} & \cdots & s_{l_0-2} \\ s_{0,M+1-N}^{(1)} & s_{0,M+2-N}^{(1)} & \cdots & s_{0,M}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{l_1-1,M+1-N}^{(1)} & s_{l_1-1,M+2-N}^{(1)} & \cdots & s_{l_1-1,M}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{l_R-1,M+1-N}^{(R)} & s_{l_R-1,M+2-N}^{(R)} & \cdots & s_{l_R-1,M}^{(R)} \end{vmatrix},$$

де $s_{k,j}^{(r)} = \langle x_k^{(r)}, y_j \rangle$, є відмінним від нуля.

Тоді $(R+1)$*-точкову апроксиманту Паде порядку* $[M, N]$ *у точках* z_1, $z_2, \ldots, z_R$ *індексу* L *функції* f *можна записати у вигляді*

$$[M/N]_f^L(z_0, z_1, \ldots, z_r; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}, \quad P_M(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{M-N+j} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, *визначаються з умов* $\langle x_k^{(r)}, Y_N \rangle = 0$, $k = \overline{0, l_r - 1}$, $r = \overline{1, R}$, *та* $\langle x_k, Y_N \rangle = 0$, $k = \overline{0, l_0 - M - 2}$, *в яких нетривіальний узагальнений поліном* Y_N *має вигляд* $Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_{j+M+1-N}$. *Якщо за вказаних умов у лінійному нормованому просторі* $\mathfrak{X}$ *існує лінійний обмежений оператор* A *такий, що* $Ax_k = x_{k+1}$, $k = \overline{0, \infty}$, *і в області* D *є аналітичною його резольвентна функція* $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, *то похибку* $(R+1)$*-точкової апроксимації Паде порядку* $[M/N]$ *у точках* $z_1, z_2, \ldots, z_R$ *індексу* $L = (l_0, l_1, \ldots, l_R)$ *функції* f *можна зобразити у вигляді*

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{M+1}(z - z_r)^{l_r}}{Q_N(z)} \langle [R_{z_r}^{\#}(A)]^{l_r} R_z^{\#}(A) x_0, Y_N \rangle,$$

а в околі точки $z_0 = 0$ *— у вигляді*

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{l_0}}{Q_N(z)} \langle R_z^{\#}(A) x_{l_0 - M - 1}, Y_N \rangle.$$

Доведення. На підставі (8) запишемо

$$s_{k+j+M+1-N} = \langle x_k, y_{j+M+1-N} \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}. \tag{9}$$

Помножимо рівності (9) на z^k і підсумуємо їх по k від 0 до ∞. Зліва отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+j+M+1-N} z^k = \sum_{k=j+M+1-N}^{\infty} s_k z^{k-j+M+1-N} = \frac{1}{z^{j+M+1-N}} \left(f(z) - \sum_{m=0}^{j+M-N} s_k z^k \right). \tag{10}$$

Справа будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \langle x_k, y_{j+M+1-N} \rangle = \langle \Phi(z), y_{j+M+1-N} \rangle. \tag{11}$$

Помножимо рівності (10) та (11) на $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, і підсумуємо їх по j від 0 до N:

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{f(z) - \sum_{m=0}^{j+M-N} s_k z^k}{z^{j+M+1-N}} = \frac{1}{z^{M+1}} \{ f(z) Q_N(z) - P_N(z) \}. \tag{12}$$

Справа отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle \Phi(z), y_{j+M+1-N} \rangle = \langle \Phi(z), Y_N \rangle =$$

$$= \begin{cases} O((z - z_r)_r^l) & \text{при } z \to z_r, \ r = \overline{1, R}; \\ O(z^{l_0 - M - 1}) & \text{при } z \to 0. \end{cases} \tag{13}$$

З (12) та (13) випливає перше твердження теореми. Легко бачити, що

$$R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1} = (I - (z - z_r)A - z_r A)^{-1} =$$

$$= R_{z_r}^{\#}(A)(I - (z - z_r)AR_{z_r}^{\#}(A))^{-1} = R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z - z_r)^k [AR_{z_r}^{\#}(A)]^k.$$

Отже, маємо

$$x_k^{(r)} = R_{z_r}^{\#}(A)[AR_{z_r}^{\#}(A)]^k x_0 = [R_{z_r}^{\#}(A)]^{k+1} x_k.$$

Звідси отримуємо

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\left\langle R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z - z_r)^k [AR_{z_r}^{\#}(A)]^k x_0, Y_N\right\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\left\langle R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=l_r}^{\infty}(z - z_r)^k [AR_{z_r}^{\#}(A)]^k x_0, Y_N\right\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}(z - z_r)^{l_r}\left\langle R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z - z_r)^k [AR_{z_r}^{\#}(A)]^{l_r + k} x_0, Y_N\right\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}(z - z_r)^{l_r}}{Q_N(z)}\langle [R_{z_r}^{\#}(A)]^{l_r} R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\rangle.$$

В околі ж точки $z_0 = 0$ одержуємо

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\rangle = \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k x_0, Y_N\right\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1+l_0-N-1}}{Q_N(z)}\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} z^k A^{k+l_0-M-1} x_0, Y_N\right\rangle =$$

$$= \frac{z^{l_0}}{Q_N(z)}\langle A^{l_0-M-1} R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\rangle = \frac{z^{l_0}}{Q_N(z)}\langle R_z^{\#}(A)x_{l_0-M-1}, Y_N\rangle.$$

Теорему доведено.

Розглянемо тепер багатоточкові апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції $f(z) = \dfrac{{}_1F_1(1;\, \nu+1;\, z) - 1}{z}$, $\nu > -1$. На підставі теореми 2.2 з [4] можна зробити висновок, що для коефіцієнтів степеневого розвинення цієї функції $s_k = \dfrac{1}{(\nu+1)_{k+1}}$, $k = \overline{0, \infty}$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $C[0, 1] \times L[0, 1]$ вигляду

$$s_{k+j} = \int_0^1 \frac{t^k}{k!}\frac{(1-t)^{j+\nu}}{(\nu+1)_j}\, dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Отже, в цьому випадку $(\Phi(z)x_0)(t) = (R_z^{\#}(A)x_0)(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k t^k}{k!} = e^{zt}$. Легко бачити, що $e^{zt} = e^{(z-z_r)t + z_r t} = e^{z_r t}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_r)^k t^k}{k!}$, і $x_k^{(r)} = e^{r_r t}\dfrac{t^k}{k!}$, $k = \overline{0, \infty}$.

Таким чином, для побудови багатоточкових апроксимант Паде функції $f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\,\nu+1;\,z)-1}{z}$, $\nu > -1$, порядку $[M/N]$ у точках $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_r$ індексу $L = (l_0, l_1, \ldots, l_R)$ потрібно буде знайти нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \frac{(1-t)^{j+\nu}}{(\nu+1)_j},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 e^{z_r t} \frac{t^k}{k!} Y_N(t)\,dt = 0, \quad k = \overline{0,\, l_r - 1}, \quad r = \overline{1,\, R},$$

та

$$\int_0^1 \frac{t^k}{k!} Y_N(t)\,dt = 0, \quad k = \overline{0,\, l_0 - M - 1}.$$

Оскільки система функцій $\{e^{z_r t}\}_{r=0}^{R}$ є AT-системою (див. [5]) на $[0, 1]$, якщо тільки числа z_r є дійсними і різними між собою, то такий нетривіальний узагальнений поліном дійсно існує і має на $(0, 1)$ рівно N простих нулів. Це дає змогу встановити наступний результат.

Твердження. *$(R+1)$-точкову апроксиманту Паде функції* $f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\,\nu+1;\,z)-1}{z}$, $\nu > -1$, *порядку* $[M/N]$, $M \geq N-1$, *у точках* $z_0 = 0$, $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{R}$ *індексу* $L = (l_0, l_1, \ldots, l_R)$, $l_0 \geq M+1$, *можна зобразити у вигляді*

$$[M/N]_f^L(z_0, z_1, \ldots, z_r; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}, \qquad P_M(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{M-N+j} \frac{1}{(\nu+1)_{m+1}} z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0,\, N}$, *визначаються з умов*

$$\int_0^1 e^{z_r t} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \frac{(1-t)^{j+\nu}}{(\nu+1)_j}\,dt = 0,$$

для $k = \overline{0,\, l_r - 1}$, $r = \overline{1,\, R}$; $k = \overline{0,\, l_0 - N - 2}$, $r = 0$. *При* $N \to \infty$ *ці апроксиманти будуть збігатися до наближуваної функції рівномірно на кожному компакті комплексної площини.*

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981. – С. 16–56. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
3. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. – 1981. – № 6. – С. 8–12.
4. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
5. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Мат. сб. – 1980. – **113**, № 4. – С. 499–519.

Одержано 23.09.2003