УДК 512.552.4

В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, А. В. Стрелец
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ТОЖДЕСТВАХ В АЛГЕБРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫМИ ИДЕМПОТЕНТАМИ

We consider algebras generated by idempotents whose linear combination is equal to the identity and investigate the question of whether these algebras have polynomial identities (PI). In the case where the number of idempotents is greater than or equal to five, we prove that the algebras considered are not PI-algebras. For the case of four idempotents, in order that the algebra be PI-algebra, it is necessary and sufficient that the sum of coefficients of the linear combination should be equal to two. Such algebras are F_4-algebras.

Досліджено алгебри, породжені ідемпотентами, лінійна комбінація яких дорівнює одиниці, на наявність в них поліноміальних тотожностей. Доведено, що у випадку, коли кількість ідемпотентів більша або дорівнює п'яти, такі алгебри не є PI-алгебрами. У випадку чотирьох ідемпотентів для того, щоб алгебра була PI-алгеброю, необхідно і достатньо, щоб сума коефіцієнтів лінійної комбінації дорівнювала двом; у цьому випадку такі алгебри є F_4-алгебрами.

В работе [1] изучен вопрос о существовании в алгебрах

$$\mathbf{Q}_{n,\lambda} = \mathbb{C}\left\langle q_1, \ldots, q_n \mid q_k^2 = q_k \ (k=1,\ldots,n);\ \sum_{k=1}^{n} q_k = \lambda e \right\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

порожденных n идемпотентами, полиномиальных соотношений. Алгебры, в которых выполняются полиномиальные соотношения, называют PI-алгебрами (о PI-алгебрах и их свойствах см., например, [2]).

При $n \leq 3$ все алгебры $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$ конечномерны. В работе [1] показано, что все алгебры $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ бесконечномерны и имеют полиномиальный рост; в алгебре $\mathbf{Q}_{4,2}$ выполняется полиномиальное тождество

$$F_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^{p(\sigma)} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0 \qquad \forall\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{Q}_{4,2}$$

($\mathbf{Q}_{4,2}$ является F_4-алгеброй); при $\lambda \neq 2$ в алгебрах $\mathbf{Q}_{4,\lambda}$ никакие полиномиальные соотношения не выполняются; при $n \geq 5$ алгебра $\mathbf{Q}_{n,\lambda}$ при любом λ содержит свободную алгебру с двумя образующими.

В данной работе изучаются те же вопросы для алгебр, порожденных идемпотентами, линейная комбинация которых равна единице:

$$\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}} = \mathbb{C}\left\langle q_1, \ldots, q_n \mid q_j^2 = q_j,\ j=1,\ldots,n,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j = e \right\rangle,$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad \overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda_j \neq 0.$$

В дальнейшем нам удобно будет с каждой алгеброй $\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}}$ связывать число

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}(\overline{\lambda}) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j .$$

Легко проверить, что в случае, когда $n \leq 3$, все алгебры $\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}}$ конечномерны, причем они ненулевые только при определенных значениях $\overline{\lambda}$. При $n = 3$ алгебры некоммутативны только в случае $\hat{\delta} = 0$. Таким образом, все они являются PI-алгебрами.

В п. 1 доказано, что в алгебрах $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ при $\hat{\delta} \neq 0$ никакие полиномиальные соотношения выполняться не могут. Как следствие, показано, что алгебры $\mathbf{Q}_{n,\bar{\lambda}}$ при $n \geq 5$ и любом $\bar{\lambda}$ также не являются PI-алгебрами.

В п. 2 показано, что все алгебры $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ бесконечномерны и имеют полиномиальный рост. Как следствие, алгебры $\mathbf{Q}_{n,\bar{\lambda}}$ при $n \geq 5$ и любом $\bar{\lambda}$ также бесконечномерны.

В п. 3 введены две алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$, $\hat{\sigma} = 0, 1$, фактором одной из которых является любая алгебра $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ при $\hat{\delta}(\bar{\lambda}) = 0$. Построены двумерные представления для алгебр $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$, разделяющие их точки, и, таким образом (см. [3], теорема 2, а также [4, 5]), показано, что алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$, а следовательно, и алгебры $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ при $\hat{\delta}(\bar{\lambda}) = 0$ являются F_4-алгебрами.

1. Алгебры $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ при $\hat{\delta} \neq 0$ не являются PI-алгебрами. В этом пункте мы покажем, что алгебры $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ при $\hat{\delta} \neq 0$ (т. е. при $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \neq 2$) не являются PI-алгебрами.

Обозначим через $\varphi(t)$ и $\psi(t; x)$ две идемпотентные матрицы-функции из $\mathbb{C}$ в $M_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t & t-t^2 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}, \qquad \psi(t; x) = \begin{pmatrix} t & x^{-1}(t-t^2) \\ x & 1-t \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для любых* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *и* $c \neq (a+b)/2$ *справедливо равенство*

$$Y = a\varphi(t_1) + b\psi(t_2, -a/b) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & a+b-c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$t_1 = \frac{c(b-c)}{a(a+b-2c)}, \qquad t_2 = \frac{c-at_1}{b}. \tag{2}$$

Доказательство проведем, проверяя равенства на (i, j)-м месте матрицы Y:

a) $Y_{11} = at_1 + bt_2 = at_1 + b(c-at_1)/b = c$;

b) $Y_{21} = a + b(-a/b) = 0$;

c) подсчитаем

$$Y_{12} = a(t_1-t_1^2) + b(-b/a)(t_2-t_2^2) = at_1 - at_1^2 - \frac{b^2}{a}t_2 + \frac{b^2}{a}t_2^2. \tag{3}$$

Расписывая t_1 и t_2 в (3) по формулам (2) и приводя подобные слагаемые, получаем

$$Y_{12} = at_1 - at_1^2 - \frac{b(c-at_1)}{a} + \frac{(c-at_1)^2}{a} = (a+b-2c)t_1 - \frac{c}{a}(b-c) = 0.$$

d) $Y_{22} = a(1-t_1) + b(1-t_2) = a+b-(at_1+bt_2) = a+b-Y_{11} = a+b-c$.

Лемма доказана.

Основной результат этого пункта следует из двух утверждений.

Утверждение 1. *Пусть* $P[x]$ — *алгебра полиномов от одной переменной* x *и* $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^4$, $\lambda_j \neq 0$. *Тогда при* $\operatorname{Re}\hat{\delta} \geq 0$, $\hat{\delta} \neq 0$, *существуют четыре линейных идемпотентных оператора* Q_1, Q_2, Q_3 *и* Q_4, *которые отображают*

$P[x]$ *в* $P[x]$, *такие, что* $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 + \lambda_4 Q_4 = I$.

Доказательство. Упорядочим λ_i так, чтобы

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) \le \mathrm{Re}(\lambda_2) \le \mathrm{Re}(\lambda_3) \le \mathrm{Re}(\lambda_4).$$

При $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2)$ потребуем дополнительно, чтобы

$$\mathrm{Im}(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathrm{Im}\,\hat{\delta} \le 0. \tag{4}$$

Зададим две последовательности чисел x_k, y_k, $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{2k-1} = (1-\lambda_1) + 2(k-1)\hat{\delta}, \qquad y_{2k-1} = \frac{x_{2k-1}(\lambda_4 - x_{2k-1})}{\lambda_3(\lambda_3 + \lambda_4 - 2x_{2k-1})}, \tag{5}$$

$$x_{2k} = \lambda_2 + 2k\hat{\delta}, \qquad y_{2k} = \frac{x_{2k}(\lambda_2 - x_{2k})}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 - 2x_{2k})}. \tag{6}$$

Числа y_k определены при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, по формулам (5), (6) находим

$$\lambda_3 + \lambda_4 - 2x_{2k-1} = (\lambda_1 - \lambda_2) - (4k-2)\hat{\delta},$$
$$\lambda_3 + \lambda_4 - 2x_{2k} = (\lambda_1 - \lambda_2) - 4k\hat{\delta}.$$

Поэтому один из знаменателей в формулах (5) и (6) равен нулю только тогда, когда число $(\lambda_1 - \lambda_2) - 2j\hat{\delta}$ равно нулю при некотором $j \in \mathbb{N}$. Докажем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2) - j\hat{\delta} \ne 0 \tag{7}$$

ни при каком $j \in \mathbb{N}$. Пусть, от противного, при некотором j_0

$$(\lambda_1 - \lambda_2) - j_0\hat{\delta} = 0. \tag{8}$$

По построению $\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \le 0$ и $\mathrm{Re}\,\hat{\delta} \ge 0$. Поэтому

$$\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \qquad \mathrm{Re}\,\hat{\delta} = 0.$$

С другой стороны, в силу формулы (4) числа $\mathrm{Im}(\lambda_1 - \lambda_2)$ и $\mathrm{Im}\,\hat{\delta}$ имеют разные знаки и, так как $\hat{\delta} \ne 0$, получаем

$$\mathrm{Im}\,((\lambda_1 - \lambda_2) - j_0\hat{\delta}) \ne 0.$$

Пришли к противоречию. Поэтому выполнено (7).

По так заданным числам x_i и y_i определим операторы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 в базисе $1, x, x^2, x^3, \ldots$ следующим образом:

$$Q_1 = \mathrm{diag}\,\{1, \varphi(y_2), \varphi(y_4), \ldots, \varphi(y_{2k}), \ldots\},$$
$$Q_2 = \mathrm{diag}\,\{0, \psi(x_2 - y_2, a), \psi(x_4 - y_4, a), \ldots, \psi(x_{2k} - y_{2k}, a), \ldots\},$$
$$Q_3 = \mathrm{diag}\,\{\varphi(y_1), \varphi(y_3), \ldots, \varphi(y_{2k-1}), \ldots\},$$
$$Q_4 = \mathrm{diag}\,\{\psi(x_1 - y_1, b), \psi(x_3 - y_3, b), \ldots, \psi(x_{2k-1} - y_{2k-1}, b), \ldots\},$$

где $a = -\lambda_1/\lambda_2$, $b = -\lambda_3/\lambda_4$.

Как видно из определения, Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, имеют блочно-диагональный вид с нулевыми числами вне блоков. Также $Q_i^2 = Q_i$, поскольку степень любого многочлена $f(x)$ из $P[x]$ является конечным числом и действие оператора Q_i на $f(x)$ будет таким же, как и действие матрицы Q_i^f, полученной из Q_i заменой всех строк начиная с некоторой нулевыми. Далее, используя лемму 1, получаем

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, x_2, \lambda_1 + \lambda_2 - x_2, x_4, \lambda_1 + \lambda_2 - x_4, \ldots\},$$

$$\lambda_3 Q_3 + \lambda_4 Q_4 = \operatorname{diag}\{1-\lambda_1, \lambda_3+\lambda_4-x_1, x_3, \lambda_3+\lambda_4-x_3, x_5, \ldots\}.$$

Таким образом,

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 + \lambda_4 Q_4 =$$
$$= \operatorname{diag}\{1, \lambda_3+\lambda_4+(x_2-x_1), \lambda_1+\lambda_2+(x_3-x_2), \ldots$$
$$\ldots, \lambda_3+\lambda_4+(x_{2i}-x_{2i-1}), \lambda_1+\lambda_2+(x_{2i+1}-x_{2i}), \ldots\}.$$

В то же время из равенств (5), (6) следует $x_{2i}-x_{2i-1} = 1-(\lambda_3+\lambda_4)$ и $x_{2i+1}-x_{2i} = 1-(\lambda_1+\lambda_2)$, откуда $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 + \lambda_4 Q_4 = I$.

Утверждение 1 доказано.

Определим теперь алгебру $\mathbf{A}_{\overline{\lambda}}$ как алгебру, порожденную операторами Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *При* $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^4$, $\lambda_i \neq 0$, $\operatorname{Re}\hat{\delta} \geq 0$, $\hat{\delta} \neq 0$, *алгебра* $\mathbf{A}_{\overline{\lambda}}$ *не является* PI*-алгеброй.*

Доказательство. Допустим, $\mathbf{A}_{\overline{\lambda}}$ — PI-алгебра. Тогда можно предполагать, что для некоторого натурального m и для любых $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{A}_{\overline{\lambda}}$ выполнено полиномиальное тождество вида (см., например, § 20.2 [2])

$$\Lambda_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} a_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(m)} = 0 \tag{9}$$

(S_m — группа подстановок, $a_\sigma \in \mathbb{C}$). Более того, можно считать, что m нечетно, поскольку, умножив равенство (9) на x_{m+1} справа, получим тождество, аналогичное (9) с требуемым свойством. Далее, Λ_m не нулевой, поэтому можно считать, что коэффициент, соответствующий тождественной подстановке, отличен от нуля.

Рассмотрим оператор $X = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ (Q_1, Q_2 из утверждения 1), который в базисе $1, x, x^2, x^3, \ldots$ имеет вид

$$X = \operatorname{diag}\{\lambda_1, x_2, \lambda_1+\lambda_2-x_2, x_4, \lambda_1+\lambda_2-x_4, \ldots\}.$$

Покажем, что все числа на диагонали у X попарно различны, для чего рассмотрим попарные разности диагональных элементов (их 3): 1) $\lambda_1 - x_{2k}$, 2) $\lambda_1 + \lambda_2 - x_{2k} - x_{2j}$, 3) $\lambda_1 - (\lambda_1+\lambda_2-x_{2k})$. Согласно построению последовательности x_k и свойству (7) имеем неравенства

$$\lambda_1 - x_{2k} = (\lambda_1-\lambda_2) - 2k\hat{\delta} \neq 0, \tag{10}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - x_{2k} - x_{2j} = (\lambda_1-\lambda_2) - 2(j+k)\hat{\delta} \neq 0. \tag{11}$$

Также выполняется неравенство

$$\lambda_1 - (\lambda_1+\lambda_2-x_{2k}) = x_{2j} - x_{2(j+k)} = -2k\hat{\delta} \neq 0, \tag{12}$$

так как $\hat{\delta} \neq 0$ по предположению. Таким образом, числа на диагонали у X попарно различны.

В силу доказанного свойства матрицы X существуют полиномы $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x) \in P[x]$, $n = (m+1)/2$, такие, что матричные значения этих полиномов на матрице X имеют следующую структуру:

$$p_1(X) = \operatorname{diag}\{1, 0_n, P_1\},$$
$$p_2(X) = \operatorname{diag}\{0, 1, 0_{n-1}, P_2\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n(X) = \operatorname{diag}\{0_{n-1}, 1, 0, P_n\},$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — некоторые числовые диагональные матрицы бесконечного размера.

Рассмотрим также оператор $Y = Q_1 + Q_3$. Очевидно, что в его матрице, записанной в базисе $1, x, x^2, \ldots$, под главной диагональю на местах $(i+1, i)$ будут единицы. Тогда, положив

$$e_{jj} = p_j(X), \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$e_{jj-1} = p_j(X) Y p_{j-1}(X), \quad j = 2, \ldots, n,$$

получим

$$\Lambda_{2n-1}(e_{nn}, e_{nn-1}, e_{n-1n-1}, e_{n-1n-2}, \ldots, e_{22}, e_{21}, e_{11}) \neq 0,$$

поскольку моном $e_{nn}e_{nn-1}e_{n-1n-1}e_{n-1n-2}\ldots e_{21}e_{11}$ в этом полиноме имеет вид $\operatorname{diag}\{0_{n-1}, 1, *\}$ и коэффициент при нем отличен от нуля, а все остальные мономы имеют вид $\operatorname{diag}\{0_{n-1}, 0, *\}$. Таким образом, пришли к противоречию.

Утверждение 2 доказано.

Теорема 1. *При* $\hat{\delta}(\overline{\lambda}) \neq 0$ *алгебра* $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ *не является* PI*-алгеброй.*

Доказательство. Алгебра $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ изоморфна алгебре $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}/(1-2\hat{\delta}(\overline{\lambda}))}$ при $\operatorname{Re}\hat{\delta}(\overline{\lambda}) \leq 0$. Поскольку

$$\operatorname{Re}\hat{\delta}\left(\frac{\overline{\lambda}}{1-2\hat{\delta}(\overline{\lambda})}\right) = \operatorname{Re}\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \frac{\lambda_j}{1-2\hat{\delta}(\overline{\lambda})}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{-2\hat{\delta}(\overline{\lambda})+2}{-2\hat{\delta}(\overline{\lambda})+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{1}{1-2\hat{\delta}(\overline{\lambda})} \geq 0$$

при $\operatorname{Re}\hat{\delta}(\overline{\lambda}) \leq 0$, достаточно доказать теорему для тех векторов $\overline{\lambda}$, для которых $\operatorname{Re}\hat{\delta}(\overline{\lambda}) \geq 0$. Как следует из утверждения 2, алгебра $\mathbf{A}_{\overline{\lambda}}$, порожденная четверкой идемпотентных операторов, сумма которых равна I, при $\hat{\delta} \neq 0$, $\operatorname{Re}\hat{\delta} \geq 0$, не является PI-алгеброй. При $\operatorname{Re}\hat{\delta} \geq 0$ гомоморфизм алгебры $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ в $\mathbf{A}_{\overline{\lambda}}$ $(q_k \mapsto Q_k)$ является сюръективным. Поэтому алгебра $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ при $\operatorname{Re}\hat{\delta} \geq 0$ не является PI-алгеброй.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Для любых* $n \geq 5$, $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda_j \neq 0$ *алгебры* $\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}}$ *не являются* PI*-алгебрами.*

Доказательство. В случае, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \neq 2$, имеем сюръективный гомоморфизм алгебр $\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}} \to \mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}'}$, где $p_j \mapsto p_j$ при $1 \leq j \leq 4$, $p_j \mapsto 0$ при $5 \leq j \leq n$, $\overline{\lambda}' = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. А в случае $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2$ без ограничения общности можно считать, что $\lambda_5 \neq 1$, и имеем сюръективный гомоморфизм алгебр $\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}} \to \mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}'}$, где $p_j \mapsto p_j$ при $1 \leq j \leq 4$, $p_5 \mapsto e$, $p_j \mapsto 0$ при $6 \leq j \leq n$, $\overline{\lambda}' = (1-\lambda_5)^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Это доказывает следствие 1.

2. Алгебры $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ бесконечномерны и имеют полиномиальный рост. В этом пункте мы покажем, что алгебры $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ при всех $\overline{\lambda}$ являются бесконечномерными и имеют полиномиальный рост. Для этого воспользуемся „бриллиантовой" леммой и алгоритмом построения редуцированного базиса Гребнера конечнозаданной алгебры. Мы не будем приводить определения понятий редуцированного базиса Гребнера, композиции, редукции, алгоритма построения базиса Гребнера, роста алгебры — читатель может найти их в обзоре [6] и библиографии к нему.

Обозначим

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}.$$

Далее в этой статье под квадратным корнем из $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ будем подразумевать тот, который принадлежит $\mathbb{C}_+$. Кроме того, если формула содержит все три индекса j, k, l, то будем считать, что j пробегает значения 1, 2, 3, а $k, l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$, $l < k$.

Наряду с $\hat{\delta}$ введем обозначение (ср. с [7]):

$$\mathbb{C}_+ \cup \{0\} \ni \Delta = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 - \hat{\delta}^2\right)^{1/2}.$$

С алгебрами $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ более удобно работать, записав их в других образующих.

Положим

$$\beta_j = \frac{2 - \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l - \lambda_4}{4},$$

$$\gamma_j = \frac{\lambda_j^2 - \lambda_k^2 - \lambda_l^2 + \lambda_4^2}{4\Delta^2}, \quad \delta = \frac{\hat{\delta}}{\Delta} \quad \text{при} \quad \Delta \neq 0,$$

$$\gamma_j = \frac{\lambda_j^2 - \lambda_k^2 - \lambda_l^2 + \lambda_4^2}{4}, \quad \delta = \hat{\delta} \quad \text{при} \quad \Delta = 0$$

и выполним замену образующих

$$x_j = \frac{\lambda_k q_k + \lambda_l q_l - \beta_j e}{\Delta} \quad \text{при} \quad \Delta \neq 0, \tag{13}$$

$$x_j = \lambda_k q_k + \lambda_l q_l - \beta_j e \quad \text{при} \quad \Delta = 0. \tag{14}$$

Тогда верно следующее утверждение.

Лемма 2 (ср. с [7]). *Алгебра* $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ *порождается образующими* x_1, x_2, x_3 *и соотношениями*

$$\{x_k, x_l\} = \delta x_j + \gamma_j e, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = e \quad \textit{при} \quad \Delta \neq 0, \tag{15}$$

$$\{x_k, x_l\} = \delta x_j + \gamma_j e, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \textit{при} \quad \Delta = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\beta_j - \beta_k - \beta_l = \frac{-2 - 3\lambda_j + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_4}{4} = -\frac{\hat{\delta} + 2\lambda_j}{2},$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{6 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4}{4} = 2 - \frac{\hat{\delta} + 2\lambda_4}{2}$$

при $\Delta \neq 0$ получаем

$$-x_j + x_k + x_l = \frac{2\lambda_j q_j + (\beta_j - \beta_k - \beta_l)e}{\Delta} = \frac{2\lambda_j q_j}{\Delta} - \frac{\hat{\delta} + 2\lambda_j}{2\Delta} e,$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = \frac{-2\lambda_1 q_1 - 2\lambda_2 q_2 - 2\lambda_3 q_3 + (\beta_j + \beta_k + \beta_l)e}{\Delta} = \frac{2\lambda_4 q_4}{\Delta} - \frac{\hat{\delta} + 2\lambda_4}{2\Delta} e.$$

Следовательно,

$$q_j = \frac{\Delta}{2\lambda_j}\left(-x_j + x_k + x_l + \frac{\delta}{2}e\right) + \frac{1}{2}e,$$

$$q_4 = \frac{\Delta}{2\lambda_4}\left(-x_1 - x_2 - x_3 + \frac{\delta}{2}e\right) + \frac{1}{2}e.$$

Аналогичными вычислениями в случае $\Delta = 0$ получим

$$q_j = \frac{1}{2\lambda_j}\left(-x_j + x_k + x_l + \frac{\delta}{2}e\right) + \frac{1}{2}e,$$

$$q_4 = \frac{1}{2\lambda_4}\left(-x_1 - x_2 - x_3 + \frac{\delta}{2}e\right) + \frac{1}{2}e.$$

Покажем для случая $\Delta \neq 0$ (случай $\Delta = 0$ доказывается аналогично), что если выполнены соотношения (15), то q_j являются идемпотентами, такими, что $\sum \lambda_j q_j = e$. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j q_j = \hat{\delta} e + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \lambda_j e = e.$$

Далее, учитывая, что

$$\gamma_j - \gamma_k - \gamma_l = \frac{3\lambda_j^2 - \lambda_k^2 - \lambda_l^2 - \lambda_4^2}{4\Delta^2} = \frac{\lambda_j^2}{\Delta^2} - \frac{4\Delta^2 + \hat{\delta}^2}{4\Delta^2} = \frac{\lambda_j^2}{\Delta^2} - \frac{\delta^2}{4} - 1,$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{3\lambda_4^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{4\Delta^2} = \frac{\lambda_4^2}{\Delta^2} - \frac{\delta^2}{4} - 1,$$

получаем

$$\left(-x_j + x_k + x_l + \frac{\delta}{2}e\right)^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \{x_j, x_k\} - \{x_j, x_l\} + \{x_k, x_l\} + \delta(-x_j + x_k + x_l) + \frac{\delta^2}{4}e =$$

$$= \left(1 + \gamma_j - \gamma_k - \gamma_l + \frac{\delta^2}{4}\right)e = \frac{\lambda_j^2}{\Delta^2}e,$$

$$\left(-x_1 - x_2 - x_3 + \frac{\delta}{2}e\right)^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \{x_1, x_2\} + \{x_1, x_3\} + \{x_2, x_3\} + \delta(-x_1 - x_2 - x_3) + \frac{\delta^2}{4} =$$

$$= \left(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \frac{\delta^2}{4}\right)e = \frac{\lambda_4^2}{\Delta^2}e,$$

следовательно, q_1, q_2, q_3, q_4 — идемпотенты:

$$q_j^2 = \frac{\Delta^2}{4\lambda_j^4}\left(-x_j + x_k + x_l + \frac{\delta}{2}e\right)^2 + q_j - \frac{1}{4}e = q_j,$$

$$q_4^2 = \frac{\Delta^2}{4\lambda_4^4}\left(-x_1 - x_2 - x_3 + \frac{\delta}{2}e\right)^2 + q_4 - \frac{1}{4}e = q_4.$$

Отметим, что для q_j и x_l выполняются соотношения (13). Поэтому алгебра, порожденная элементами q_j, и алгебра, порожденная x_l, совпадают.

Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Параметры γ_j, $j = 1, 2, 3$, δ определяются параметрами λ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, однозначно. Нетрудно видеть, что параметры λ_j, $j = 1, 2, 3, 4$, не выражаются однозначно через γ_j, $j = 1, 2, 3$, и δ, следовательно, среди алгебр $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$ есть изоморфные при разных $\overline{\lambda}$.

Лемма 3. *Для любого* $\overline{\lambda}$, $\lambda_j \neq 0$ *слова вида*

$$x_1^n x_2^m x_3^{\sigma}, \quad n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sigma \in \{0, 1\},$$

образуют линейный базис алгебры $\mathbf{Q}_{4,\overline{\lambda}}$.

Доказательство. Введем в алгебрах $\mathbf{Q}_{n,\overline{\lambda}}$ однородно-лексикографический порядок на словах, упорядочив образующие $x_1 < x_2 < x_3$.

Запишем соотношения (15), (16) в общем виде

$$\{x_k, x_l\} - \delta x_j - \gamma_j e = 0,$$

$$x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - \hat{\sigma} = 0,$$

положив

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \Delta = 0; \\ 1 & \text{при} \quad \Delta \neq 0. \end{cases} \tag{17}$$

Покажем, что эти соотношения являются редуцированным базисом Гребнера идеала, порожденного ими.

Главными словами соотношений (17) являются слова

$$x_3^2, \quad x_3 x_2, \quad x_3 x_1, \quad x_2 x_1. \tag{18}$$

Поэтому существуют четыре композиции

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_3, \quad x_3 \cdot x_3 \cdot x_2, \quad x_3 \cdot x_3 \cdot x_1, \quad x_3 \cdot x_2 \cdot x_1,$$

результаты которых редукциями приводятся к нулю (с помощью квадратных скобок будем группировать результаты применения редукций):

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_3:\ x_3 x_2^2 + x_3 x_1^2 - \hat{\sigma} e - x_2^2 x_3 - x_1^2 x_3 + \hat{\sigma} e \to$$

$$\to [-x_2 x_3 x_2 + \delta x_1 x_2 + \gamma_1 x_2] + [-x_1 x_3 x_1 + \delta x_2 x_1 + \gamma_2 x_1] -$$

$$- x_2^2 x_3 - x_1^2 x_3 \to$$

$$\to [x_2^2 x_3 - \delta x_2 x_1 - \gamma_1 x_2] + \gamma_1 x_2 + \delta x_1 x_2 +$$

$$+ [x_1^2 x_3 - \delta x_1 x_2 - \gamma_2 x_1] + \gamma_2 x_1 + \delta x_2 x_1 - x_2^2 x_3 - x_1^2 x_3 = 0,$$

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_2:\ x_2^3 + x_1^2 x_2 - \hat{\sigma} x_2 - x_3 x_2 x_3 + \delta x_3 x_1 + \gamma_1 x_3 \to$$

$$\to x_2^3 + x_1^2 x_2 - \hat{\sigma} x_2 + [x_2 x_3^2 - \delta x_1 x_3 - \gamma_1 x_3] + \delta x_3 x_1 + \gamma_1 x_3 \to$$

$$\to x_2^3 + x_1^2 x_2 - \hat{\sigma} x_2 + [-x_2^3 - x_2 x_1^2 + \hat{\sigma} x_2] - \delta x_1 x_3 + \delta x_3 x_1 \to$$

$$\to x_1 x_2^2 + [x_1 x_2 x_1 - \delta x_3 x_1 - \gamma_3 x_1] - \delta x_1 x_3 + \delta x_3 x_1 \to$$

$$\to x_1 x_2^2 + [-x_1^2 x_2 + \delta x_1 x_3 + \gamma_3 x_1] - \gamma_3 x_1 - \delta x_1 x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
x_3 \cdot x_3 \cdot x_1 :\quad & x_2^2 x_1 + x_1^3 - \hat{\sigma} x_1 - x_3 x_1 x_3 + \delta x_3 x_2 + \gamma_2 x_3 \to \\
& \to [-x_2 x_1 x_2 + \delta x_2 x_3 + \gamma_3 x_2] + x_1^3 - \hat{\sigma} x_1 + \\
& + [x_1 x_3^2 - \delta x_2 x_3 - \gamma_2 x_3] + \delta x_3 x_2 + \gamma_2 x_3 \to \\
& \to [x_1 x_2^2 - \delta x_3 x_2 - \gamma_3 x_2] + \gamma_3 x_2 + x_1^3 - \hat{\sigma} x_1 + \\
& + [-x_1^3 - x_1 x_2^2 + \hat{\sigma} x_1] + \delta x_3 x_2 = 0, \\
x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 :\quad & -x_2 x_3 x_1 + \delta x_1^2 + \gamma_1 x_1 + x_3 x_1 x_2 - \delta x_3^2 - \gamma_3 x_3 \to \\
& \to [x_2 x_1 x_3 - \delta x_2^2 - \gamma_2 x_2] + \delta x_1^2 + \gamma_1 x_1 + \\
& + [-x_1 x_3 x_2 + \delta x_2^2 + \gamma_2 x_2] - \delta x_3^2 - \gamma_3 x_3 \to \\
& \to [-x_1 x_2 x_3 + \delta x_3^2 + \gamma_3 x_3] + \delta x_1^2 + \gamma_1 x_1 + \\
& + [x_1 x_2 x_3 - \delta x_1^2 - \gamma_1 x_1] - \delta x_3^2 - \gamma_3 x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, согласно „бриллиантовой" лемме [6, с. 33] (лемма о композиции) получаем, что соотношения (17) являются редуцированным базисом Гребнера, поэтому запрещенными подсловами являются слова (18).

Лемма доказана.

Очевидным следствием этой леммы является следующее.

Следствие 2. *Алгебры* $\mathbf{Q}_{n,\bar{\lambda}}$ *бесконечномерны и имеют квадратичный рост.*

3. Алгебры $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ — F_4-алгебры при $\hat{\delta} = 0$. Осталось рассмотреть случай $n = 4$, $\hat{\delta} = 0$. В этом пункте мы покажем, что алгебры $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ при $\hat{\delta} = 0$ являются F_4-алгебрами.

В случае $\hat{\delta} = 0$ соотношения (17) упрощаются. Для того чтобы показать, что при $\hat{\delta} = 0$ все $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ являются F_4-алгебрами, введем две алгебры ($\hat{\sigma} \in \{0, 1\}$):

$$\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}} = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \mid$$

$$\{x_k, x_l\} - \zeta_j = 0, \tag{19}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \hat{\sigma} e = 0, \tag{20}$$

$$[\zeta_k, \zeta_l] = 0, \quad k \neq l, \tag{21}$$

$$[\zeta_k, x_l] = 0\rangle. \tag{22}$$

Очевидно, что алгебра $\mathbf{Q}_{4,\bar{\lambda}}$ при $\hat{\delta} = 0$ является фактором одной из алгебр $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$ по идеалу, порожденному соотношениями $\{\zeta_j = \gamma_j\}_{j=1,2,3}$, поэтому для того, чтобы показать, что такие алгебры являются F_4-алгебрами, достаточно доказать, что алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$ — F_4-алгебры.

Лемма 4. *Для любого* $\hat{\sigma}$ *слова вида*

$$\zeta_1^{n_1} \zeta_2^{n_2} \zeta_3^{n_3} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{\sigma}, \quad n_j,\ m_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sigma \in \{0, 1\},$$

образуют линейный базис алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$.

Доказательство. На образующих алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$ введем порядок $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < x_1 < x_2 < x_3$, а слова упорядочим однородно-лексикографически.

Тогда старшими словами соотношений (19), (20) являются слова

$$x_3^2, \quad x_3x_2, \quad x_3x_1, \quad x_2x_1. \tag{23}$$

Поэтому существуют четыре композиции

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_3, \quad x_3 \cdot x_3 \cdot x_2, \quad x_3 \cdot x_3 \cdot x_1, \quad x_3 \cdot x_2 \cdot x_1,$$

результаты которых редукциями приводятся к нулю (с помощью квадратных скобок снова будем группировать результаты применения редукций):

$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_3 : \; x_3x_2^2 + x_3x_1^2 - \hat{\sigma}e - x_2^2x_3 - x_1^2x_3 + \hat{\sigma}e \to$$
$$\to [-x_2x_3x_2 + \zeta_1x_2] + [-x_1x_3x_1 + \zeta_2x_1] - x_2^2x_3 - x_1^2x_3 \to$$
$$\to [x_2^2x_3 - x_2\zeta_1] + \zeta_1x_2 + [x_1^2x_3 - x_1\zeta_2] + \zeta_2x_1 - x_2^2x_3 - x_1^2x_3 \to 0,$$
$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_2 : \; x_2^3 + x_1^2x_2 - \hat{\sigma}x_2 - x_3x_2x_3 + x_3\zeta_1 \to$$
$$\to x_2^3 + x_1^2x_2 - \hat{\sigma}x_2 + [x_2x_3^2 - \zeta_1x_3] + x_3\zeta_1 \to$$
$$\to x_2^3 + x_1^2x_2 - \hat{\sigma}x_2 + [-x_2^3 - x_2x_1^2 + \hat{\sigma}x_2] \to$$
$$\to x_1x_2^2 + [x_1x_2x_1 - \zeta_3x_1] \to$$
$$\to x_1x_2^2 + [-x_1^2x_2 + x_1\zeta_3] - \zeta_3x_1 \to 0,$$
$$x_3 \cdot x_3 \cdot x_1 : \; x_2^2x_1 + x_1^3 - \hat{\sigma}x_1 - x_3x_1x_3 + x_3\zeta_2 \to$$
$$\to [-x_2x_1x_2 + x_2\zeta_3] + x_1^3 - \hat{\sigma}x_1 + [x_1x_3^2 - \zeta_2x_3] + x_3\zeta_2 \to$$
$$\to [x_1x_2^2 - \zeta_3x_2] + x_2\zeta_3 + x_1^3 - \hat{\sigma}x_1 + [-x_1^3 - x_1x_2^2 + \hat{\sigma}x_1] \to 0,$$
$$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 : \; -x_2x_3x_1 + \zeta_1x_1 + x_3x_1x_2 - x_3\zeta_3 \to$$
$$\to [x_2x_1x_3 - x_2\zeta_2] + \zeta_1x_1 + [-x_1x_3x_2 + \zeta_2x_2] - x_3\zeta_3 \to$$
$$\to [-x_1x_2x_3 + \zeta_3x_3] + \zeta_1x_1 + [x_1x_2x_3 - x_1\zeta_1] - x_3\zeta_3 \to 0.$$

Соотношения (21) и (22) означают, что элементы ζ_i лежат в центре алгебр $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$. Их старшими словами являются слова

$$x_j\zeta_k, \quad j,\, k \in \{1, 2, 3\}, \qquad \zeta_3\zeta_2,\; \zeta_3\zeta_1,\; \zeta_2\zeta_1. \tag{24}$$

Очевидно, что результаты композиций, в которых содержатся ζ_i, редукциями приводятся к 0.

Таким образом, согласно „бриллиантовой" лемме получаем, что соотношения (19) – (22) являются редуцированным базисом Гребнера, поэтому запрещенными подсловами являются слова (23) и (24).

Лемма доказана.

В силу предыдущей леммы произвольный элемент алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$ однозначно записывается в виде

$$v = \sum_{n_1=0}^{N_1}\zeta_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{N_2}\zeta_2^{n_2} \sum_{n_3=0}^{N_3}\zeta_3^{n_3} \sum_{m_1,m_2,\sigma}\mu_{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma}\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{\sigma}, \tag{25}$$

где $\mu_{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma} \in \mathbb{C}$.

Далее рассмотрим матрицы Паули:

$$J_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которые имеют следующие свойства:

1) $J_k^2 = I,\ k \in \{1, 2, 3\}$;

2) $\{J_k, J_l\} = 0,\ k, l \in \{1, 2, 3\},\ k \neq l$.

Утверждение 3. *Для произвольного*

$$\nu = (\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}) \in \mathbb{C}^6$$

такого, что

$$\varphi(\nu) := \sum_{k=1}^{3} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{3} \nu_{kl}^2 = \hat{\sigma}, \tag{26}$$

отображение $\pi_\nu(\cdot)$, *определенное на образующих формулами*

$$\pi_\nu(x_j) = \nu_{jk} J_k + \nu_{jl} J_l, \qquad \pi_\nu(\zeta_j) = 2\nu_{kj}\nu_{lj} I, \tag{27}$$

является двумерным представлением алгебры $\hat{\mathbf{Q}}_{4,2,\hat{\sigma}}$.

Доказательство. Поскольку $\pi_\nu(\zeta_j)$ — скалярные матрицы, соотношения (21) и (22) очевидным образом выполняются для матриц $\pi_\nu(\zeta_j)$ и $\pi_\nu(x_j)$. Для того чтобы показать выполнение соотношений (19) и (20), подсчитаем антикоммутаторы матриц $\pi_\nu(x_j)$:

$$\{\pi_\nu(x_k), \pi_\nu(x_l)\} = \nu_{kj}\nu_{lj}\{J_j, J_j\} + \nu_{kl}\nu_{lj}\{J_l, J_j\} +$$
$$+ \nu_{kj}\nu_{lk}\{J_j, J_k\} + \nu_{kl}\nu_{lk}\{J_l, J_k\} = 2\nu_{kj}\nu_{lj} I.$$

Таким образом, соотношение (19) выполняется. Далее, учитывая, что

$$\pi_\nu(x_j)^2 = \nu_{jk}^2 I + \nu_{jl}^2 I + \nu_{jk}\nu_{jl}\{J_k, J_l\} = (\nu_{jk}^2 + \nu_{jl}^2) I,$$

получаем

$$\pi_\nu(x_1)^2 + \pi_\nu(x_2)^2 + \pi_\nu(x_3)^2 = \left(\sum_{k=1}^{3} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{3} \nu_{kl}^2 \right) I.$$

Из (26) видно, что правая часть последнего равенства равна $\hat{\sigma} I$. Отсюда следует справедливость соотношения (20).

Утверждение доказано.

Лемма 5. *Пусть в представлении* (25) *существуют* m_1, m_2, σ *такие, что*

$$\mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} \neq 0.$$

Тогда найдутся такие $a, b, c \in \mathbb{R}$, *что* $a > 0,\ b > 0,\ 0 < |c| < 1,\ a^2 + b^2 + (-1)^{1-\hat{\sigma}} c^2 = \hat{\sigma}$ *и*

$$\pi_{\nu^0}(\upsilon) \neq 0, \qquad \nu^0 = \{0, a, 0, b, 0, i^{1-\hat{\sigma}} c\}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{N}_0$ четные натуральные числа и нуль, а через $\mathbb{N}_1$ — нечетные.

По формулам (27) получаем

$$\pi_{\nu^0}(x_1) = aJ_3, \qquad \pi_{\nu^0}(x_2) = bJ_1, \qquad \pi_{\nu^0}(x_3) = (i)^{1-\hat{\sigma}} c J_2,$$
$$\pi_{\nu^0}(\zeta_1) = \pi_{\nu^0}(\zeta_2) = \pi_{\nu^0}(\zeta_3) = 0,$$

следовательно,

$$\pi_{\nu^0}(\upsilon) = \sum_{m_1, m_2, \sigma} \mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} \, i^{(1-\hat{\sigma})\sigma} a^{m_1} b^{m_2} c^{\sigma} J_3^{m_1} J_1^{m_2} J_2^{\sigma} =$$

$$= \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \{0,1\}} \sum_{\sigma \in \{0,1\}} \left(\sum_{m_1 \in \mathbb{N}_{\sigma_1}} \sum_{m_2 \in \mathbb{N}_{\sigma_2}} \mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} a^{m_1} b^{m_2} \right) i^{(1-\hat{\sigma})\sigma} c^{\sigma} J_3^{\sigma_1} J_1^{\sigma_2} J_2^{\sigma}. \quad (28)$$

Допустим, что $\pi_{\nu^0}(\upsilon) = 0$ для всех ν^0, удовлетворяющих условиям леммы, и введем обозначения

$$P_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{N}_{\sigma_1} \\ n_2 \in \mathbb{N}_{\sigma_2}}} \mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} a^{m_1} b^{m_2}, \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \{0, 1\}.$$

Тогда, приравнивая правую часть (28) к нулю, получаем систему (ср. с утверждением 3 [1])

$$\begin{aligned} P_{000} + P_{100} + i^{-\hat{\sigma}} c P_{011} + i^{-\hat{\sigma}} c P_{111} &= 0, \\ P_{010} + P_{110} - i^{-\hat{\sigma}} c P_{001} - i^{-\hat{\sigma}} c P_{101} &= 0, \\ P_{010} - P_{110} + i^{-\hat{\sigma}} c P_{001} - i^{-\hat{\sigma}} c P_{101} &= 0, \\ P_{000} - P_{100} - i^{-\hat{\sigma}} c P_{011} + i^{-\hat{\sigma}} c P_{111} &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} P_{000} + i^{-\hat{\sigma}} c P_{111} &= 0, \\ P_{010} - i^{-\hat{\sigma}} c P_{101} &= 0, \\ P_{110} - i^{-\hat{\sigma}} c P_{001} &= 0, \\ P_{100} + i^{-\hat{\sigma}} c P_{011} &= 0. \end{aligned}$$

Но так как последняя система верна для любых троек $(a, b, \pm c)$ таких, что $0 < |c| < 1$, $a, b > 0$ и $a^2 + b^2 + (-1)^{1-\hat{\sigma}} c^2 = \hat{\sigma}$, получаем

$$P_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma} = 0, \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \{0, 1\},$$

для любых пар (a, b) таких, что $a^2 + b^2 = r^2$, $0 < r < 1$ $(r^2 = \hat{\sigma} + (-1)^{\hat{\sigma}} c^2)$. Т. е. каждый $P_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma}$ есть многочлен двух переменных, тождественно равный нулю на открытом секторе (на пересечении открытого единичного круга с первой четвертью), а следовательно, он тождественно равен нулю во всем $\mathbb{R}^2$. Таким образом, все $\mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} = 0$, что противоречит предположению леммы.

Утверждение 4. *Пусть* $\upsilon \neq 0$. *Тогда верны следующие утверждения*:

1. *Если существует* $\nu^0 = (0, \nu_{13}^0, 0, \nu_{21}^0, 0, \nu_{32}^0) \in \mathbb{C}^6$ *такой, что* $\nu_{13}^0 \neq 0$, $\nu_{21}^0 \neq 0$, $\nu_{32}^0 \neq 0$, $\varphi(\nu^0) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_{\nu^0}(\upsilon) \neq 0$, *то найдется*

$$\nu^1 = (0, \nu_{13}^1, \nu_{23}^1, \nu_{21}^1, 0, \nu_{32}^1) \in \mathbb{C}^6$$

такой, что $\nu_{13}^1 \neq 0$, $\nu_{23}^1 \neq 0$, $\nu_{21}^1 \neq 0$, $\nu_{32}^1 \neq 0$, $\varphi(\nu^1) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_{\nu^1}(\upsilon) \neq 0$.

2. *Если существует* $\nu^1 = (0, \nu_{13}^1, \nu_{23}^1, \nu_{21}^1, 0, \nu_{32}^1) \in \mathbb{C}^6$ *такой, что* $\nu_{13}^1 \neq$ $\neq 0$, $\nu_{23}^1 \neq 0$, $\nu_{21}^1 \neq 0$, $\nu_{32}^1 \neq 0$, $\varphi(\nu^1) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_{\nu^1}(\upsilon) \neq 0$, *то найдется*

$$\nu^2 = (\nu_{12}^2, \nu_{13}^2, \nu_{23}^2, \nu_{21}^2, 0, \nu_{32}^2) \in \mathbb{C}^6$$

такой, что $\nu^2_{12} \neq 0$, $\nu^2_{13} \neq 0$, $\nu^2_{23} \neq 0$, $\nu^2_{21} \neq 0$, $\nu^2_{32} \neq 0$, $\varphi(\nu^2) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_{\nu^2}(\upsilon) \neq 0$.

3. *Если существует* $\nu^2 = (\nu^2_{12}, \nu^2_{13}, \nu^2_{23}, \nu^2_{21}, 0, \nu^2_{32}) \in \mathbb{C}^6$ *такой, что* $\nu^2_{12} \neq 0$, $\nu^2_{13} \neq 0$, $\nu^2_{23} \neq 0$, $\nu^2_{21} \neq 0$, $\nu^2_{32} \neq 0$, $\varphi(\nu^2) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_{\nu^2}(\upsilon) \neq 0$, *то найдется*

$$\nu^3 = (\nu^3_{12}, \nu^3_{13}, \nu^3_{23}, \nu^3_{21}, \nu^3_{31}, \nu^3_{32}) \in \mathbb{C}^6$$

такой, что $\nu^3_{12} \neq 0$, $\nu^3_{13} \neq 0$, $\nu^3_{23} \neq 0$, $\nu^3_{21} \neq 0$, $\nu^3_{31} \neq 0$, $\nu^3_{32} \neq 0$, $\varphi(\nu^3) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_{\nu^3}(\upsilon) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение верно в силу непрерывности матрицы-функции $\pi_\nu(\upsilon)$ по ν.

Теорема 2. *Для любого* $\hat{Q}_{4,2,\hat{\sigma}} \ni \upsilon \neq 0$ *существует* $\nu \in \mathbb{C}^6$ *такой, что* $\varphi(\nu) = \hat{\sigma}$ *и* $\pi_\nu(\upsilon) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\hat{Q}_{4,2,\hat{\sigma}} \ni \upsilon \neq 0$, тогда υ принадлежит одному из следующих классов:

1) существуют m_1, m_2, σ такие, что

$$\mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} \neq 0;$$

2) все $\mu_{0,0,0,m_1,m_2,\sigma} = 0$ и существуют n_3, m_1, m_2, σ такие, что

$$\mu_{0,0,n_3,m_1,m_2,\sigma} \neq 0;$$

3) все $\mu_{0,0,n_3,m_1,m_2,\sigma} = 0$ и существуют n_2, n_3, m_1, m_2, σ такие, что

$$\mu_{0,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma} \neq 0;$$

4) все $\mu_{0,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma} = 0$ и существуют n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, σ такие, что

$$\mu_{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma} \neq 0.$$

В случае, когда υ принадлежит первому классу, в силу леммы 5 все доказано. В случае, когда υ принадлежит второму классу, его можно записать в виде

$$\upsilon = \zeta_3^{\hat{n}_3}\upsilon' +$$
$$+ \sum_{n_1=0}^{N_1}\zeta_1^{n_1}\sum_{n_2=1}^{N_2}\zeta_2^{n_2}\sum_{n_3=0}^{N_3}\zeta_3^{n_3}\sum_{m_1,m_2,\sigma}\mu_{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{\sigma} +$$
$$+ \sum_{n_1=1}^{N_1}\zeta_1^{n_1}\sum_{n_2=0}^{N_2}\zeta_2^{n_2}\sum_{n_3=0}^{N_3}\zeta_3^{n_3}\sum_{m_1,m_2,\sigma}\mu_{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma}x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{\sigma},$$

где $\hat{n}_3 > 0$ и υ' принадлежит первому классу. Тогда согласно лемме 5 существует $\nu^0 = (0, \nu^0_{13}, 0, \nu^0_{21}, 0, \nu^0_{32}) \in \mathbb{C}^6$ такой, что $\nu^0_{13} \neq 0$, $\nu^0_{21} \neq 0$, $\nu^0_{32} \neq 0$, $\varphi(\nu^0) = \hat{\sigma}$ и $\pi_{\nu^0}(\upsilon') \neq 0$, но согласно утверждению 4 найдется $\nu^1 = (0, \nu^1_{13}, \nu^1_{23}, \nu^1_{21}, 0, \nu^1_{32}) \in \mathbb{C}^6$ такой, что $\nu^1_{13} \neq 0$, $\nu^1_{23} \neq 0$, $\nu^1_{21} \neq 0$, $\nu^1_{21} \neq 0$, $\varphi(\nu^1) = \hat{\sigma}$ и $\pi_{\nu^1}(\upsilon') \neq 0$. Имеем

$$\pi_{\nu^1}(\upsilon) = \pi_{\nu^1}(\zeta_3)^{\hat{n}_3}\pi_{\nu^1}(\upsilon') = (2\nu^1_{23}\nu^1_{13})^{\hat{n}_3}\pi_{\nu^1}(\upsilon') \neq 0.$$

В случае, когда υ принадлежит третьему классу, его можно записать в виде

$$\upsilon = \sum_{n_1=1}^{N_1} \zeta_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \zeta_2^{n_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} \zeta_3^{n_3} \sum_{m_1,m_2,\sigma} \mu_{n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,\sigma} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{\sigma} + \zeta_2^{\hat{n}_2} \upsilon',$$

где $\hat{n}_2 > 0$ и υ' принадлежит либо первому, либо второму классу. Тогда согласно доказанному выше существует $\nu^1 = (0, \nu_{13}^1, \nu_{23}^1, \nu_{21}^1, 0, \nu_{32}^1) \in \mathbb{C}^6$ такой, что $\nu_{13}^1 \neq 0$, $\nu_{23}^1 \neq 0$, $\nu_{21}^1 \neq 0$, $\nu_{32}^1 \neq 0$, $\varphi(\nu^1) = \hat{\sigma}$ и $\pi_{\nu^1}(\upsilon') \neq 0$, но согласно утверждению 4 найдется $\nu^2 = (\nu_{12}^2, \nu_{13}^2, \nu_{23}^2, \nu_{21}^2, 0, \nu_{32}^2) \in \mathbb{C}^6$ такой, что $\nu_{12}^2 \neq 0$, $\nu_{13}^2 \neq 0$, $\nu_{23}^2 \neq 0$, $\nu_{21}^2 \neq 0$, $\nu_{32}^2 \neq 0$, $\varphi(\nu^2) = \hat{\sigma}$ и $\pi_{\nu^2}(\upsilon') \neq 0$. Имеем

$$\pi_{\nu^2}(\upsilon) = \pi_{\nu^2}(\zeta_2)^{\hat{n}_2} \pi_{\nu^2}(\upsilon') = (2\nu_{12}^2 \nu_{32}^2)^{\hat{n}_2} \pi_{\nu^2}(\upsilon') \neq 0.$$

И наконец, в случае, когда υ принадлежит четвертому классу, его можно записать в виде

$$\upsilon = \zeta_1^{\hat{n}_1} \upsilon',$$

где $\hat{n}_1 > 0$ и υ' принадлежит либо первому, либо второму, либо третьему классу. Тогда согласно доказанному выше существует $\nu^2 = (\nu_{12}^2, \nu_{13}^2, \nu_{23}^2, \nu_{21}^2, 0, \nu_{32}^2) \in \mathbb{C}^6$ такой, что $\nu_{12}^2 \neq 0$, $\nu_{13}^2 \neq 0$, $\nu_{23}^2 \neq 0$, $\nu_{21}^2 \neq 0$, $\nu_{32}^2 \neq 0$, $\varphi(\nu^2) = \hat{\sigma}$ и $\pi_{\nu^2}(\upsilon') \neq 0$. Следовательно, согласно утверждению 4 найдется $\nu^3 = (\nu_{12}^3, \nu_{13}^3, \nu_{23}^3, \nu_{21}^3, \nu_{31}^3, \nu_{32}^3) \in \mathbb{C}^6$ такой, что $\nu_{12}^3 \neq 0$, $\nu_{13}^3 \neq 0$, $\nu_{23}^3 \neq 0$, $\nu_{21}^3 \neq 0$, $\nu_{31}^3 \neq 0$, $\nu_{32}^3 \neq 0$, $\varphi(\nu^3) = \hat{\sigma}$ и $\pi_{\nu^3}(\upsilon') \neq 0$. Имеем

$$\pi_{\nu^3}(\upsilon) = \pi_{\nu^3}(\zeta_1)^{\hat{n}_1} \pi_{\nu^3}(\upsilon') = (2\nu_{31}^3 \nu_{21}^3)^{\hat{n}_1} \pi_{\nu^3}(\upsilon') \neq 0,$$

и доказательство завершено.

Рассмотрены все 4 варианта и, таким образом, теорема доказана.

1. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О тождествах в алгебрах $Q_{n,\lambda}$, порожденных идемпотентами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 10. – С. 1380 – 1390.
2. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. – М.: Мир, 1986. – 543 с.
3. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* Introduction to the theory of representations of finitely presented ∗-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1 – 261.
4. *Rabanovich V., Samoilenko Yu. S.* On representation of F_n-algebras and invertibility symbols // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – **4**, № 4. – P. 86 – 96.
5. *Rabanovich V., Samoilenko Yu. S.* On representation of F_n-algebras and invertibility symbols // Operator Theory Adv. and Appl. – 1999. – **118**. – P. 347 – 357.
6. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1990. – **57**. – С. 5 – 177.
7. *Галінський Д. В., Кругляк С. А.* Зображення ∗-алгебр, породжених лінійно пов'язаними ортопроекторами // Вісн. Київ. ун-ту. – 1999. – Вип. 2. – С. 24 – 31.

Получено 14.07.2003