УДК 517.9

М. В. Мороз (Рівнен. техн. ун-т)

ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДВОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We investigate the existence of periodic solutions of a system of two differential equations with pulse action on a straight line in the case where a stable knot or a stable focus is a singular point of this system.

Досліджено існування періодичних розв'язків системи двох лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією на площині у випадку, коли особливою точкою даної системи є стійкий вузол або стійкий фокус.

Диференціальні рівняння з імпульсною дією [1] є зручною математичною моделлю для ряду задач прикладної механіки [2], математичної економіки [3], медицини і біології [4] та ін., тобто описують процеси в реальних системах з імпульсним збуренням. Питання існування періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані та нефіксовані моменти часу вивчалося у роботах [1, 5–9]. Так, у [5] розглядається одновимірна задача теплопровідності з авторегульованою імпульсною підтримкою, а саме процес охолодження стержня, на кінцях якого підтримується нульова температура, причому в моменти, коли загальна кількість тепла у стержні досягає заданого значення, відбувається миттєва підкачка тепла в стержень. Таким чином, моменти теплових імпульсів визначаються самим процесом. Вивчено, зокрема, питання періодичних розв'язків такої задачі. Важливим, на наш погляд, є пошук періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на площині, коли моменти імпульсів визначаються розв'язком даної системи.

Розглянемо вектор $h = (h_1, h_2)$ та множини

$$S_0 = \{(x_1, x_2) \in R^2 : ax_1 + bx_2 + c_1 = 0\},$$

$$S_h = \{(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \in R^2 : (x_1, x_2) \in S_0 \ \ i \ \ ax_1 + bx_2 + c_2 = 0\},$$

$$S_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2 : ax_1 + bx_2 + c_1 > 0\},$$

$$S_- = \{(x_1, x_2) \in R^2 : ax_1 + bx_2 + c_1 < 0\},$$

де a, b, c_1, c_2 — константи. Вважаємо, що $a^2 + b^2 \neq 0$, $c_1 \cdot c_2 > 0$, $\{0\} \in S_-$ і

$$0 < |c_1| < |c_2|, \tag{1}$$

$$c_1 - c_2 = ah_1 + bh_2. \tag{2}$$

Із співвідношень (1), (2) випливає, що пряма S_0 розташована між прямою S_h та початком координат.

Дослідимо рух фазової точки, що описується системою рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = Jx(t), \quad \text{якщо} \quad x(t) \in S_+, \tag{3}$$

$$x(t+0) - x(t-0) = h, \quad \text{якщо} \quad x(t-0) \in S_0, \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

де $x(t) \in R^2$ для всіх $t \geq t_0 \geq 0$, J — (2×2)-вимірна жорданова матриця [10, с. 66], власні значення якої знаходяться в лівій комплексній півплощині, і $x_0 \in S_0$. Рух фазової точки здійснюється таким чином: у час $t = t_0$ точка

$x = x(t)$, що знаходиться у стані $x_0 \in S_0$, змінює „миттєво" своє положення за законом (4), тобто відбувається перехід з точки x_0 в точку $x(t_0+0) = x_0 + h$, яка знаходиться в S_+. З перебігом часу t фазова точка рухається по кривій $\{(t,x) \in R^3 : x = \eta(t, x_0 + h, t_0),\ t \geq t_0\}$, де $x = \eta(t, x_0 + h, t_0)$ — розв'язок диференціального рівняння (3), що задовольняє умову $x(t_0) = x_0 + h$. Рух по кривій здійснюється до моменту часу $t = t_1 > t_0$, коли точка попадає на пряму S_0. При $t = t_1$ відбувається „миттєва" зміна положення фазової точки за законом (4), тобто точка $x(t_1 - 0)$ переходить у точку $x(t_1+0) = x(t_1 - 0) + h$, яка знаходиться на прямій S_h. Фазова точка знову рухається по кривій $\{(t,x) \in R^3 : x = \eta(t, x_1, t_1),\ t \geq t_1\}$, де $x = \eta(t, x_1, t_1)$ — розв'язок диференціального рівняння (3), що задовольняє умову $x(t_1) = x_1$ до наступного моменту часу t_2, коли ця точка знову попаде на пряму S_0 і т. д. Отже, „миттєве" перекидання фазової точки за законом (4) відбуватиметься нескінченну кількість разів, тобто існує нескінченна послідовність імпульсів, моменти виникнення яких позначаємо $t_1(\geq t_0) < < t_2 < \ldots$.

Встановимо умови, за яких рух фазової точки є періодичним.

Оскільки $x(t) = e^{tJ}(x_0 + h)$ — розв'язок задачі (3)–(5) при $t_0 < t < t_1$, $x(t) = e^{tJ}(x_1 + h)$ — розв'язок цієї ж задачі при $t_1 < t < t_2$ і т. д. $(x(t_0), x(t_1), \ldots \in S_0)$, то існування періодичних розв'язків задачі (3)–(5) зводиться до знаходження нерухомих точок оператора

$$\Phi(x) = e^{TJ}(x + h), \tag{6}$$

які шукаються з системи

$$x = e^{TJ}(x + h), \tag{7}$$

де $x \in S_0$, T — період розв'язку.

Позначимо через $\varphi(h)$ кут між віссю OX_1 та вектором h.

Теорема. *Нехай власні значення λ_1, λ_2 матриці J знаходяться в лівій комплексній півплощині. Для того щоб існували періодичні розв'язки системи* (3)–(5), *достатньо виконання однієї з умов*:

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in R$;

2) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega \quad (\omega \neq 0)$;

а) $\varphi(h) \in \left(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b};\ \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\omega}\right]$, *якщо* $\omega > 0$;

б) $\varphi(h) \in \left(\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\omega};\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right]$, *якщо* $\omega < 0$.

Доведення основане на наступних лемах.

Лема 1. *Якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $(\lambda < 0,\ \lambda \in R)$, *то оператор* Φ *має нерухому точку* $X^*\left(-\dfrac{c_1 h_1}{ah_1 + bh_2}, -\dfrac{c_1 h_2}{ah_1 + bh_2}\right)$ *з періодом* $T = \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{c_1}{c_2}$.

Доведення. З умови леми 1 система (7) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\lambda T}; \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\lambda T}; \\ ax_1 + bx_2 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є координати (x_1, x_2) та період T нерухомої точки X^*, тобто

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{c_1 h_1}{ah_1 + bh_2}, -\frac{c_1 h_2}{ah_1 + bh_2}\right) \qquad (ah_1 + bh_2 \neq 0 \text{ згідно з } (1),(2))$$

і $T = \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{c_1}{c_2}$. Лему доведено.

Лема 2. *Якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $(\lambda < 0,\ \lambda \in R)$, *то множина нерухомих точок оператора* Φ (6) *є непорожньою.*

Доведення. Згідно з формою матриці J система (7) має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\lambda T} + T(x_2 + h_2)e^{\lambda T}; \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\lambda T}; \\ ax_1 + bx_2 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Після виключення T та x_2 одержуємо

$$\frac{bx_1}{ax_1 + c_1} = \frac{b(x_1 + h_1)}{ax_1 - bh_2 + c_1} - \frac{1}{\lambda} \ln \left| 1 + \frac{bh_2}{ax_1 - bh_2 + c_1} \right|.$$

Тоді задача існування нерухомих точок оператора Φ еквівалентна задачі про існування нулів функції:

$$f(x_1) = \frac{bx_1}{ax_1 + c_1} - \frac{b(x_1 + h_1)}{ax_1 - bh_2 + c_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \left| 1 + \frac{bh_2}{ax_1 - bh_2 + c_1} \right|.$$

Дослідження функції приводить до висновку: згідно з теоремою Больцано – Коші [11, с. 168] для функції f існує принаймні один нуль на інтервалі:

а) $\left(-\infty; -\dfrac{c_1}{a}\right)$, якщо $\dfrac{c_1}{a}(\lambda(c_1 - c_2) + ah_2) > 0$ і $abh_2 > 0$;

б) $\left(\dfrac{bh_2 - c_1}{a}; +\infty\right)$, якщо $\dfrac{c_1}{a}(\lambda(c_1 - c_2) + ah_2) < 0$ і $abh_2 > 0$;

в) $\left(-\dfrac{c_1}{a}; +\infty\right)$, якщо $\dfrac{c_1}{a}(\lambda(c_1 - c_2) + ah_2) > 0$ і $abh_2 \leq 0$, $a \neq 0$;

г) $\left(-\infty; -\dfrac{bh_2 - c_1}{a}\right)$, якщо $\dfrac{c_1}{a}(\lambda(c_1 - c_2) + ah_2) < 0$ і $abh_2 \leq 0$, $a \neq 0$;

д) $(-\infty; +\infty)$, якщо $a = 0$.

Отже, множина нерухомих точок оператора Φ є непорожньою, що й завершує доведення леми 2.

Лема 3. *Якщо* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *і* $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq \beta;\ \alpha, \beta < 0;\ \alpha, \beta \in R)$, *то множина нерухомих точок оператора* Φ (6) *є непорожньою.*

Доведення. З форми матриці J система (7) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 = (x_1 + h_1)e^{\alpha T}; \\ x_2 = (x_2 + h_2)e^{\beta T}; \\ ax_1 + bx_2 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Після перетворень одержуємо

$$\left(\frac{x_1}{x_1+h_1}\right)^{\gamma} = \frac{ax_1+c_1}{ax_1-bh_2+c_1},$$

де $\gamma = \beta/\alpha$.

Як і у доведенні леми 2, розглянемо функцію

$$f(x_1) = \left(\frac{x_1}{x_1+h_1}\right)^{\gamma} - \frac{ax_1+c_1}{ax_1-bh_2+c_1}.$$

Дослідивши поведінку функції, одержимо, що за теоремою Больцано – Коші [11, с. 168] функція f має нуль на проміжку:

а) $\left(\frac{bh_2-c_1}{a};\, 0\right]$, якщо $h_1<0,\ a\neq 0$;

б) $\left[0;\, \frac{bh_2-c_1}{a}\right)$, якщо $h_1>0,\ a\neq 0$;

в) $(-\infty;\, 0]$, якщо $h_1<0,\ a=0$;

г) $[0;\, +\infty)$, якщо $h_1>0,\ a=0$.

Оскільки задача про існування нулів функції f еквівалентна задачі про існування нерухомих точок оператора Φ, то лему 3 доведено повністю.

Лема 4. *Нехай* $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\omega$ *і* $J=\begin{pmatrix}\alpha & -\omega\\ \omega & \alpha\end{pmatrix}$, $\alpha<0$. *Система* (3)–(5) *має періодичні розв'язки, якщо*:

1) $\varphi(h)\in\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b};\, \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega}\right]$ *при* $\omega>0$;

2) $\varphi(h)\in\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega};\, \pi+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right]$ *при* $\omega<0$.

Доведення. У полярній системі координат система (3) має вигляд

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \tag{8}$$

Рух фазових точок у системі (8) здійснюється за логарифмічними спіралями

$$r = r_0 e^{\alpha\psi/\omega}, \qquad \alpha<0,$$

причому всі їхні траєкторії з часом прямують до точки спокою $r=0$ [1].

Нехай $\omega>0$ і Φ — множина кутів $\varphi(L,K)$ між віссю OX_1 та вектором LK $(L\in S_0,\ K\in S_h)$. Покажемо, що $\Phi=\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b};\, \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega}\right]$.

Відомо, що існує тільки одна логарифмічна спіраль, яка дотикається до прямої S_h [12, с. 784]. Нехай K^* — точка дотику цієї спіралі з S_h і $L^*(r_1,\psi_1)$ — відповідно перша по траєкторії точка перетину спіралі з S_0. З поведінки логарифмічної спіралі випливає, що вона перетинає пряму S_0 після зустрічі з S_h у точках з координатами (r,ψ), для яких виконуються нерівності

$$r > r_1 \quad \text{і} \quad \psi > \psi_1 \qquad (\psi,\psi_1\in[0;2\pi]). \tag{9}$$

Зафіксуємо на прямій S_0 довільну точку $L(r,\psi)$, для якої виконується (9), і розглянемо логарифмічну спіраль, що проходить через цю точку. Існують дві точки K_1 і K_2 з S_h, для яких L — найближча по траєкторії точка перетину логарифмічної спіралі та прямої S_0. Тоді, якщо $\operatorname{dist}(L,K_1) < \operatorname{dist}(L,K_2)$, де $\operatorname{dist}(L,K)$ — відстань між точками L і K, мають місце границі [12, с. 787]

$$\lim_{r\to+\infty} \varphi(L,K_1) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega}, \qquad \lim_{r\to+\infty} \varphi(L,K_2) = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}. \tag{10}$$

Якщо $r_1 < r < +\infty$ для $L(r,\psi)$, то $\varphi(L,K_2)$, $\varphi(L,K_1) \in \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b};\ \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega}\right]$. Це випливає з того, що оскільки система диференціальних рівнянь (8) лінійна, то її розв'язки неперервно залежать від початкових даних [13]. Тому $\varphi(L,K)$ неперервно залежить від K, а при неперервному відображенні зв'язна множина переходить у зв'язну множину. Точка K^* завжди належить інтервалу (K_1,K_2), тоді $\varphi(L^*,K^*) \in (\varphi(L,K_2), \varphi(L,K_2))$. Отже, $\Phi = \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{b};\ \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega}\right]$.

Проводячи аналогічні міркування, доводимо справедливість оцінки 2, тобто

$$\Phi = \left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega};\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right], \quad \text{якщо} \quad \omega < 0.$$

Доведення теореми. Оскільки існування періодичних розв'язків задачі (3) – (5) еквівалентне існуванню нерухомих точок оператора Φ, то з доведених лем 1 – 4 випливає твердження теореми.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.
2. *Артемьев И. Т., Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластической анизотропии // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 1. – С. 73 – 78.
3. *Горбунов В. К., Нураханова Г. У.* Процессы с управляемыми разрывами фазовых траекторий и моделирование производства с перемещением основных фондов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1975. – № 6. – С. 55 – 61.
4. *Петровский А. М.* Системный анализ некоторых медико-биологических проблем, связанных с управлением лечения // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 2. – С. 54 – 62.
5. *Мышкис А. Д.* Процесс теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Там же. – 1995. – № 2. – С. 35 - 43.
6. *Самойленко В. Г., Елгондиев К. К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 141 – 148.
7. *Перестюк Н. А., Самойленко В. Г., Елгондиев К. К.* Отображение последования и периодические решения систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелінійні. коливання. – 1998. – № 1. – С. 44 – 50.
8. *Перестюк Н. А., Ткач А. Б.* Периодические решения слабонелинейной системы уравнений в частных производных с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 601 – 605.
9. *Самойленко М. А., Самойленко В. Г., Собчук В. В.* Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією // Там же. – 1999. – **51**, № 6. – С. 827 – 834.
10. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 319 с.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.
12. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1963. – 872 с.
13. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 468 с.

Одержано 30.08.2000