УДК 519.3 + 531.014 + 513.83

Ю. Б. Зелинский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И СМЕЖНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

The classical Helly theorem does not admit to obtain information concerning a family of convex compact sets in the Euclidean n-dimensional space if it is known that only subfamilies consisting of k elements, $0 < k \le n$, possess nonempty intersections. We correct the Helly theorem for this case and also investigate behavior of generally convex families.

З класичної теореми Хеллі неможна одержати інформацію про сім'ю опуклих компактів в n-вимірному евклідовому просторі, якщо відомо, що непусті перетини мають тільки підсім'ї, що складаються з k елементів, $0 < k \le n$. Уточнено теорему Хеллі для такого випадку, а також досліджено поведінку узагальнено опуклих сімей.

Классическая теорема Хелли [1] утверждает, что семейство выпуклых компактов в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ имеет непустое пересечение тогда и только тогда, когда каждое его подсемейство, состоящее из $n+1$ элементов, имеет непустое пересечение. Из этой теоремы нельзя получить информацию о семействе, если известно, что непустые пересечения имеют подсемейства, состоящие из k элементов, где $0 < k \le n$. Исследованию этого случая, а также поведения обобщенно выпуклых семейств посвящена настоящая работа.

1. Семейства выпуклых компактов. Пусть $H^i(K)$ — приведенная i-я группа когомологий Александера (т. е. предполагаем, что группы когомологий точки тривиальны) [2] с коэффициентами в группе целых чисел.

Теорема 1. *Пусть $A = \{A_i\}$ — семейство выпуклых компактов в $\mathbf{R}^n$ таких, что каждые k элементов из них имеют общую точку. Тогда или каждые $k+1$ компактов этого семейства имеют общую точку, или найдутся $k+1$ компактов такие, что $H^{k-1}(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i') \neq 0$.*

Доказательство. Рассуждения, приводящие к доказательству, разобьем на несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть задано семейство выпуклых компактов $\{A_i\}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, 2, \ldots, m, \ldots$, такое, что любой набор из k элементов имеет непустое пересечение. Тогда $H^j(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cap A_{m+1} \cap \ldots \cap A_k) = 0$ для всех j, m, $0 \le m \le k$.*

Доказательство. Утверждение очевидно для $m = 1$. Воспользуемся индукцией по m. Предположим, что оно верно для m произвольных наборов, содержащих не более k компактов. Докажем его для $m + 1 \le k$. Применим точную когомологическую последовательность Майера – Вьеториса для триады

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} \cap A_{m+2} \cap \ldots \cap A_k,$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m A_{m+2} \cap \ldots \cap A_k,\ A_{m+1} \cap \ldots \cap A_k).$$

Выпишем три ее последовательных члена

$$H^j[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \cap A_{m+1} \cap A_{m+2} \cap \ldots \cap A_k] \to$$

$$\to H^{j+1}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1}) \cap A_{m+2} \cap \ldots \cap A_k] \to$$

$$\to H^{j+1}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \cap A_{m+2} \cap \ldots \cap A_k] \oplus H^{j+1}(A_{m+1} \cap \ldots \cap A_k).$$

Согласно предположению индукции все слагаемые в крайних элементах последовательности нулевые. Теперь из точности последовательности следует, что оцениваемая группа тоже будет нулевой.

Лемма 2. *Пусть задано семейство выпуклых компактов* $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k+1, \ldots$, *такое, что любой набор из* k *элементов имеет непустое пересечение. Тогда*

$$H^{j-2}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \approx$$

$$\approx H^{j-1}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j \cup A_{j+1}) \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_{k+1}], \quad 2 \le j \le k.$$

Доказательство. Рассмотрим точную когомологическую последовательность триады

$$[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j \cup A_{j+1}) \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_{k+1},$$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1},\ A_{j+1} \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_k].$$

Выпишем четыре ее последовательных члена

$$H^{j-2}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j) \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \oplus H^{j-2}(A_{j+1} \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_k) \to$$

$$\to H^{j-2}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \to$$

$$\to H^{j-1}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j \cup A_{j+1}) \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \to$$

$$\to H^{j-1}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j) \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_{k+1}] \oplus H^{j-1}(A_{j+1} \cap A_{j+2} \cap \ldots \cap A_k).$$

Согласно предыдущей лемме все слагаемые в крайних элементах последовательности нулевые потому, что в них оцениваются наборы, содержащие не более k компактов. Теперь из точности последовательности следует изоморфизм двух средних групп, что и требовалось доказать.

***Следствие* 1.** *При выполнении условий леммы* 2 *имеет место цепочка изоморфизмов*

$$H^0[(A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}] \approx H^1[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 \cap \ldots \cap A_{k+1}] \approx$$

$$\approx H^{k-1}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1}].$$

Эта цепочка получается $(k-1)$-кратным применением леммы 2.

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим, что $\bigcap_1^{k+1} A_i = \varnothing$. Тогда множества $A_1 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ и $A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ не пересекаются и их объединение $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ — несвязное множество. Поэтому нулевая группа когомологий этого объединения отлична от нуля. Теперь утверждение теоремы будет результатом следствия 1.

Анализируя ход доказательства, легко убедиться, что теорема и все вспомогательные утверждения будут справедливы, если семейство выпуклых компактов заменим на семейство ациклических компактов (группы когомологий которых совпадают с соответствующими группами точки), но дополнительно потребуем, чтобы любое подсемейство, состоящее из не более чем k компактов, имело ациклическое пересечение.

Простейший пример, на котором реализуется теорема, — семейство $(k-1)$-мерных граней k-мерного симплекса, объединение которых дает границу симплекса.

***Следствие* 2.** *Пусть* $A = \{A_i\}$ — *семейство выпуклых компактов в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда или все компакты имеют непустое пересечение, или существует подсемейство* $\{A_1'\}$, $i = 1, \ldots, k$, *где* $k < n$ *такое, что* $H^{k-1}(\bigcup_j^{k+1} A_j') \ne 0$.

Для доказательства достаточно выбрать минимальное k, для которого подсемейство мощности k не имеет общей точки. Неравенство $k < n + 1$ очевидно следует из теоремы Хелли.

2. Семейства m-выпуклых компактов.

Определение. *Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ назовем m-выпуклым, $m > 0$, если для произвольной точки $x \in \mathbf{R}^n \setminus E$ найдется вещественная m-мерная плоскость $\boldsymbol{L}$ такая, что $x \in \boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L} \cap E = \varnothing$.*

Ряд характеристик m-выпуклых компактов найден в [3].

Лемма 3. *Пусть $K = \bigcup_1^l K_j$, где K_j — $(n-1)$-выпуклые компакты такие, что $\bigcap_1^l K_j = \varnothing$. Тогда $H^i(K) = 0$ при $i \geq l - 1$.*

Доказательство. Очевидно, что $l \geq 2$, иначе не выполнено условие пустоты пересечения. Пусть $l = 2$. Выпишем точную когомологическую последовательность Майера – Вьеториса

$$H^{i-1}(K_1 \cap K_2) \to H^i(K) \to H^i(K_1) \oplus H^i(K_2). \qquad (*)$$

Первая группа равна нулю в силу пустоты пересечения. Для слагаемых третьего члена последовательности $H^i(K_j) = 0$ при $j = 1, 2$, $i \geq 1$ [3]. Теперь из точности последовательности следует утверждение теоремы. Воспользуемся индукцией по l. Предположим, что теорема верна для объединений, содержащих не более $l - 1$ слагаемых, и докажем ее для l слагаемых. Аналогично предыдущему рассмотрим точную последовательность

$$H^i\left[\left(\bigcup_1^{l-1} K_j\right) \cap K_l\right] \to H^i\left(\bigcup_1^{l} K_j\right) \to H^i\left(\bigcup_1^{l-1} K_j\right) \oplus H^i(K_l). \qquad (**)$$

Согласно лемме 16.3 [3] $H^i(\bigcup_1^{l-1} K_j) = 0$ при $i \geq l - 1$.

Заметим дальше, что $(\bigcup_1^{l-1} K_j) \cap K_l = \bigcup_1^{l-1} (K_j \cap K_l)$, где все $K'_j = K_j \cap K_l$ $(n-1)$-выпуклые компакты такие, что $\bigcap_1^{l-1} K'_j = \varnothing$. Отсюда, по предположению индукции, $H^i[(\bigcup_1^{l-1} K_j) \cap K_l] = 0$ для всех $i - 1 \geq l - 2$, а согласно лемме 16.3 [3] $H^i(\bigcup_1^{l-1} K_j) = 0$ для всех $i \geq l - 1$. Поэтому из точности последовательности $H^i(\bigcup_1^{l} K_j) = 0$ при $i \geq l - 1$.

Пример. Рассмотрим на плоскости $\mathbf{R}^2$ три 1-выпуклые множества, каждое из которых состоит из двух точек из заданных трех a, b, c: $A = (a, b)$, $B = (b, c)$, $C = (a, c)$. Эти три множества попарно пересекаются и $A \cap B \cap C = \varnothing$, но в отличие от выпуклого случая объединение $A \cup B \cup C$ не является носителем 1-мерного цикла.

Теорема 2. *Пусть $\{K_j\}$, $i = 1, \ldots, l$, — семейство m-выпуклых компактов $l < n/(n-m)$ таких, что каждые $(l-1)$ из них пересекаются. Тогда или все они имеют непустое пересечение, или $H^i(\bigcup_1^l K_j) = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 2$.*

Доказательство. В лемме 3 эта теорема доказана при $m = n - 1$. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $\bigcap_1^l K_j = \varnothing$. Пусть $l = 2$. Как и в лемме 2, воспользуемся точной последовательностью (*). Первая группа равна нулю в силу пустоты пересечения. В каждом слагаемом третьего члена последовательности имеем группы когомологий m-выпуклого компакта.

Согласно [3] справедлива оценка $H_i(K_j) = 0$, $j = 1, 2$, $i > n - n/(n-m) + 1$. Теперь из точности последовательности вытекает доказательство теоремы. Дальше воспользуемся индукцией по l. Предположим, что теорема доказана для объединений, содержащих не более $l-1$ слагаемых из $(m+1)$-выпуклых компактов. Рассмотрим точную последовательность (**). Согласно теореме 16.3 [3] $H^i(\bigcup_1^{l-1} K_j) = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 2$. Далее, $(\bigcup_1^{l-1} K_j) \cap K_l = \bigcup_1^{l-1}(K_j \cap K_l)$, где все $K_j' = K_j \cap K_l$ — m-выпуклые компакты, а пересечение $\bigcap_1^{l-1} K_j' = \varnothing$ по условию. Поэтому $H^i[\bigcup_1^{l-1}(K_j \cap K_l)] = 0$ при $i > n - n/(n-m) + l - 3$. Согласно предположению индукции $H^i(K_l) = 0$ при $i > n - n/(n-m)$ [3]. Теперь из точности последовательности получаем утверждение теоремы.

Очевидно, далее по индукции можно получить следующие утверждения.

Следствие 3. *Пусть* $\{K_j\}$, $j = 1, \ldots, l$, — *семейство* m*-выпуклых компактов* $k < l < n/(n-m)$ *таких, что каждые его* k *элементов имеют непустое пересечение. Тогда или все* l *элементов семейства имеют непустое пересечение, или найдется подсемейство из* $k < p \le l$ *элементов* $\{K_j'\}$ *такое, что* $H^i(\bigcup_1^p K_j') = 0$ *при* $i > n - n/(n-m) + l - 1 - (l-p) = n - n/(n-m) + p - 1$, *причем* $\bigcap_1^p K_s = \varnothing$.

Следствие 4. *Объединение трех линейно выпуклых компактов, если они попарно пересекаются, а* $\bigcap_1^3 K_i = \varnothing$, *имеет тривиальные группы когомологий в размерностях* $i > n/2 + 1$.

Следствие 5. *Пусть* $\{K_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, — *семейство* m*-выпуклых компактов таких, что каждые его* $l-1$ *элементов имеют непустое пересечение* $l < n/(n-m)$. *Тогда или каждые* l *элементов семейства имеют непустое пересечение, или существует подсемейство из* l *элементов* $\{K_j'\}$ *такое, что* $H^i(\bigcup_1^l K_s') = 0$ *при* $i > n - n/(n-m) + l - 2$.

Следствие 6. *Пусть* $\{K_j\}$, $j = 1, \ldots, s$, — *семейство* m*-выпуклых компактов таких, что никакие* $l < n/(n-m)$ *не пересекаются. Тогда для произвольного набора из* l *элементов* $H^i(\bigcup_1^l K_s) = 0$ *при* $i > n - n/(n-m) + l - 2$.

Следствие 7. *Пусть* $\{K_j\}$, $j = 1, \ldots, l$, — *семейство* m*-выпуклых компактов* $l < n/(n-m)$ *таких, что* $H^k(\bigcup_1^l K_j) \ne 0$ *при* $k = n - n/(n-m) + l - 1$. *Тогда* $\bigcap_1^l K_j \ne \varnothing$.

1. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли. – М.: Мир, 1968. – 160 с.
2. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
3. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – К.: Наук. думка, 1993. – 264 с.

Получено 05.05.2000