УДК 517.9

О. П. Олійниченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНИМ ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

For systems of functional-differential equations with a nonlinear deviation of argument, we obtain sufficient conditions for the existence of families of their solutions that are continuously differentiable for $t \in R^+$. We also investigate the asymptotic behavior of these solutions.

Одержано достатні умови існування сімей неперервно-диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з нелінійним відхиленням аргументу і досліджено їх асимптотичну поведінку.

Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь

$$x'(t) = Ax(t) + F(t, x(t), x(f(t))), \tag{1}$$

де $t \in R^+$, A — дійсна постійна матриця розміру $n \times n$, функції $F\colon R^+ \times R^n \times \times R^n \to R^n$, $f(t)\colon R^+ \to R^+$ неперервні.

Для окремих класів таких рівнянь проведено багато досліджень (див., наприклад, [1 – 7]). Найчастіше розглядалися питання існування і єдиності різного роду розв'язків таких рівнянь і вивчалися їх асимптотичні властивості [1 – 5]). У даній роботі встановлюються достатні умови існування сімей неперервно-диференційовних розв'язків і досліджується їх асимптотична поведінка в залежностівід властивостей матриці A.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. $\left|e^{At}\right| \le Ne^{\pm\alpha t}$, $t \in R^+$, *де* α, N — *деякі додатні сталі;*

2. $|F(t, x', y') \pm F(t, x', y'')| \le L(t)\,(|x' \pm x''| + |y' \pm y''|)$, *де* $t \in R^+$, x', x'', y', $y'' \in R^n$, $L(t)$ — *деяка неперервна невід'ємна функція і* $F(t, 0, 0) \equiv 0$;

3. $N \int\limits_0^{+\infty} (1 + e^{\alpha(\tau \pm f(\tau))}) L(\tau)\,d\tau < 1$.

Тоді існує n-параметрична сім'я неперервно-диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків системи (1), *які задовольняють умову*

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = 0. \tag{2}$$

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = e^{At}c + \int\limits_0^t e^{A(t \pm \tau)} F(\tau, x(t), x(f(\tau)))\,d\tau, \tag{3}$$

де $c \in R^n$, кожен розв'язок якої є розв'язком системи (1).

Неперервний при $t \in R^+$ розв'язок системи рівнянь (3) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень. Для цього покладемо

$$\begin{gathered} x_0(t) = 0, \\ x_{n+1}(t) = e^{At}c + \int\limits_0^t e^{A(t \pm \tau)} F(\tau, x_n(\tau), x_n(f(\tau)))\,d\tau, \quad n = 0, 1, \ldots . \end{gathered} \tag{4}$$

Покажемо, що при всіх $t \in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$ виконуються оцінки

$$|x_{n+1}(t) \pm x_n(t)| \leq N|c|e^{\pm\alpha t}q^n, \tag{5}$$

де

$$q = N\int_0^{+\infty}(1 + e^{\alpha(\tau \pm f(\tau))})L(\tau)d\tau.$$

Дійсно, при $n = 0$ маємо

$$|x_1(t) \pm x_0(t)| = \left|e^{At}c\right| \leq N|c|e^{\pm\alpha t},$$

тобто в цьому випадку оцінка (5) виконується. Нехай (5) виконується для деякого $n-1$. Тоді на підставі (4) і умов теореми для n одержуємо

$$|x_{n+1}(t) \pm x_n(t)| = \left|\int_0^t e^{A(t\pm\tau)}(F(\tau, x_n(\tau), x_n(f(\tau))) \pm F(\tau, x_{n\pm1}(\tau), x_{n\pm1}(f(\tau))))d\tau\right| \leq$$

$$\leq \int_0^t e^{A(t\pm\tau)}L(\tau)(|x_n(\tau) \pm x_{n\pm1}(\tau)| + |x_n(f(\tau)) \pm x_{n\pm1}(f(\tau))|)d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t Ne^{\pm\alpha(t\pm\tau)}L(\tau)\left(N|c|e^{\pm\alpha\tau}q^{n\pm1} + N|c|e^{\pm\alpha f(\tau)}q^{n\pm1}\right)d\tau \leq$$

$$\leq N|c|e^{\pm\alpha t}q^{n\pm1}N\int_0^t(1 + e^{\alpha(\tau\pm f(\tau))})L(\tau)d\tau \leq N|c|e^{\pm\alpha t}q^n.$$

Таким чином, оцінки (5) дійсно виконуються при всіх $t \in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$. Тоді послідовність вектор-функцій $\{x_n(t),\ n \geq 0\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $x(t) = \lim_{t\to+\infty} x_n(t)$, яка є розв'язком (це легко показати, якщо перейти в (4) до границі при $n \to +\infty$) системи рівнянь (3). Оскільки згідно з (5) маємо нерівність $|x(t)| \leq N|c|(1 \pm q)^{\pm1}e^{\pm\alpha t}$, то $x(t)$ задовольняє умову (2). Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку, коли $f(t) \equiv t$, система (1) є системою звичайних диференціальних рівнянь і умова 3 теореми 1 набуває вигляду

$$2N\int_0^{+\infty}L(\tau)d\tau < 1.$$

Якщо ж $f(t) \geq t$ $(f(t) \leq t)$, то ця умова стає дещо слабкішою (сильнішою).

Припустимо тепер, що для системи диференціально-функціональних рівнянь (1) виконуються наступні умови:

1. $N_1e^{\pm\alpha_1 t} \leq \left|e^{\pm At}\right| \leq N_2e^{\pm\alpha_2 t}$, $t \in R^+$, де $\alpha_1, \alpha_2, N_1, N_2$ — деякі додатні сталі $(N_1 < N_2,\ \alpha_1 > \alpha_2)$;

2. $|F(t, x', y') \pm F(t, x', y'')| \leq L(t)(|x' \pm x''| + |y' \pm y''|)$, *де* $t \in R^+$, x', x'', $y', y'' \in R^n$, $L(t)$ — *деяка неперервна невід'ємна функція і* $F(t, 0, 0) \equiv 0$;

3. $\dfrac{N_2}{N_1}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(\alpha_1\pm\alpha_2)\tau}(1 + e^{\alpha_1(f(\tau)\pm\tau)})L(\tau)d\tau < 1.$

Дослідимо для неї питання про існування неперервно-диференційовних на $t \in R^+$ розв'язків. Для цього виконаємо в (1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = e^{At} y(t). \tag{6}$$

Тоді для нової невідомої вектор-функції $y(t)$ одержимо систему рівнянь вигляду

$$y'(t) = e^{\pm At} F(t, e^{At} y(t), e^{Af(t)} y(f(t))). \tag{7}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1 – 3. *Тоді система рівнянь* (7) *має n-параметричну сім'ю неперервно-диференційовних і обмежених при* $t \in R^+$ *розв'язків.*

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$y(t) = c \pm \int_t^{+\infty} e^{\pm A\tau} F(\tau, e^{A\tau} y(\tau), e^{Af(\tau)} y(f(\tau)))\, d\tau, \tag{8}$$

де $c \in R^n$, кожен розв'язок якої задовольняє систему (7). За допомогою методу послідовних наближень побудуємо неперервний і обмежений при $t \in R^+$ розв'язок системи рівнянь (8). Для цього за допомогою співвідношень

$$y_0(t) = 0,$$
$$y_{n+1}(t) = c \pm \int_t^{+\infty} e^{\pm A\tau} F(\tau, e^{A\tau} y_n(\tau), e^{Af(\tau)} y_n(f(\tau)))\, d\tau, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

визначимо послідовність вектор-функцій $\{y_n(t),\ n \geq 0\}$ і покажемо, що при всіх $t \in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$ виконуються оцінки

$$|y_{n+1}(t) \pm y_n(t)| \leq |c| q^n, \tag{10}$$

де

$$q = \frac{N_2}{N_1} \int_0^{+\infty} e^{(\alpha_1 \pm \alpha_2)\tau} (1 + e^{\alpha_1 (f(\tau) \pm \tau)}) L(\tau)\, d\tau.$$

Оскільки $|y_1(t) \pm y_0(t)| = |c|$, то оцінка (10) виконується, очевидно, при $n = 0$. Припустимо, що (10) виконується для деякого $n - 1$. Тоді на підставі (9) і умов теореми одержуємо

$$|y_{n+1}(t) \pm y_n(t)| \leq \left| \int_t^{+\infty} e^{\pm A\tau} \big(F(\tau, e^{A\tau} y_n(\tau), e^{Af(\tau)} y_n(f(\tau))) - \right.$$

$$\left. - F(\tau, e^{A\tau} y_{n\pm1}(\tau), e^{Af(\tau)} y_{n\pm1}(f(\tau))) \big) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} \left| e^{\pm A\tau} \right| L(\tau) \left(\left| e^{A\tau} (y_n(\tau) \pm y_{n\pm1}(\tau)) \right| + \left| e^{Af(\tau)} (y_n(f(\tau)) \pm y_{n\pm1}(f(\tau))) \right| \right) d\tau \leq$$

$$\leq \int_t^{+\infty} N_2 e^{-\alpha_2\tau} L(\tau)\left(\frac{1}{N_1} e^{\alpha_1\tau} cq^{n-1} + \frac{1}{N_1} e^{\alpha_1 f(\tau)} cq^{n-1}\right) d\tau \leq$$

$$\leq cq^{n-1}\frac{N_2}{N_1}\int_t^{+\infty} e^{(\alpha_1-\alpha_2)\tau}(1+e^{\alpha_1(f(\tau)-\tau)})L(\tau)d\tau \leq cq^n.$$

Отже, оцінки (10) дійсно виконуються при всіх $t \in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$, і, таким чином, послідовність $\{y_n(t),\ n \geq 0\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної і обмеженої вектор-функції

$$y(t) = \lim_{t\to+\infty}|y_n(t)|,$$

яка внаслідок (9) задовольняє нерівності

$$|y(t)| \leq \frac{|c|}{1-q}.$$

Переходячи в (9) до границі при $n \to +\infty$, можна показати, що $y(t)$ задовольняє систему рівнянь (8). Теорему доведено.

Розглянемо тепер систему диференціально-функціональних рівнянь (1) у випадку, коли $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, де A_1, A_2 — дійсні постійні матриці розміру відповідно $p\times p$ та $q\times q$, $p+q=n$, що задовольняють умови

$$\left|e^{A_1 t}\right| \leq N_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad N_2' e^{-\alpha_2' t} \leq \left|e^{-A_2 t}\right| \leq N_2'' e^{-\alpha_2'' t}, \quad t \in R^+, \tag{11}$$

де $\alpha_1, \alpha_2', \alpha_2'', N_1, N_2', N_2''$ — деякі додатні сталі $(N_2' < N_2'', \alpha_2' > \alpha_2'')$. Для зручності запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + F_1(t, x(t), y(t), x(f(t)), y(f(t))); \\ y'(t) = A_2 y(t) + F_2(t, x(t), y(t), x(f(t)), y(f(t))), \end{cases} \tag{12}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_q)$ і припустимо, що вектор-функції $F_1(t,x, y,u,v)$, $F_2(t,x,y,u,v)$ неперервні при $t \in R^+$, x, $u \in R^p$, y, $v \in R^q$ і задовольняють співвідношення

$$|F_i(t,x',y',u',v') - F_i(t,x'',y'',u'',v'')| \leq$$

$$\leq L_i(t)(|x'-x''|+|y'-y''|+|u'-u''|+|v'-v''|), \tag{13}$$

де $t \in R^+$, $x', u', x'', u'' \in R^p$, $y', v', y'', v'' \in R^q$, $L_i(t)$ — деякі неперервні невід'ємні функції і $F_i(t,0,0,0,0) \equiv 0$, $i = 1, 2$.

Виконавши в (12) заміну $y(t) = e^{A_2 t}\tilde{y}(t)$, одержимо систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + F_1\left(t, x(t), e^{A_2 t}\tilde{y}(t), x(f(t)), e^{A_2 f(t)}\tilde{y}(f(t))\right); \\ \tilde{y}'(t) = e^{-A_2 t} F_2\left(t, x(t), e^{A_2 t}\tilde{y}(t), x(f(t)), e^{A_2 f(t)}\tilde{y}(f(t))\right). \end{cases} \tag{14}$$

Дослідимо питання існування неперервно-диференційовних і обмежених на R^+ розв'язків системи (14). Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (11), (13) *і*

$$\frac{1}{N_2'}\max\left\{N_1\int_0^{\infty}\left(N_2'\left(1+e^{-\alpha_1(f(\tau)-\tau)}\right)+e^{(\alpha_1+\alpha_2')\tau}\left(1+e^{\alpha_2'(f(\tau)-\tau)}\right)\right)L_1(\tau)d\tau,\right.$$

$$\left.N_2''\int_0^{+\infty}\left(N_2'e^{-(\alpha_2''+\alpha_1)\tau}\left(1+e^{-\alpha_1(f(\tau)-\tau)}\right)+e^{(\alpha_2'-\alpha_2'')\tau}\left(1+e^{\alpha_2'(f(\tau)-\tau)}\right)\right)L_2(\tau)d\tau\right\} < 1. \tag{15}$$

Тоді система (14) *має сім'ю неперервно-диференційовних і обмежених на* R^+ *розв'язків* $(x(t), y(t)) = (x(t,c_1), y(t,c_2))$, $c_1\in R^p$, $c_2\in R^q$, *таких, що*

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)| = 0. \tag{16}$$

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} x(t) = e^{A_1t}c_1+\displaystyle\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}F_1\left(\tau, x(\tau), e^{A_2\tau}\tilde{y}(\tau), x(f(\tau)), e^{A_2f(\tau)}\tilde{y}(f(\tau))\right)d\tau; \\ y(t) = c_2-\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-A_2\tau}F_2\left(\tau, x(\tau), e^{A_2\tau}\tilde{y}(\tau), x(f(\tau)), e^{A_2f(\tau)}\tilde{y}(f(\tau))\right)d\tau, \end{cases} \tag{17}$$

де $c_1\in R^p$, $c_2\in R^q$, кожен розв'язок якої є розв'язком системи (12). Розв'язок системи рівнянь (14) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень. Для цього послідовні наближення $x_n(t)$, $y_n(t)$, $n = 0, 1, \ldots$, визначимо наступними співвідношеннями:

$$x_0(t) = 0,$$

$$y_0(t) = 0, \tag{18}$$

$$x_n(t) = e^{A_1t}c_1+\int_0^t e^{A_1(t-\tau)}\left(F_1(\tau,x_{n-1}(\tau),e^{A_2\tau}\tilde{y}_{n-1}(\tau),x_{n-1}(f(\tau)),e^{A_2f(\tau)}\tilde{y}_{n-1}(f(\tau)))\right)d\tau,$$

$$y_n(t) = c_2-\int_t^{+\infty} e^{-A_2\tau}\left(F_2(\tau,x_{n-1}(\tau),e^{A_2\tau}\tilde{y}_{n-1}(\tau),x_{n-1}(f(\tau)),e^{A_2f(\tau)}\tilde{y}_{n-1}(f(\tau)))\right)d\tau.$$

Покажемо, що при всіх $t\in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$ виконуються оцінки

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \le Ke^{-\alpha_1t}q^n,$$

$$|\tilde{y}_{n+1}(t)-\tilde{y}_n(t)| \le Kq^n, \tag{19}$$

де

$$K = N_1|c_1|+|c_2|,$$

$$q = \frac{1}{N_2'}\max\left\{N_1\int_0^{\infty}\left(N_2'\left(1+e^{-\alpha_1(f(\tau)-\tau)}\right)+e^{(\alpha_1+\alpha_2')\tau}\left(1+e^{\alpha_2'(f(\tau)-\tau)}\right)\right)L_1(\tau)d\tau,\right.$$

$$\left.N_2''\int_0^{+\infty}\left(N_2'e^{-(\alpha_2''+\alpha_1)\tau}\left(1+e^{-\alpha_1(f(\tau)-\tau)}\right)+e^{(\alpha_2'-\alpha_2'')\tau}\left(1+e^{\alpha_2'(f(\tau)-\tau)}\right)\right)L_2(\tau)d\tau\right\}.$$

Дійсно, при $n = 0$ маємо

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le |c_1| N_1 e^{-\alpha_1 t} \le Ke^{-\alpha_1 t},$$

$$|y_1(t) - y_0(t)| \le K,$$

тобто в цьому випадку оцінки (19) виконуються. Нехай (19) виконуються для деякого $n-1$. Тоді згідно з (18) і умовами теореми одержуємо

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left| \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} \Big(F_1(\tau, x_n(\tau), e^{A_2\tau}\bar{y}_n(\tau), x_n(f(\tau)), e^{A_2\tau}\bar{y}_n(f(\tau))) - \right.$$

$$\left. - F_1(\tau, x_{n-1}(\tau), e^{A_2\tau}\bar{y}_{n-1}(\tau), x_{n-1}(f(\tau)), e^{A_2 f(\tau)}\bar{y}_{n-1}(f(\tau)))\Big) d\tau \right| \le$$

$$\le \int_0^t N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} L_1(\tau) \Big(|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| + \left| e^{A_2\tau}(\bar{y}_n(\tau) - \bar{y}_{n-1}(\tau)) \right| +$$

$$+ |x_n(f(\tau)) - x_{n-1}(f(\tau))| + \left| e^{A_2 f(\tau)}(\bar{y}_n(f(\tau)) - \bar{y}_{n-1}(f(\tau))) \right| \Big) d\tau \le$$

$$\le \int_0^t N_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} L_1(\tau) \Big(Ke^{-\alpha_1\tau} q^{n-1} + \frac{1}{N_2'} e^{\alpha_2'\tau} K q^{n-1} + K e^{-\alpha_1 f(\tau)} q^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{N_2'} e^{\alpha_2' f(\tau)} K q^{n-1} \Big) d\tau \le$$

$$\le Ke^{-\alpha_1 t} q^{n-1} \frac{N_1}{N_2'} \int_0^t e^{\alpha_1\tau} L_1(\tau) \Big(N_2'(e^{-\alpha_1\tau} + e^{-\alpha_1 f(\tau)}) + e^{\alpha_2'\tau} + e^{\alpha_2' f(\tau)} \Big) d\tau \le$$

$$\le Ke^{-\alpha_1 t} q^{n-1} \frac{N_1}{N_2'} \int_0^t \Big(N_2'(1 + e^{-\alpha_1(f(\tau)-\tau)}) + e^{(\alpha_1+\alpha_2')\tau}(1 + e^{\alpha_2'(f(\tau)-\tau)}) \Big) L_1(\tau) d\tau \le$$

$$\le Ke^{-\alpha_1 t} q^n,$$

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \left| \int_t^{+\infty} e^{-A_2\tau} \Big(F_1(\tau, x_n(\tau), e^{A_2\tau}\bar{y}_n(\tau), x_n(f(\tau)), e^{A_2\tau}\bar{y}_n(f(\tau))) - \right.$$

$$\left. - F_1(\tau, x_{n-1}(\tau), e^{A_2\tau}\bar{y}_{n-1}(\tau), x_{n-1}(f(\tau)), e^{A_2 f(\tau)}\bar{y}_{n-1}(f(\tau)))\Big) d\tau \right| \le$$

$$\le \int_t^{+\infty} N_1 e^{-\alpha_2''\tau} L_2(\tau) \Big(|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| + \left| e^{A_2\tau}(\bar{y}_n(\tau) - \bar{y}_{n-1}(\tau)) \right| +$$

$$+ |x_n(f(\tau)) - x_{n-1}(f(\tau))| + \left| e^{A_2 f(\tau)}(\bar{y}_n(f(\tau)) - \bar{y}_{n-1}(f(\tau))) \right| \Big) d\tau \le$$

$$\le \int_t^{+\infty} N_2'' e^{-\alpha_2''\tau} L_2(\tau) \Big(Ke^{-\alpha_1\tau} q^{n-1} + \frac{1}{N_2'} e^{\alpha_2'\tau} K q^{n-1} + K e^{-\alpha_1 f(\tau)} q^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{N_2'} e^{\alpha_2' f(\tau)} K q^{n\pm 1} \Big) d\tau \le$$

$$\le K q^{n\pm 1} \frac{N_2''}{N_2'} \int_t^{+\infty} e^{\pm \alpha_2'' \tau} L_2(\tau) \Big(N_2' (e^{\pm \alpha_1 \tau} + e^{\pm \alpha_1 f(\tau)}) + e^{\alpha_2' \tau} + e^{\alpha_2' f(\tau)} \Big) d\tau \le$$

$$\le K q^{n\pm 1} \frac{N_2''}{N_2'} \int_t^{+\infty} \Big(N_2' e^{\pm(\alpha_2'' + \alpha_1)\tau} \Big(1 + e^{\pm \alpha_1 (f(\tau) \pm \tau)} \Big) +$$

$$+ e^{(\alpha_2' \pm \alpha_2'')\tau} \Big(1 + e^{\alpha_2' (f(\tau) \pm \tau)} \Big) \Big) L_2(\tau) d\tau \le K q^n. \qquad (20)$$

Таким чином, оцінки (19) дійсно виконуються при всіх $t \in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$. Оскільки внаслідок (20) і умов теореми $q < 1$, послідовність $\{x_n(t), y_n(t), n \ge 0\}$ рівномірно збігається до деякої неперервної і обмеженої вектор-функції $(x(t), y(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (14). Крім цього, на підставі нерівності $|x(t)| \le K(1 \pm q)^{\pm 1} e^{\pm \alpha_1 t}$, яка випливає з (18), маємо, що $x(t)$ задовольняє співвідношення (16). Теорему 3 доведено.

Зауваження. Аналогічні результати можна отримати і для систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t) = Ax(t) + F(t, x(t), x(f_1(t)), \ldots, x(f_k(t))),$$

при відповідних припущеннях щодо матриці A і функцій F, $f_i(t)$, $i = \overline{1, k}$.

1. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 548 с.
2. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737 – 747.
4. *Блищак Н. І., Пелюх Г. П.* Про періодичні розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом та їх властивості. – Київ, 1996. – 18 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 96.19).
5. *Олійниченко О. П.* Асимптотичні властивості розв'язків лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 4. – С. 489 – 496.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

Одержано 27.02.2001