УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

We establish asymptotically unimprovable interpolation analogs of Lebesgue-type inequalities on classes of periodic infinitely differentiable functions $C_\beta^\psi C$ whose elements are representable in the form of convolutions with fixed generating kernels. We find asymptotic equalities for upper bounds of the approximation by interpolation trigonometric polynomials on the classes $C_{\beta,\infty}^\psi$ and $C_\beta^\psi H_\omega$.

Встановлено асимптотично непокращувані інтерполяційні аналоги нерівностей типу Лебега на класах періодичних нескінченно диференційовних функцій $C_\beta^\psi C$, елементи яких допускають зображення у вигляді згорток із фіксованими твірними ядрами. Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах $C_{\beta,\infty}^\psi$ та $C_\beta^\psi H_\omega$.

Нехай $L = L_1$ — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій φ із нормою

$$\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|dt,$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій φ із нормою

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |\varphi(t)|,$$

C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ, у якому норма задається рівністю

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|.$$

Нехай, далі, $f(x) \in L$ і

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — довільне дійсне число $(\beta \in R)$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію, згідно з О. І. Степанцем [1, с. 25], називають (ψ, β)-похідною функції $f(x)$ і позначають через $f_\beta^\psi(x)$ $(\varphi(x) = f_\beta^\psi(x))$. Множину функцій $f(x)$, що задовольняють таку умову, позначають через L_β^ψ. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із L, то покладають $f \in L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Якщо $F_\beta^\psi(x) = f(x)$, то функцію F називають (ψ, β)-інтегралом функції f і записують $F(x) = \mathcal{J}_\beta^\psi(f;x)$.

Покладемо $C_\beta^\psi = L_\beta^\psi \cap C$, $C_\beta^\psi\mathfrak{N} = L_\beta^\psi\mathfrak{N} \cap C$. У даній роботі в якості множин $\mathfrak{N}$ розглядатимемо множини C, U_∞^0,

$$U_\infty^0 = \{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

або клас

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi, t) \le \omega(t)\},$$

де $\omega(\varphi, t)$ — модуль неперервності функції φ із C, а $\omega(t)$ — задана мажоранта типу модуля неперервності. При цьому покладаємо $C_\beta^\psi U_\infty^0 = C_{\beta,\infty}^\psi$.

Послідовність $\psi(k)$, що визначає класи $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$, можна вважати слідом на множині N натуральних чисел деякої неперервної функції $\psi(v)$ неперервного аргументу, заданої на $[1, \infty)$. Згідно з [1, с. 93] кожній функції ψ із $\mathfrak{M}$ — множини усіх опуклих донизу функцій $\psi(v)$, $v \in [1, \infty)$, що задовольняють умову

$$\lim_{v \to \infty} \psi(v) = 0,$$

поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \tag{1}$$

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{t}{\eta(t) - t} \tag{2}$$

($\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до $\psi(\cdot)$ функція). Через $\mathfrak{M}_\infty$ позначимо підмножину функцій ψ із $\mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(t)$ монотонно зростає до нескінченності $(\mu(t) \uparrow \infty)$. Функції ψ із $\mathfrak{M}_\infty$ спадають до нуля швидше довільної степеневої функції, тобто

$$\forall\, r \in N: \lim_{k \to \infty} k^r \psi(k) = 0$$

(див., наприклад, [1, с. 97]), тому ряди Фур'є функції f із класів $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, $\beta \in R$, можна диференціювати як завгодно велике число разів і у результаті отримувати рівномірно збіжні ряди. Отже, класи $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, є класами нескінченно диференційовних функцій f, при цьому у кожній точці $x \in R$ має місце зображення (див., наприклад, [1, с. 29])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x-t)\Psi_\beta(t)\,dt,$$

де

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Нехай $f(x)$ — 2π-періодична неперервна функція. Через $\tilde{S}_n(f;x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку n, що інтерполює $f(x)$ у точках $x_k^{(n)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_n\left(f; x_k^{(n)}\right) = f\left(x_k^{(n)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Простір тригонометричних поліномів t_{n-1}, порядок яких не перевищує $n-1$, позначатимемо через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Величина

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \| f - t_{n-1} \|_C$$

є найкращим наближенням функції f тригонометричними поліномами порядку $n-1$ у метриці простору C.

У даній роботі досліджуються величини

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x),$$

коли $f\in C^{\psi}_{\beta}C$, а також величини

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};x\right) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} |\tilde{\rho}_n(f;x)|,$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};x\right) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}} |\tilde{\rho}_n(f;x)|$$

з метою одержання для них асимптотичних рівностей, якщо $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\beta\in R$ і $\eta(\psi,t)-t\to\infty$ при $t\to\infty$. Основними результатами роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\lim_{t\to\infty}(\eta(t)-t)=\infty$ *і* $\beta\in R$. *Тоді для довільних* $f\in C^{\psi}_{\beta}C$, $n\in N$ *і* $x\in R$

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le$$

$$\le \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\psi(n)\ln(\eta(n)-n)+O(1)(\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)+\psi(n))\right)E_n\left(F^{\psi}_{\beta}\right)_C. \tag{4}$$

При цьому для довільних $x\in R$, $n\in N$ *і* $f\in C^{\psi}_{\beta}C$ *знайдеться функція* $F(t)=$ $=F(f;n;x;t)$ *така, що* $E_n\left(F^{\psi}_{\beta}\right)_C = E_n\left(f^{\psi}_{\beta}\right)_C$ *і для неї виконується рівність*

$$|\tilde{\rho}_n(F;x)| =$$

$$= \left|\sin\frac{2n-1}{x}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\psi(n)\ln(\eta(n)-n)+O(1)(\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)+\psi(n))\right)E_n\left(F^{\psi}_{\beta}\right)_C. \tag{5}$$

У формулах (4) *і* (5) *величини* $O(1)$ *рівномірно обмежені по* x, n, β *і* $f\in C^{\psi}_{\beta}C$.

Доведення. Нехай $f\in C^{\psi}_{\beta}C$, $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$. Для величини $\tilde{\rho}_n(f;x)$ має місце зображення [2, с. 1694]

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})+r_n(t)\right)dt, \tag{6}$$

де $\delta_n(\tau)=f^{\psi}_{\beta}(\tau)-t_{n-1}(\tau)$, $t_{n-1}(\tau)$ — довільний тригонометричний многочлен порядку $n-1$,

$$r_n(t) = r_n(\psi,\beta,x,t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,k}), \tag{7}$$

$$\gamma_{n,k} = \dot{\gamma}_{n,k}(\beta, x) \overset{\text{df}}{=} \left(k+\frac{1}{2}\right)(2n-1)x + \frac{\pi(\beta-1)}{2},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{7'}$$

Внаслідок ортогональності функцій $r_n(t)$ вигляду (7) тригонометричним многочленам $t_{n-1}(\cdot)$ порядку $n-1$ справджуються співвідношення

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) r_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x) r_n(t)\,dt\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x) \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu)\cos(\nu t + \gamma_{n,k})\,dt\right|. \tag{8}$$

Згідно з теоремою 2 роботи [3, с. 502] для довільної функції $g \in C_\alpha^\psi C$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, $\alpha \in R$, і довільного $m \in N$

$$\|\rho_m(g)\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+ \pi(\eta(m)-m) + O(1)\right)\psi(m) E_m\left(g_\alpha^\psi\right)_C, \tag{9}$$

де $\rho_m(g) = \rho_m(g; x) = g(x) - S_{m-1}(g; x)$, $S_{m-1}(g)$ — часткова сума Фур'є порядку $m-1$ функції g, g_α^ψ — (ψ, α)-похідна функції g, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $g \in C_\alpha^\psi C$, $m \in N$ і $\alpha \in R$.

При кожному фіксованому $x \in R$, $\beta \in R$, $n \in N$ і $k \in N$ застосуємо нерівність (9) при $m = (2k+1)n - k$, $\alpha = 2\gamma/\pi = 2\gamma_{n,k}(\beta, x)/\pi$ і $g = \mathcal{J}_{2\gamma/\pi}^\psi f_\beta^\psi$:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x) \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu)\cos(\nu t + \gamma_{n,k})\,dt\right| = \left|\rho_{(2k+1)n-k}\left(\mathcal{J}_{2\gamma/\pi}^\psi f_\beta^\psi; x\right)\right| \le$$
$$\le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+ \pi(\eta((2k+1)n-k) + ((2k+1)n-k)) + O(1)\right)\psi((2k+1)n-k) E_{(2k+1)n-k}\left(f_\beta^\psi\right)_C. \tag{10}$$

Об'єднуючи формули (8) і (10), отримуємо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) r_n(t)\,dt\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2}\ln(\eta((2k+1)n-k) - ((2k+1)n-k)) + O(1)\right) \times$$
$$\times\ \psi((2k+1)n-k) E_{(2k+1)n-k}\left(f_\beta^\psi\right)_C \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2}\ln(\eta((2n-1)k+n) - ((2n-1)k+n)) + O(1)\right)\psi((2n-1)k+n) E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C. \tag{11}$$

Оскільки функція $\psi(v)\ln(\eta(v) - v)$ монотонно спадає, починаючи з деякого значення v_0, то при достатньо великих n

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi((2n-1)k+n)\ln(\eta((2n-1)k+n) - ((2n-1)k+n)) \le$$
$$\le \psi(3n-1)\ln(\eta(3n-1) - (3n-1)) +$$

$$+ \int_1^{\infty} \psi((2n-1)t+n)\ln(\eta((2n-1)t+n)-((2n-1)t+n))\,dt =$$

$$= \psi(3n-1)\ln(\eta(3n-1)-(3n-1)) +$$

$$+ \frac{1}{2n-1}\int_{3n-1}^{\infty} \psi(v)\ln(\eta(v)-v)\,dv. \tag{12}$$

Для оцінки інтеграла в правій частині формули (12) скористаємось наступним твердженням, яке, можливо, має і самостійний інтерес.

Лема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$ *і, крім того,* $\lim_{v\to\infty}(\eta(v)-v)=\infty$. *Тоді для довільного натурального числа* m *такого, що*

$$\eta(v) - v \geq 1 \quad \forall v > m, \tag{13}$$

і довільного $p \geq 0$ *знайдуться сталі* $K^{(1)}$ *і* $K^{(2)}$, *залежні, можливо, від* ψ *і* p, *такі, що*

$$K^{(1)}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^{p}(\eta(m)-m) \leq$$

$$\leq \int_m^{\infty} \psi(v)\ln^{p}(\eta(v)-v)\,dv \leq K^{(2)}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^{p}(\eta(m)-m). \tag{14}$$

Доведення. Згідно з [4, с. 165], якщо $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, то знайдеться стала K, для якої

$$\eta'(t) \leq K < \infty. \tag{15}$$

Крім того, на підставі формули (122) із [5] для функції $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$ мають місце нерівності

$$-\frac{\psi'(t)}{K}(\eta(t)-t) \leq \psi(t) \leq -2\psi'(t)(\eta(t)-t), \tag{16}$$

де K — стала з (15).

Застосовуючи (16) і використовуючи формулу інтегрування частинами, отримуємо

$$\mathcal{J}_m \overset{\mathrm{df}}{=} \int_m^{\infty} \psi(v)\ln^{p}(\eta(v)-v)\,dv \leq -2\int_m^{\infty} \psi'(v)(\eta(v)-v)\ln^{p}(\eta(v)-v)\,dv =$$

$$= 2\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^{p}(\eta(m)-m) +$$

$$+ 2\int_m^{\infty} \psi(v)\ln^{p}(\eta(v)-v)\left(1+\frac{p}{\ln(\eta(v)-v)}\right)(\eta'(v)-1)\,dv, \tag{17}$$

де m — довільне натуральне число, для якого виконується умова (13). Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, то функція $1/\mu(v)$ монотонно прямує до нуля при $v \to \infty$, тому

$$\eta'(v) - 1 \leq \frac{1}{\mu(v)}. \tag{18}$$

Об'єднуючи (17) і (18), отримуємо

$$\mathcal{J}_m \leq 2\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^{p}(\eta(m)-m) + \frac{2M}{\mu(m)}\mathcal{J}_m,$$

а отже,

$$\mathcal{J}_m\left(1-\frac{2M}{\mu(m)}\right) \le 2\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^p(\eta(m)-m), \tag{19}$$

де M — додатна константа (взагалі кажучи, залежна від p і ψ) така, що

$$\sup_{v\ge m}\left(1+\frac{p}{\ln(\eta(v)-v)}\right) \le M.$$

Із (19) випливає, що знайдеться стала $K^{(2)}$, для якої виконується нерівність

$$\int_m^\infty \psi(v)\ln^p(\eta(v)-v)\,dv \le K^{(2)}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^p(\eta(m)-m). \tag{20}$$

З іншого боку, застосовуючи першу нерівність із (16) та інтегруючи частинами, одержуємо

$$\mathcal{J}_m = \int_m^\infty \psi(v)\ln^p(\eta(v)-v)\,dv \ge -\frac{1}{K}\int_m^\infty \psi'(v)(\eta(v)-v)\ln^p(\eta(v)-v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{K}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^p(\eta(m)-m) +$$

$$+\frac{1}{K}\int_m^\infty \psi(v)\ln^p(\eta(v)-v)\left(1+\frac{p}{\ln(\eta(v)-v)}\right)(\eta'(v)-1)\,dv. \tag{21}$$

На підставі (21) і того, що $\eta'(t) > 1/2$ (див., наприклад, [4, с. 163])

$$\mathcal{J}_m \ge \frac{1}{K}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^p(\eta(m)-m) - \frac{M}{2K}\mathcal{J}_m,$$

а отже,

$$\mathcal{J}_m\left(1+\frac{M}{2K}\right) \ge \frac{1}{K}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^p(\eta(m)-m), \tag{22}$$

де M — та ж константа, що і в (19). Із (22) випливає, що знайдеться стала $K^{(1)}$, для якої

$$\int_m^\infty \psi(v)\ln^p(\eta(v)-v)\,dv \ge K^{(1)}\psi(m)(\eta(m)-m)\ln^p(\eta(m)-m). \tag{23}$$

Із (20) і (23) отримуємо (14).

Лему доведено.

Застосовуючи формулу (14) при $m = 3n-1$, $p = 1$, одержуємо

$$\int_{3n-1}^\infty \psi(v)\ln(\eta(v)-v)\,dv =$$

$$= O(1)\psi(3n-1)(\eta(3n-1)-(3n-1))\ln(\eta(3n-1)-(3n-1)). \tag{24}$$

Із (11), (12) і (24), а також включення $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ маємо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t+x)r_n(t)\,dt\right| \le \psi(3n-1)\ln(\eta(3n-1)-(3n-1))\left(\frac{4}{\pi}+\frac{O(1)}{\mu(3n-1)}\right)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C =$$

$$= O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(3n-1)-(3n-1))\,E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C. \tag{25}$$

Отже, на підставі зображення (6) і оцінки (25) можемо записати рівність

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\left(\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0}) + \right.$$

$$\left. + O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(3n-1)-(3n-1))E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C\right). \tag{26}$$

Застосовуючи нерівність (9) при $m = n$, $\alpha = 2\gamma_0/\pi = 2\gamma_{n,0}(\beta, x)/\pi$ і $g = \mathcal{J}^{\psi}_{2\gamma_0/\pi} f_\beta^\psi$, одержуємо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt\right| = \left|\rho_n\left(\mathcal{J}^{\psi}_{2\gamma_0/\pi} f_\beta^\psi; x\right)\right| \le$$

$$\le \left(\frac{4}{\pi^2}\ln(\eta(n)-n)+O(1)\right)\psi(n)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C. \tag{27}$$

Із (26) і (27) отримуємо нерівність

$$\left|\tilde{\rho}_n(f;x)\right| \le \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \times$$

$$\times\left(\frac{8}{\pi^2}\psi(n)\ln(\eta(n)-n)+O(1)(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln(\eta(3n-1)-(3n-1)))\right)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C. \tag{28}$$

Із леми 2 роботи [6, с. 456] випливає оцінка

$$\eta(3n-1)-(3n-1) \le 3(\eta(n)-n), \tag{29}$$

яка разом із співвідношенням (28) дозволяє записати (4).

Доведемо тепер другу частину теореми 1. На підставі (26) і (29)

$$\tilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\left(\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C\right). \tag{30}$$

При кожному фіксованому значенні параметрів $x \in R$, $\beta \in R$ і $n \in N$ розглянемо функцію

$$g(\cdot) = g_{x,n,\beta}(\cdot) = \mathcal{J}^{\psi}_{2\gamma_0/\pi} f_\beta^\psi(\cdot) = \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+\cdot)\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt, \tag{31}$$

де, як і раніше, $\gamma_0 = \gamma_{n,0} = (n-1/2)x + \pi(\beta-1)/2$. Згідно з теоремою 2 роботи [3, с. 502] при кожному $n \in N$ для функції $g(\cdot)$ знайдеться функція $\overline{\varphi}(\cdot) = \overline{\varphi}_{x,n,\beta}(\cdot)$ така, що $E_n(\overline{\varphi})_C = E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C$ і для неї виконується рівність

$$\left\|\rho_n\left(\mathcal{J}^{\psi}_{2\gamma_0/\pi}\overline{\varphi}(x)\right)\right\|_C =$$

$$= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi}(t+x)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt\right\|_C =$$

$$= \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\pi(\eta(n)-n)+O(1)\right)\psi(n)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C, \tag{32}$$

у якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $n \in N$, $\beta \in R$, $x \in R$ і $f \in C_\beta^\psi C$. Нехай, далі,

$$G_n(\tau) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi}(t+\tau)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt$$

і точка x_0 така, що

$$\| G_n\|_C = | G_n(x_0)|. \tag{33}$$

Тоді функція $F(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{J}_\beta^\psi \overline{\varphi}(t-x+x_0)$ буде шуканою. Дійсно, оскільки $F_\beta^\psi(t) = \overline{\varphi}(t-x+x_0)$, то $E_n\left(F_\beta^\psi\right)_C = E_n\left(f_\beta^\psi\right)$ і згідно з формулами (30) і (32) при кожному заданому x

$$|\tilde{\rho}_n(F;x)| = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi}(t+x_0)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt + \right.$$

$$\left. + O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)\right)E_n\left(F_\beta^\psi\right)_C =$$

$$= \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(2\| G_n(\cdot)\|_C + O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)\right)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C =$$

$$= \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \times$$

$$\times \left(\frac{8}{\pi^2}\psi(n)\ln(\eta(n)-n) + O(1)(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n))\right)E_n\left(f_\beta^\psi\right)_C.$$

Теорему доведено.

Теорема 1 показує, зокрема, що нерівність (2) є асимптотично точною при кожному $x \in R$ на усьому просторі $C_\beta^\psi C$. Ця ж нерівність залишається асимптотично точною при кожному $x \in R$ і на деяких важливих підмножинах із $C_\beta^\psi C$. Так зокрема, має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, $\lim_{t\to\infty}(\eta(t)-t) = \infty$, $\beta \in R$ *і* $\omega(t)$ *— довільний модуль неперервності. Тоді для довільного* $x \in R$ *при* $n \to \infty$ *виконуються рівності*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\left(C_{\beta,\infty}^\psi; x\right) =$$

$$= \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\psi(n)\ln(\eta(n)-n) + O(1)(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n))\right), \tag{34}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\left(C_\beta^\psi H_\omega; x\right) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \times$$

$$\times \left(\frac{4}{\pi^2}e_n(\omega)\,\psi(n)\ln(\eta(n)-n) + O(1)(\psi(n)+\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n))\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{35}$$

де

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt, \tag{36}$$

$\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності*; $\eta(t)$ *означається рівністю* (1), *а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені по* x, n *і* β.

Доведення. Щоб показати справедливість формули (34), розглянемо точні верхні межі модулів обох частин рівності (26) при заданому x і $t_{n-1} \equiv 0$ по класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Враховуючи інваріантність множини U^0_∞ відносно зсуву аргументу і нерівність (29), одержуємо

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x\right) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\sup_{\varphi\in U^0_\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt\right| + \right.$$
$$\left. + O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)\right). \tag{37}$$

Оскільки при виконанні умов теореми 2

$$\sup_{\varphi\in U^0_\infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt\right| = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln(\eta(n)-n) + O(1)\psi(n)$$

(див., наприклад, [1, с. 121]), то із (37) отримуємо (34).

Для доведення формули (35) розглянемо точні верхні межі модулів обох частин рівності (6) по класу $C^{\psi}_{\beta}H_\omega$ при кожному фіксованому x. Враховуючи інваріантність множини H_ω відносно зсуву аргументу, одержуємо

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_\omega; x\right) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt + R_n(\varphi)\right|, \tag{38}$$

де

$$R_n(\varphi) = R_n(\varphi;\beta,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\delta^*(t)r_n(t)\,dt,$$

$\delta^*_n(\tau) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(\tau) - t^*_{n-1}(\tau)$, t^*_{n-1} — поліном найкращого наближення у просторі C функції φ, а $r_n(t)$ — функція, означена формулою (7). Застосувавши оцінки (25) і (29), а також нерівність Джексона у просторі C

$$E_n(\varphi)_C \le K\omega\left(\varphi;\frac{1}{n}\right) \quad \forall\,\varphi\in C, \qquad \forall\, n\in N,$$

де K — деяка абсолютна стала (див., наприклад, [1, с. 227]), можемо записати

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}|R_n(\varphi)| = \sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\delta^*(t)r_n(t)\,dt\right| = O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{39}$$

Із (38) і (39) випливає рівність

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_\omega; x\right) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt\right| + \right.$$
$$\left. + O(1)\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{40}$$

Згідно з теоремою 3.7.4 роботи [1, с. 121]

$$\sup_{\varphi\in H_\omega}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{\nu=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(\nu t+\gamma_{n,0})\,dt\right| = \frac{2\psi(n)}{\pi^2}e_n(\omega)\ln(\eta(n)-n) +$$
$$+ O(1)\psi(n)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{41}$$

де $e_n(\omega)$ — величина, що означається рівністю (36), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, x і β. Співставляючи рівності (40) і (41), отримуємо (35).

Теорему доведено.

Асимптотичні рівності (34) і (35) для величин $\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x\right)$ і $\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; x\right)$ є інтерполяційними аналогами асимптотичних рівностей із теорем 3.7.4 із [1, с. 121] для величин $\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C$ і $\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}\right)_C$ верхніх меж наближень за допомогою сум Фур'є у просторі C на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, коли $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, $\lim_{t\to\infty}(\eta(t)-t)=\infty$.

При цьому виконуються рівності

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x\right) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C + O(1)(\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)+\psi(n))\right),$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; x\right) =$$

$$= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\mathscr{E}_n\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}\right)_C + O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)(\psi(3n-1)\ln(\eta(n)-n)+\psi(n))\right),$$

у яких величини $\eta(t)$ і $O(1)$ мають той же сенс, що і у теоремі 2.

Зазначимо, що для класів функцій скінченної гладкості, а саме, коли $\psi(k) = k^{-r}$, $\beta = r$, $r \in N$ (тоді $C^{\psi}_{\beta,\infty} = W^r_{\infty}$), асимптотичні оцінки величини $\tilde{\mathscr{E}}_n\left(W^r_{\infty}; x\right)$ встановив С. М. Нікольський [7, с. 216]:

$$\tilde{\mathscr{E}}_n\left(W^r_{\infty}; x\right) = \frac{2\mathscr{K}_r}{\pi}\frac{\ln n}{n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| + O(1)\frac{1}{n^r},$$

де $\mathscr{K}_r$ — відомі константи Фавара,

$$\mathscr{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}, \qquad r = 0, 1, \ldots,$$

а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно параметрів x та n. Що ж стосується класів нескінченно диференційовних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, то асимптотично точні оцінки величин $\tilde{\mathscr{E}}_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; x\right)$ при тих чи інших обмеженнях на послідовність $\psi(k)$ одержано у роботах [2, 6, 8].

Асимптотична рівність (34) уточнює відповідну асимптотичну рівність (6) з роботи [6, с. 448] у тому сенсі, що множник $\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|$ у ній відноситься не тільки до головного, але і до залишкового члена і тому апроксимативні властивості формули (34) не погіршуються при наближенні параметра x до вузлів інтерполяції $x_k^{(n-1)} = 2\pi k/(2n-1)$, $k \in N$.

Важливим прикладом ядер $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду (3), коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умови теорем 1 і 2, є ядра

$$K_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \alpha > 0, \qquad 0 < r < 1.$$

Класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ у випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r \in (0, 1)$, будемо позначати через $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$, а (ψ, β)-похідні і (ψ, β)-інтеграли функції f — відповідно через $f_\beta^{\alpha,r}(f;\cdot)$ і $\mathcal{J}_\beta^{\alpha,r}(f;\cdot)$. Для функції $\psi(t)=e^{-\alpha t^r}$, $\alpha>0$, $r\in(0,1)$,

$$\eta(\psi;t)-t = t\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha t^r}+1\right)^{1/r}-1\right) = t^{1-r}\left(\frac{\ln 2}{r\alpha}+O(1)\right). \qquad (42)$$

Із рівностей (42) випливає, що $\mu(\psi,t)\uparrow\infty$; $\lim_{t\to\infty}(\eta(\psi;t)-t)=\infty$ і $\psi(3n)\ln(\eta(n)-n) = o(\psi(n))$. Тому із теорем 1 і 2 отримуємо наступні твердження.

Теорема 3. *Нехай* $\alpha>0$, $0<r<1$, $\beta\in R$. *Тоді для довільних* $f\in C_\beta^{\alpha,r}C$, $n\in N$ *і* $x\in R$

$$|\tilde\rho_n(f;x)| \le \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}(1-r)e^{-\alpha n^r}\ln n+O(1)e^{-\alpha n^r}\right)E_n\left(f_\beta^{\alpha,r}\right)_C. \qquad (43)$$

При цьому для довільних $x\in R$, $n\in N$ *і* $f\in C_\beta^{\alpha,r}C$ *знайдеться функція* $F(t)=$ $=F(f;n;x;t)$ *така, що* $E_n\left(F_\beta^{\alpha,r}\right)_C = E_n\left(f_\beta^{\alpha,r}\right)_C$ *і для неї виконується рівність*

$$|\tilde\rho_n(F;x)| = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}(1-r)e^{-\alpha n^r}\ln n+O(1)e^{-\alpha n^r}\right)E_n\left(F_\beta^{\alpha,r}\right)_C. \qquad (44)$$

У формулах (43) *і* (44) *величини* $O(1)$ *рівномірно обмежені по* x, n, β *і* $f\in C_\beta^{\alpha,r}C$.

Теорема 4. *Нехай* $\alpha>0$, $0<r<1$, $\beta\in R$ *і* $\omega(t)$ — *довільний модуль неперервності. Тоді для довільного* $x\in R$ *виконуються рівності*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\left(C_\beta^{\alpha,r};x\right) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}(1-r)e^{-\alpha n^r}\ln n+O(1)e^{-\alpha n^r}\right), \qquad (45)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n\left(C_\beta^{\alpha,r}H_\omega;x\right) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}e_n(\omega)e^{-\alpha n^r}\ln n+O(1)e^{-\alpha n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad (46)$$

де $e_n(\omega)$ *визначається формулою* (36), *а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* x, n *і* β.

Асимптотична формула (45) уточнює відповідну асимптотичну рівність із теореми 2 роботи [6, с. 458].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
2. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение периодических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1689–1701.
3. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Там же. – 1989. – **41**, № 4. – С. 499–510.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
5. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
6. *Степанець О. І., Сердюк А. С.* Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 446–460.
7. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. – 1941. – **31**, № 3. – С. 215–218.
8. *Сердюк А. С.* Про асимптотично точні оцінки похибки наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами функцій високої гладкості // Допов. НАН України. – 1999. – № 8. – С. 29–33.

Одержано 13.05.2003