УДК 517.98

В. І. Рабанович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РОЗКЛАД ОПЕРАТОРА В СУМУ ЧОТИРЬОХ ІДЕМПОТЕНТІВ*

We prove that the operators of the form $(2 \pm 2/n)I + K$ are decomposable into a sum of four idempotents for integer $n > 1$, if there exists the decomposition of a compact operator $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$, $\sum_1^n K_i = 0$. We show that the decomposition of the compact operator K or the operator $4I + K$ into the sum of four idempotents can exist if only K is finite-dimensional. If $n \operatorname{tr} K$ is sufficiently large (or sufficiently small) integer and K is finite-dimensional, then the operator $(2 - 2/n)I + K$ [or $(2 + 2/n)I + K$] is the sum of four idempotents.

Доведено, що оператори вигляду $(2 \pm 2/n)I + K$ розкладаються в суму чотирьох ідемпотентів при цілому $n > 1$, якщо існує розклад $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$, $\sum_1^n K_i = 0$, для компактного оператора K. Показано, що розклад компактного оператора K або оператора $4I + K$ в суму чотирьох ідемпотентів може існувати, тільки якщо K є скінченновимірним. Якщо $n \operatorname{tr} K$ — досить велике (або досить мале) ціле число і K — скінченновимірний, то оператор $(2 - 2/n)I + K$ (або $(2 + 2/n)I + K$) є сумою чотирьох ідемпотентів.

Вступ. У роботі розглядаються суми чотирьох ідемпотентних операторів Q_i, $Q_i^2 = Q_i$, у сепарабельному нескінченновимірному гільбертовому просторі H. Як доведено в [1], будь-який оператор $X \in L(H)$ є сумою п'яти ідемпотентів та якщо $X \neq \lambda I + K$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, I — одиничний і K — компактний оператори), то X є сумою навіть чотирьох ідемпотентів. У 90-х роках минулого століття J.-H. Wang [2] показав, що з розкладу

$$\lambda I + K = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \tag{1}$$

випливає, що λ є дійсним числом вигляду $2 \pm 2/n$, $n \in \mathbb{N}$. У зв'язку з цим результатом P. Y. Wu [3] висловив таку гіпотезу.

Гіпотеза 1. *Оператор вигляду $\lambda I + K$ є сумою чотирьох ідемпотентів тоді і тільки тоді, коли $\lambda = 2 \pm 2/n$, $n \in \mathbb{N}$.*

При $K = 0$ гіпотезу 1 незалежно довели кілька авторів (див., наприклад, [2, 4] або більш повну бібліографію в [5]).

Також при $\lambda = 2$ розклад (1) існує для будь-якого компактного K. Це безпосередньо випливає з конструкції в [1] та з результату про зображення компактного оператора як комутатора $K = AB - BA$, $A, B \in L(H)$ (див. [6]).

У цій роботі ми доведемо існування розкладу (1) для більш широкого класу компактних операторів (в теоремі 1 $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$, $\sum_1^n K_i = 0$, в теоремі 2 K — скінченновимірний з раціональним слідом), тим самим збільшивши підґрунтя для висунення саме гіпотези 1. Але в загальному випадку ця гіпотеза не є вірною, і ми покажемо в наслідку 1 з теореми 3, що нескінченновимірний компактний оператор K і оператор $4I + K$ не є сумою чотирьох ідемпотентів.

Надалі будемо використовувати позначення I_n, $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{rank} A$ для одиничної $(n \times n)$-вимірної матриці, сліду і рангу матриці A.

1. Побудова розкладів операторів у суму чотирьох ідемпотентів. У цьому пункті ми наведемо широкий клас розкладних компактних операторів, для яких має місце розклад (1).

* Частково підтримана проектом № 20 „Еволюційні та спектральні задачі сучасної математичної фізики" (програма „Математичне моделювання фізичних і механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах").

Теорема 1. *Нехай* $\lambda = 2 \pm 2/n$, $n > 1$, *і компактний оператор* $K = K_1 \oplus \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$, *який діє на прямій сумі гільбертових просторів* $H = H_1 \oplus H_1 \oplus \ldots \ldots \oplus H_1$, *задовольняє властивості* $K_1 + K_2 + \ldots + K_n = 0_{H_1}$. *Тоді існують ідемпотенти* $Q_1, \ldots, Q_4$ *такі, що має місце розклад* (1).

Доведення. Внаслідок властивості

$$Q_1 + \ldots + Q_4 = 4 - ((I - Q_1) + \ldots + (I - Q_4)) \tag{2}$$

досить розглянути лише випадок, коли $\lambda \leq 2$, тобто $\lambda = 2 - 2/n$, $n > 1$.

Нехай E і 0_{H_1} — одиничний і нульовий оператори в H_1. Визначимо послідовність операторів

$$A_1 = (\lambda E + K_1)/2, \quad A_i = (\lambda E + K_i)/2 + A_i - E, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

і дві ідемпотентні матриці-функції від них

$$\varphi(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & E - A_i \\ A_i & E - A_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(A_i) = \begin{pmatrix} A_i & A_i - E \\ -A_i & E - A_i \end{pmatrix}.$$

За такою послідовністю побудуємо ідемпотенти $Q_1, \ldots, Q_4$ (n — непарне):

$$Q_1 = \operatorname{diag}\left(\varphi(A_1), \varphi(A_3), \ldots, \varphi(A_{n-2}), 0_{H_1}\right),$$

$$Q_2 = \operatorname{diag}\left(\tilde{\varphi}(A_1), \tilde{\varphi}(A_3), \ldots, \tilde{\varphi}(A_{n-2}), 0_{H_1}\right),$$

$$Q_3 = \operatorname{diag}\left(0_{H_1}, \varphi(A_2), \varphi(A_4), \ldots, \varphi(A_{n-1})\right),$$

$$Q_4 = \operatorname{diag}\left(0_{H_1}, \tilde{\varphi}(A_2), \tilde{\varphi}(A_4), \ldots, \tilde{\varphi}(A_{n-1})\right).$$

Для парного n діагоналі ідемпотентів Q_1 і Q_2 будуть закінчуватися на $\varphi(A_{n-1})$ і $\tilde{\varphi}(A_{n-1})$ замість 0_{H_1}, а діагоналі ідемпотентів Q_3 і Q_4 — на $\operatorname{diag}\left(\varphi(A_{n-2}), 0_{H_1}\right)$ і $\operatorname{diag}\left(\tilde{\varphi}(A_{n-2}), 0_{H_1}\right)$ відповідно. Ми доведемо формулу (1) для ідемпотентів $Q_1, \ldots, Q_4$ тільки при непарному n. Для парного n доведення аналогічне. Безпосередньо перевіряється, що

$$Q_1 + Q_2 = \operatorname{diag}(2A_1, 2E - 2A_1, 2A_3, 2E - 2A_3, \ldots, 2A_{n-2}, 2E - 2A_{n-2}, 0_{H_1}),$$

$$Q_3 + Q_4 = \operatorname{diag}(0_{H_1}, 2A_2, 2E - 2A_2, 2A_4, 2E - 2A_4, \ldots, 2A_{n-1}, 2E - 2A_{n-1}).$$

За визначенням (3) маємо

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \operatorname{diag}(\lambda E + K_1, \lambda E + K_2, \ldots, \lambda E + K_{n-1}, 2E - 2A_{n-1}). \tag{4}$$

Далі, використовуючи співвідношення між A_i та A_{i-1}, отримуємо

$$2E - 2A_{n-1} = 2E - (\lambda E + K_{n-1} + 2A_{n-2} - 2E) = (2 + 2/n)E - K_{n-1} - 2A_{n-2} = \ldots$$

$$\ldots = \left(2 + \frac{2(n-2)}{n}\right)E - \sum_{i=2}^{n-1} K_i - 2A_1 = \left(2 - \frac{2}{n}\right)E - \sum_{i=1}^{n-1} K_i.$$

Але оскільки $\sum_{i=1}^{n} K_i = 0_{H_1}$, то $\sum_{i=1}^{n-1} K_i = -K_n$ і

$$2E - 2A_{n-1} = \lambda E + K_n.$$

Таким чином, з (4) випливає формула (1).

Теорему доведено.

Наступна теорема показує, що для деяких операторів $\lambda I + K$, де K — скінченновимірний компактний оператор вигляду $K_m \oplus 0_{H_1}$ ($K_m \in M_m(\mathbb{C})$, 0_{H_1} — нульовий в H_1), також виконується розклад (1).

Теорема 2. *Оператор* $(2-2/n)I + K_m \oplus 0_{H_1}$ *є сумою чотирьох ідемпотентів, якщо:*

а) $\operatorname{tr} K_m = 2s/n$ *для деякого* $s \in \mathbb{Z}$;

б) *існує ціле* $k \geq m$ *таке, що*

$$2\operatorname{rank}((2-2/n)I_m + K_m) \leq \operatorname{tr} K_m + 2 + 2m - 2k/n. \tag{5}$$

Доведення. Припустимо, що виконуються умови а), б) теореми. Без обмеження загальності можна вважати, що $\operatorname{tr} K - 2k/n$ ціле і

$$\operatorname{tr} K - 2k/n \leq 0. \tag{6}$$

Справді, якщо при деякому $k_0 \geq m$ число $\operatorname{tr} K - 2k_0/n \geq 0$, то підібравши $k > k_0$ так, щоб

$$\operatorname{tr} K - 2k/n = -2 < 0, \tag{7}$$

і підставивши в (5), отримаємо нерівність

$$2\operatorname{rank}(K_m + (2-2/n)I_m) \leq 2m,$$

яка завжди виконується для $(m \times m)$-вимірних матриць. Тому виконується (6). Подамо оператор K у вигляді $K_m \oplus 0_{k-m} \oplus 0_{H_2}$ ($H_2 \subset H$, 0_{H_2} — нульовий в H_2). Оскільки $\lambda I + K$ можна розкласти,

$$\lambda I + K = (\lambda I_k + K_m \oplus 0_{k-m}) \oplus \lambda I_{H_2}, \tag{8}$$

та скалярний оператор $\lambda I_{H_2} \in L(H_2)$ є сумою чотирьох ідемпотентів, то для доведення теореми достатньо показати, що матриця

$$\lambda I_k + K_m \oplus 0_{k-m} \text{ є сумою чотирьох ідемпотентів.} \tag{9}$$

Як доведено в [7], $(k \times k)$-вимірна матриця B_k з невід'ємним цілим слідом є сумою чотирьох ідемпотентів, якщо

$$2\operatorname{rank} B_k - 2 \leq \operatorname{tr} B_k \leq 2k. \tag{10}$$

Оцінимо ранг і слід матриці $(2-2/n)I_k + K_m \oplus 0_{k-m}$:

$$\operatorname{rank}((2-2/n)I_k + K_m \oplus 0_{k-m}) \leq \operatorname{rank}((2-2/n)I_m + K_m) + k - m,$$

$$\operatorname{tr}((2-2/n)I_k + K_m \oplus 0_{k-m}) = 2k - 2k/n + \operatorname{tr} K_m.$$

Звідси на підставі нерівностей (5) і (6) випливає

$$2\operatorname{rank}((2-2/n)I_k + K_m \oplus 0_{k-m}) - 2 \leq \operatorname{tr}((2-2/n)I_k + K_m \oplus 0_{k-m}) \leq 2k.$$

Таким чином, (9) виконується.

Теорему доведено.

Зауваження. **1.** Внаслідок властивості (2) є справедливим аналог теореми 2 для $\lambda = 2 + 2/n$, тобто: якщо $\operatorname{tr} K_m = 2s/n$ і існує ціле $k \geq m$ таке, що

$$2\operatorname{rank}((2-2/n)I_m - K_m) \leq -\operatorname{tr} K_m + 2 + 2m - 2k/n,$$

то $(2+2/n)I + K_m \oplus 0_{H_1}$ є сумою чотирьох ідемпотентів.

2. При $n = 1$ теорему доведено в роботі [7].

3. Авторові невідомо існування розкладу (1) для компактного оператора K з ірраціональним слідом. Також незрозуміло, чи існують скінченновимірні компактні оператори з від'ємним слідом, які зображуються сумою чотирьох ідемпотентів.

2. Спростування гіпотези 1. На відміну від теорем 1 і 2 про існування розкладу (1) у цьому пункті ми покажемо, що нескінченновимірні компактні оператори не є сумою чотирьох ідемпотентів. Як наслідок з (2), цей самий результат є справедливим і для операторів вигляду $4I + K$. Таким чином, оператори K і $4I + K$ (K — нескінченновимірний компактний) будуть контрприкладами до гіпотези 1.

Наведемо спочатку поняття істотного спектра оператора (див., наприклад, [8]).

Означення 1. *Нехай $X \in L(H)$. Істотним спектром оператора X (позначається $\sigma_{\text{ess}}(H)$) є множина тих $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких $X - \lambda I$ не є фредгольмовим оператором.*

Наступна лема встановлює одну з властивостей істотного спектра суми двох ідемпотентних операторів.

Лема 1. *Нехай Q_1 і Q_2 — ідемпотентні оператори. Тоді з рівності $\sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2) = 0$ випливає $\sigma_{\text{ess}}(Q_1) = \sigma_{\text{ess}}(Q_2) = 0$, тобто Q_1 і Q_2 є скінченновимірними.*

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що

$$\sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2) = 0, \tag{11}$$

але $\operatorname{rank} Q_1 = \infty$. Оскільки компактні збурення не впливають на істотний спектр оператора, то з (11) випливає, що $\operatorname{rank} Q_2 = \infty$. Нехай $H = H_1 + H_2$, де $H_1 = \operatorname{Im} Q_1$, $H_2 = \operatorname{Ker} Q_1$. Тоді дію операторів Q_1, Q_2 у просторі H можна записати в матричній формі

$$Q_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

де Q_{ij} — обмежені оператори, які переводять H_j в H_i. Крім того, оскільки Q_1 — обмежений, то

$$\exists \varepsilon > 0 \colon \forall h_1 \in H_1, \ \forall h_2 \in H_2 \quad |(h_1, h_2)| \le (1 - \varepsilon)\|h_1\|\|h_2\|, \tag{12}$$

$(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в H. Розглянемо оператор $(Q_1 - Q_2)^2$:

$$(Q_1 - Q_2)^2 = \begin{pmatrix} Q_{11} - E & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E - Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}.$$

На підставі (11), (12) та рівності $(Q_1 - Q_2)^2 = 2(Q_1 + Q_2) - (Q_1 + Q_2)^2$ маємо

$$\sigma_{\text{ess}}(Q_1 - Q_2) = \sigma_{\text{ess}}(Q_1 - Q_2)^2 = \sigma_{\text{ess}}(E - Q_{11}) = 0. \tag{13}$$

Для фіксованого оператора $X \in L(H_1)$ множина тих $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких оператор $\lambda E - X$ істотно необоротний зліва, є непорожньою [8]. Тому з (13) випливає, що $E - Q_{11}$ — істотно необоротний зліва, тобто існує слабко збіжна послідовність нормованих векторів $x_n \in H_1$ така, що

$$\|(E - Q_{11})x_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Розглянемо послідовність векторів з $H_1 + H_2$: $(x_n; Q_{21}x_n/2)$. Наша мета — показати, що ця послідовність слабко прямує до нуля і значення оператора $(Q_1 + Q_2) - 2I$ на її елементах за нормою прямують до нуля. Справді, з рівності $(x_n; Q_{21}x_n/2) = x_n + Q_{21}x_n/2$ маємо, що ця послідовність слабко збігається до нуля, оскільки значення скалярного добутку

$$\left(x_n + \frac{1}{2}Q_{21}x_n, v\right) = (x_n, v) + \frac{1}{2}\left(x_n, ((I - Q_1)Q_2Q_1)^* v\right) \to 0 \qquad (14)$$

при $n \to \infty$ внаслідок слабкої збіжності x_n і обмеженості $((I - Q_1)Q_2Q_1)^*$. До того ж з властивості (12) випливає

$$\left\|\left(x_n; \frac{1}{2}Q_{21}x_n\right)\right\| = \left\|x_n + \frac{1}{2}Q_{21}x_n\right\| \geq \sqrt{2\varepsilon(\|x_n\| + 1/2\|Q_{21}x_n\|)} \geq \sqrt{2\varepsilon}. \qquad (15)$$

Знайдемо формули для $(Q_1 + Q_2)(x_n; Q_{21}x_n/2)$, використавши матричне зображення

$$\begin{pmatrix} Q_{11} + E & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \frac{1}{2}Q_{21}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E + Q_{11})x_n + \frac{1}{2}Q_{12}Q_{21}x_n \\ Q_{21}x_n + \frac{1}{2}Q_{22}Q_{21}x_n \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Оскільки Q_2 — ідемпотент, то

$$Q_{12}Q_{21} = Q_{11} - Q_{11}^2,$$

$$Q_{22}Q_{21} = Q_{21} - Q_{21}Q_{11} = Q_{21}(E - Q_{11}).$$

Використовуючи ці рівності, отримуємо формули для першої і другої координат в (16):

$$(E + Q_{11})x_n + \frac{1}{2}Q_{12}Q_{21}x_n = (E + Q_{11})x_n + \frac{1}{2}Q_{11}(E - Q_{11})x_n,$$

$$Q_{21}x_n + \frac{1}{2}Q_{22}Q_{21}x_n = Q_{21}x_n + Q_{21}(E - Q_{11})x_n.$$

Отже,

$$\left\|(Q_1 + Q_2 - 2I)\left(x_n; \frac{1}{2}Q_{21}x_n\right)\right\| =$$

$$= \left\|\left((Q_{11} - E)x_n + \frac{1}{2}Q_{11}(E - Q_{11})x_n; \; Q_{21}(E - Q_{11})x_n\right)\right\| \leq$$

$$\leq \|(Q_{11} - E)x_n\| + \frac{1}{2}\|Q_{11}(E - Q_{11})x_n\| + \|Q_{21}(E - Q_{11})x_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким чином, на підставі (14) і (15) точка $2 \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2)$, що суперечить (11).

Лему 1 доведено.

Тепер, використовуючи лему 1, можна довести наступну теорему.

Теорема 3. *Якщо* $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = K$, *то* $\operatorname{rank} Q_i < \infty$, $i = 1, \ldots, 4$, *та* $\operatorname{rank} K < \infty$.

Доведення. Нехай $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = K$. Тоді $Q_1 + Q_2 = K - (Q_3 + Q_4)$. Звідси

$$\sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2) = \sigma_{\text{ess}}(-Q_3 - Q_4). \qquad (17)$$

Нагадаємо симетричну властивість істотного спектра суми будь-яких двох ідемпотентів

$$\forall\mu \neq 0, 1, 2: \mu \in \sigma_{\text{ess}}(Q_i + Q_j) \Leftrightarrow 2 - \mu \in \sigma_{\text{ess}}(Q_i + Q_j), \tag{18}$$

яку доведено, наприклад, у роботі [9] або яка безпосередньо випливає з [10]. Припустимо тепер, що

$$\operatorname{rank} Q_1 = \infty.$$

Тоді за лемою 1 множина $\sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2)$ містить ненульову точку λ. Будемо розрізняти два випадки.

Випадок 1. $\operatorname{Re}\lambda > 0$. З рівності (17) випливає

$$\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2) \Rightarrow -\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(Q_3 + Q_4).$$

Звідси на підставі (18) для $\mu = -\lambda$ маємо $2 + \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(Q_3 + Q_4)$ і тому за формулою (17) $-(2 + \lambda) \in \sigma_{\text{ess}}(Q_3 + Q_4)$. Для $\mu = -(2 + \lambda)$ з рівності (18) випливає включення $\lambda + 4 \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2)$. Таким чином, при $s \in \mathbb{N}$

$$\lambda + 4s \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2),$$

що суперечить обмеженості $Q_1 + Q_2$.

Випадок 2. $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ — аналогічний випадку 1. Використаємо послідовно властивості (18) і (17):

$$\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2) \Rightarrow 2 - \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2) \Rightarrow -(2 - \lambda) \in \sigma_{\text{ess}}(Q_3 + Q_4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 + (2 - \lambda) \in \sigma_{\text{ess}}(Q_3 + Q_4) \Rightarrow -(2 + (2 - \lambda)) = \lambda - 4 \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2),$$

а тому

$$\lambda - 4s \in \sigma_{\text{ess}}(Q_1 + Q_2), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Останнє включення суперечить обмеженості $Q_1 + Q_2$. Отже, $\operatorname{rank} Q_1 < \infty$. Внаслідок довільності вибору індекса ця ж нерівність справедлива і для Q_2, Q_3, Q_4, а тому $\operatorname{rank} K < \infty$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай K — нескінченновимірний компактний оператор. Тоді і K, і оператор $4I + K$ не є сумою чотирьох ідемпотентів.*

Автор висловлює подяку професору Ю. С. Самойленку за цінні поради і зауваження.

1. *Pearcy C., Topping D. M.* Sums of small number of idempotents // Mich. Math. J. – 1967. – **14**. – P. 453–465.
2. *Wang J.-H.* Decomposition of operators into quadratic type: Ph. D. dissertation. – Hsinchu, Taiwan: Nat. Chiao Tung Univ., 1991.
3. *Wu P. Y.* Additive combinations of special operators // Funct. Anal. and Oper. Theory. – 1994. – **30**. – P. 337–361.
4. *Беспалов Ю. В.* Наборы ортопроекторов, связанных соотношениями // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 309–317.
5. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Суммы проекторов // Функцион. анализ и прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20–35.
6. *Brown A., Halmos P. R., Pearcy C.* Commutators of operators on Hilbert space // Can. J. Math. – 1965. – **17**. – P. 695–708.
7. *Laurie C., Mathes B., Radjavi H.* Sums of idempotents // Linear Algebra and its Appl. – 1994. – **208 / 209**. – P. 175–197.
8. *Filmore P. A., Stampfli J. G., Williams J. P.* On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1972. – **33**. – P. 179–192.
9. *Wang J.-H., Wu P. Y.* Difference and similarity models of two idempotent operators // Linear Algebra and its Appl. – 1994. – **208 / 209**. – P. 257–282.
10. *Krupnik N., Roch S., Silbermann B.* On C^*-algebras generated by idempotents // J. Funct. Anal. – 1996. – **137**. – P. 303–319.

Одержано 08.04.2003