УДК 517.98

Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко (Київ. нац. ун-т ім Т. Шевченка)

ЕЙЛЕРОВІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ НАПІВГРУП

By using the Euler approximations of solutions of abstract differential equations, we obtain new approximation formulas for C_0-semigroups and evolution operators.

За допомогою апроксимацій Ейлера розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь отримано нові апроксимаційні формули для C_0-напівгруп та еволюційних операторів.

Вступ. Апроксимаційні теореми є досить широкою, розвиненою областю теорії напівгруп. Згадаємо лише монографії [1, 2], велика кількість апроксимаційних теорем міститься також в огляді [3]. Одними з найбільш відомих апроксимаційних формул є формула Уіддера – Поста, мультиплікативні формули Чернова і Троттера (див. [4 – 7]). Доведення цих формул базується на простій нерівності

$$\left\| e^{B}x - \left(I + \frac{B}{n}\right)^{n} x \right\| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \| Bx \|$$

за умови, що $B \in L(X)$, $\left\| (I + B/n)^m \right\| \le C$ для всіх $m \ge 1$. Виявляється, що апроксимації Ейлера розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь дозволяють одержати нерівність з кращим порядком наближення $O(1/n)$ замість $O(1/\sqrt{n})$ і без обмеження на норму оператора $(I + B/n)^m$. За допомогою цієї нерівності, в свою чергу, можна одержати нові апроксимаційні формули для напівгруп, які названо у роботі „повільними", зокрема „повільну" формулу Уіддера – Поста і „повільну" формулу Троттера. Перевага цих формул у тому, що напівгрупа наближується елементами, що породжені неперервними генераторами, а саме, апроксимаціями Іосіда. Стаття також містить теореми стосовно швидкості збіжності апроксимацій Ейлера для неоднорідної абстрактної задачі Коші та абстрактного еволюційного рівняння, за допомогою яких одержано апроксимаційні теореми для еволюційних операторів та ще один варіант мультиплікативної формули Троттера.

1. „Повільні" апроксимаційні теореми для напівгруп. *1. 1. Ейлерові наближення розв'язку задачі Коші.* Нехай X — банахів простір, $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів з X в X і $A \in L(X)$. Розглянемо стандартну задачу Коші у просторі X на фіксованому відрізку $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= x_0 \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

Розв'язок задачі (1) має вигляд $x(t) = e^{At}x_0$, звідки

$$\| x(t) \| \le \| x_0 \| e^{\|A\| t}, \quad t \in [0, T].$$

Побудуємо послідовність ейлерових апроксимацій розв'язку $x(t)$. Для цього при кожному $N > 0$ розглянемо рівномірне розбиття $\tau_n = n\delta$, $\delta = T/N$, відрізка $[0, T]$ і сконструюємо ейлерові апроксимації таким чином:

$$y_0^{\delta} = x_0, \qquad y_{n+1}^{\delta} = y_n^{\delta} + \delta A y_n^{\delta} = (I + \delta A)^{n+1} x_0.$$

Поклавши $y^{\delta}(\tau_n) = y_n^{\delta}$, виконаємо неперервну інтерполяцію значень у вузлах:

$$y^{\delta}(t) = \frac{t-\tau_n}{\delta} y^{\delta}(\tau_{n+1}) + \frac{\tau_{n+1}-t}{\delta} y^{\delta}(\tau_n).$$

Зауважимо, що $y^{\delta}(t)$ задовольняє співвідношення

$$y^{\delta}(t) = x_0 + \int_0^t A y^{\delta}\left(\tau_{n_s}\right) ds,$$

де $n_s = \max\{n : \tau_n \le s\}$.

Теорема 1. *Має місце збіжність ейлерових апроксимацій до розв'язку* $x(t)$, *причому*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| y^{\delta}(t) - x(t) \right\| \le \|A\| \|x_0\| e^{2\|A\|T} \delta. \tag{2}$$

Доведення. Оцінимо

$$Z(t) := \sup_{s\in[0,t]} \left\| y^{\delta}(t) - x(t) \right\| \le \sup_{s\in[0,t]} \int_0^s \left\| Ax(u) - A y^{\delta}\left(\tau_{n_u}\right) \right\| du \le$$

$$\le \|A\| \left(\int_0^t \left\| x(u) - x\left(\tau_{n_u}\right) \right\| du + \int_0^t \left\| x\left(\tau_{n_u}\right) - y^{\delta}\left(\tau_{n_u}\right) \right\| du \right).$$

При цьому

$$\left\| x(u) - x\left(\tau_{n_u}\right) \right\| \le \int_{\tau_{n_u}}^u \|A\| \|x(s)\| ds \le \|A\| \|x_0\| e^{\|A\|u} \delta.$$

Тому

$$\int_0^t \left\| x(u) - x\left(\tau_{n_u}\right) \right\| du \le \|x_0\| \left(e^{\|A\|t} - 1\right) \delta \le \|x_0\| e^{\|A\|T} \delta.$$

Отже, $Z(t)$ задовольняє нерівність

$$Z(t) \le \|A\| \|x_0\| e^{\|A\|T} \delta + \|A\| \int_0^t Z(s) ds.$$

Застосовуючи лему Гронуолла, одержуємо

$$Z(t) \le \|A\| \|x_0\| e^{\|A\|(T+t)} \delta,$$

звідки випливає твердження теореми.

1.2. „Повільна" мультиплікативна формула Чернова. З оцінки (2) випливає

$$\sup_{0\le n\le N} \left\| \left(I + \frac{AT}{N} \right)^n x_0 - e^{AnT/N} x_0 \right\| \le \frac{\|A\| \|x_0\| e^{2\|A\|T} T}{N},$$

звідки при $n = N$

$$\left\| e^{AT} x_0 - \left(I + \frac{AT}{N} \right)^N x_0 \right\| \le \frac{\|A\| \|x_0\| e^{2\|A\|T} T}{N}. \tag{3}$$

Перепишемо останню нерівність з використанням більш звичних позначень, а саме, для будь-яких $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ та $A \in L(X)$

$$\sup_{t \le T} \left\| e^{At}x - \left(I + \frac{At}{n} \right)^n x \right\| \le \frac{\| A \| \| x \| e^{2\| A \|T} T}{n}. \tag{4}$$

Нерівність (4) можна трактувати таким чином: для довільного $A \in L(X)$ швидкість збіжності степеневих функцій $(I + At/n)^n x$ до експоненти $e^{At}x$ є $O(1/n)$, тобто така ж, як для відповідних числових функцій.

Порівняємо (4) з відомою оцінкою, що використовується при доведенні мультиплікативної формули Чернова (лема 5.1 [1]). Згідно з нею, для оператора $S \in L(X)$ такого, що $\| S^m \| \le M$ для певного $M \ge 1$ та для всіх $m \in \mathbb{N}$, має місце оцінка

$$\| e^{n(S-I)}x - S^n x \| \le \sqrt{n} \| Sx - x \|. \tag{5}$$

Якщо покласти $A = n(S - I) \in L(X)$, то $S = I + A/n$, і (5) перетворюється на нерівність

$$\left\| e^A x - \left(I + \frac{A}{n} \right)^n x \right\| \le \frac{\| Ax \|}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Перевагою (6) у порівнянні з (4) є менша стала у правій частині, $\| Ax \|$ замість $\| A \| \| x \| e^{2\|A\|t} t$. Перевагами оцінки (4) є, по-перше, відсутність обмеження

$$\left\| \left(I + \frac{A}{n} \right)^m \right\| \le M$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$ і, по-друге, краща швидкість наближення, $O(1/n)$. Використаємо ці переваги для одержання нових апроксимаційних теорем для C_0-напівгруп.

Нехай A — генератор стискуючої C_0-напівгрупи. Розглянемо для нього апроксимації Іосіда

$$A_\lambda = \lambda(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I \in L(X).$$

Відомо, що

$$\| A_\lambda \| \le \lambda, \quad \| A_\lambda x - Ax \| \to 0, \quad x \in D(A),$$

та

$$\left\| e^{A_\lambda t}x - e^{At}x \right\| \to 0, \quad x \in X, \quad \lambda \to \infty,$$

причому остання збіжність рівномірна на будь-якому скінченному відрізку.

Означення 1. *Послідовність* $\{\lambda_n,\ n \ge 0\}$ *таку, що* $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, *назвемо K-повільною, якщо* $\lambda_n e^{K\lambda_n}/n \to 0$, $n \to \infty$.

Очевидно, що $\lambda_n = \gamma \ln n / 2K$ є K-повільною при будь-якому $0 < \gamma < 1$.

Теорема 2. *Нехай* $\{\lambda_n,\ n \ge 0\}$ — $2T$-*повільна послідовність,* A — *генератор стискуючої* C_0-*напівгрупи. Тоді*

$$\sup_{0 \le t \le T} \left\| e^{At}x - \left(I + \frac{A_{\lambda_n} t}{n} \right)^n x \right\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Доведення. Запишемо (4) для A_{λ_n}:

$$\sup_{0\le t\le T}\left\| e^{A_{\lambda_n} t}x - \left(I + \frac{A_{\lambda_n} t}{n} \right)^n x \right\| \le T\|x\|\frac{1}{n}\lambda_n e^{2T\lambda_n} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Крім того,

$$\sup_{0\le t\le T}\left\| e^{A_{\lambda_n} t}x - e^{At}x \right\| \to 0, \quad n\to\infty.$$

З цих двох співвідношень випливає твердження теореми.

***Наслідок* 1.** *Для стискуючої C_0-напівгрупи $\{T_t\}$ з генератором A справджується апроксимаційна формула*

$$T_t x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{t^k}{n^k} A_{\lambda_n}^k x, \quad x\in X,$$

де A_{λ_n} — „повільні" апроксимації Іосіда генератора A, причому збіжність рівномірна на кожному відрізку $[0, T]$.

***Зауваження* 1.** Наступний простий приклад з використанням ейлерових наближень показує, що збіжність

$$\left\| e^{At}x - \left(I + \frac{At}{n} \right)^n x \right\| \to 0, \quad n\to\infty,$$

не має, взагалі кажучи, місця, якщо оператор A — необмежений генератор стискуючої C_0-напівгрупи.

***Приклад* 1.** Візьмемо $X = L_2(\mathbb{R})$, A — оператор диференціювання, $\{T_t\}$ — напівгрупа зсувів. Візьмемо також

$$x(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-z^2}\right), & z\in(-1,1); \\ 0 & |z|\ge 1. \end{cases}$$

Очевидно, $x\in X\bigcap C^\infty(A)$. Покладемо

$$x_n(z) = \left(I + n^{-1}\frac{d}{dz} \right)^n x(z).$$

Для кожного $n\ge 0$ маємо $x_n(-1)=0$. Більш того, з аналітичності функції $x(z)$ при $z\in(-1, 1)$ маємо для $z\in(-1, 0)$ збіжність $x_n(z)\to x(z+1)$, $n\to\infty$. Зокрема, $x_n(-1+1/k)\to x(1/k)$, $n\to\infty$. Звідси видно, що не тільки немає збіжності $\lim_{n\to\infty} x_n(z) = x(z+1) = T_1 x(z)$, але й поточкова границя у лівій частині навіть не буде неперервною.

Теорема 3 („повільна" мультиплікативна формула Чернова). *Нехай сім'я операторів $\{V(h,\alpha),\ \alpha, h\ge 0\}$ в $L(X)$ задовольняє умови*:

1) $V(0,\alpha) = I$, $\alpha\ge 0$;

2) *існує монотонно зростаюча функція $\alpha(h)$, $h>0$, така, що $\alpha(h)\to\infty$, $h\to 0$, і границя*

$$Bx := \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(V(h,\alpha(h))x - x)$$

існує для всіх $x\in D\subset X$, причому D та $(I-\lambda_0 B)D$ скрізь щільні в X для певного $\lambda_0>0$;

3) *існує таке* $h_0 > 0$, *що для всіх* $t > 0$

$$\sup_{h \le h_0} \left\| e^{tZ(h)} \right\| \le M e^{\omega t},$$

де $Z(h) = h^{-1}(V(h, \alpha(h)) - I)$;

4) *для деякого* $T > 0$ *послідовність* $\sup_{t \le T} \| Z(t/n) \|$ *задовольняє означення* $2T$*-повільності, крім, можливо, розбіжності до нескінченності.*

Тоді замикання $\overline{B}$ *оператора* B *породжує* C_0*-напівгрупу* $\{T_t,\ t \ge 0\}$, *яка задовольняє співвідношення*

$$T_t x = \lim_{n \to \infty} (V(t/n, \alpha(t/n)))^n x \tag{8}$$

рівномірно на відрізку $[0, T]$.

Зауваження 2. Ми не вимагаємо, як у класичній теоремі Чернова, обмеженості норм $\| V(h, \alpha)^m \|$ або умови $\| V(h, \alpha) \| \le 1$.

Доведення. З умов 1 – 3 та теореми Троттера – Като [6] (теорема 4.9) випливає, що $\overline{B}$ породжує C_0-напівгрупу $\{T_t\}$, причому

$$\left\| T_t x - e^{tZ(t/n)} x \right\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

рівномірно на відрізку $[0, T]$. Залишається довести (8). Для цього, в свою чергу, достатньо перевірити, що

$$\left\| e^{tZ(t/n)} x - V(t/n, \alpha(t/n))^n x \right\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

рівномірно на $[0, T]$. Запишемо (3) для $A = Z(t/n)$, $T = t$, $N = n$:

$$\left\| e^{tZ(t/n)} x - \left(I + \frac{t}{n} Z\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x \right\| \le \frac{1}{n} \left\| Z\left(\frac{t}{n}\right) \right\| e^{2\| Z(t/n) \| t} t.$$

Очевидно, $I + (t/n)Z(t/n) = V(t/n, \alpha(t/n))$, тому, враховуючи умову 4, одержуємо

$$\sup_{t \le T} \left\| e^{tZ(t/n)} x - V\left(\frac{t}{n}, \alpha\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x \right\| \le \sup_{t \le T} \frac{1}{n} \left\| Z\left(\frac{t}{n}\right) \right\| e^{2\| Z(t/n) \| t} t \to 0, \quad n \to \infty,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 3. Якщо виконуються умови 1, 2 і оператори $V(h, \alpha)$ є стискуючими для всіх $\alpha, h > 0$, то умова 4 є зайвою. Справді, тоді за класичною нерівністю Чернова

$$\left\| e^{tZ(t/n)} x - V\left(\frac{t}{n}, \alpha\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x \right\| \le \frac{\sqrt{n}}{t} \left\| V\left(\frac{t}{n}, \alpha\left(\frac{t}{n}\right)\right) x - x \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \frac{V(t/n, \alpha(t/n)) x - x}{t/n} \right\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

для всіх $x \in D$, а значить, для всіх $x \in X$. Отже, має місце така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* 1 – 3 *попередньої теореми і* $V(h, \alpha)$ *є стискуючими для всіх* $\alpha, h \ge 0$, *то*

$$T_t x = \lim_{n \to \infty} V\left(\frac{t}{n}, \alpha\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x$$

рівномірно на кожному скінченному відрізку.

1. 3. „Повільні" формули Уіддера – Поста та Троттера. Покладемо

$$V(h, \alpha) = (I - hA_\alpha)^{-1},$$

де $\{A_\alpha,\ \alpha > 0\}$ — апроксимації Іосіда генератора A стискуючої напівгрупи $\{T_t,\ t \geq 0\}$. Нехай $\alpha(h) = \lambda_{[1/h]}$, причому виконуються умови

$$\lambda_n \to \infty, \quad n^{-1}\lambda_n^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тоді $V(h, \alpha(h)) = \left(I - hA_{\lambda_{[1/h]}}\right)^{-1}$. Перевіримо умови 4, врахувавши зауваження 3. Умова 1 є очевидною. Далі, для деякого фіксованого $q \in (0, 1)$ при достатньо малих h маємо $\lambda_{[1/h]} < q/h$. Враховуючи, що $\left\| A_{\lambda_{[1/h]}} \right\| \leq \lambda_{[1/h]}$, одержуємо

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(V(h, \alpha(h)) - I)x = \lim_{h\to 0} h^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} h^k A_{\lambda_{[1/h]}}^k x =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(A_{\lambda_{[1/h]}} x + S(h)x\right),$$

де

$$\|S(h)x\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1} A_{\lambda_{[1/h]}}^k x \right\| \leq \|x\| \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1}\lambda_{[1/h]}^k \leq$$

$$\leq \|x\| h\lambda_{[1/h]}^2 \frac{1}{1-q} \to 0, \quad h \to 0.$$

Крім того, $A_{\lambda_{[1/h]}} x \to Ax,\ x \in D$. Отже, умову 2 виконано. Умова 3 справджується, оскільки оператори $Z(h)$ і $A_{\lambda_{[1/h]}}$, як апроксимації Іосіда генераторів стискуючих напівгруп, самі генерують стискуючі напівгрупи, тому $\left\| e^{tZ(h)} \right\| \leq 1$. Нарешті,

$$\| V(h, \alpha) \| \leq \left\| hR_{h^{-1}}(A_\alpha) \right\| \leq 1.$$

Всі умови теореми 4 виконано, тому, розкладаючи $V(h, \alpha)$ у ряд, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2 („повільна" формула Уіддера – Поста). *Якщо A — генератор стискуючої напівгрупи T_t, A_α — його апроксимації Іосіда, а послідовність $\{\lambda_n\}$ така, що $\lambda_n \to \infty$, $n^{-1}\lambda_n^2 \to 0$, $n \to \infty$, то рівномірно на кожному скінченному відрізку*

$$T_t x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{n^k} A_{\lambda_{[n/t]}}^k \right)^n x. \tag{9}$$

Нехай $\{T_t\}$, $\{S_t\}$ — дві стискуючі C_0-напівгрупи на X з генераторами A та B відповідно, A_λ, B_λ, $\lambda > 0$, — відповідні апроксимації Іосіда. Покладемо

$$V(h, \alpha) = e^{hA_\alpha} e^{hB_\alpha}, \quad \alpha(h) = \lambda_{[1/h]}.$$

Нехай $\{\lambda_n\}$ задовольняє умови наслідку 2. Тоді, як при доведенні наслідку 2, можна перевірити, що

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(V(h, \alpha(h)) - I)x = (A+B)x, \quad x \in D = D(A) \cap D(B).$$

Припустимо, що D і $(\lambda_0 - A - B)D$ щільні в X для деякого $\lambda_0 > 0$. Тоді $\overline{A+B}$ генерує C_0-напівгрупу $\{U_t\}$. Безпосередньо з (8) випливає

$$e^{\overline{A+B}t} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{tA_{\lambda_{[t/n]}}/n} e^{tB_{\lambda_{[t/n]}}/n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{n^k} \sum_{i=0}^{k} A^i_{\lambda_{[t/n]}} B^{k-i}_{\lambda_{[t/n]}}\right)^n.$$

2. Ейлерові наближення розв'язку нестаціонарної задачі Коші та швидкість збіжності апроксимацій еволюційного оператора. Нехай $\{A(t), t \geq 0\}$ — сім'я лінійних неперервних операторів у банаховому просторі X, яка задовольняє умови

$$\begin{gathered} \|A(t)\| \leq M, \quad t \in [0, T], \\ \|A(t) - A(s)\| \leq L|t-s|, \quad t, s \in [0, T]. \end{gathered} \tag{10}$$

Розглянемо нестаціонарну задачу Коші

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \\ x(s) = x_0 \in X. \end{gathered} \tag{11}$$

Відомо, що можна побудувати сім'ю $\{U(t, s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ лінійних неперервних операторів таку, що виконуються умови

$$\begin{gathered} U(s, s) = I, \quad U(t, s) = U(t, r)U(r, s), \quad s \leq r \leq t, \\ \frac{d}{dt}U(t, s) = A(t)U(t, s), \quad \frac{d}{ds}U(t, s) = -U(t, s)A(s) \end{gathered}$$

і єдиний розв'язок задачі (11) має вигляд $x(t) = U(t, s)x_0$. Одразу відмітимо, що з тривіальної оцінки

$$x(t) \leq \|x_0\| + \int_0^t M\|x(s)\| ds$$

випливає $x(t) \leq \|x_0\| e^{M(t-s)}$. Для даного $N > 0$ розглянемо рівномірне розбиття $\tau_n = n\delta + s$, $\delta = (T-s)/N$ відрізка $[s, T]$ і побудуємо ейлерові апроксимації розв'язку $x(t)$ таким чином:

$$y_0^\delta = x_0, \quad y_{n+1}^\delta = y_n^\delta + \delta A(\tau_n) y_n^\delta = \prod_{k=0}^{n} (I + \delta A(\tau_k))x_0.$$

Виконаємо неперервну інтерполяцію

$$y^\delta(t) = \frac{\tau_{n+1} - t}{\delta} y^\delta(\tau_n) + \frac{t - \tau_n}{\delta} y^\delta(\tau_{n+1}).$$

Зауважимо, що

$$y^\delta(t) = x_0 + \int_s^t A\left(\tau_{n_u}\right) y^\delta\left(\tau_{n_u}\right) du,$$

де, як і в першій частині, $n_u = \max\{n : \tau_n \leq u\}$.

Теорема 5. *Має місце збіжність ейлерових апроксимацій до розв'язку, причому*

$$\sup_{t\in[s,T]}\left\| y^{\delta}(t)-x(t)\right\| \le \left(M+\frac{L}{M}\right)\| x_0\| e^{M(T-s)}\delta.$$

Доведення. Запишемо

$$Z(t) = \sup_{u\in[s,t]}\left\| y^{\delta}(u)-x(u)\right\| \le \sup_{u\in[s,t]}\int_s^u \left\| A(v)x(v)+A\left(\tau_{n_v}\right)y^{\delta}\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv \le$$

$$\le \int_s^t \left\| A(v)x(v)-x\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv + \int_s^t \left\| \left(A(v)-A\left(\tau_{n_v}\right)\right)x\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv +$$

$$+ \int_s^t \left\| A\left(\tau_{n_v}\right)\left(x\left(\tau_{n_v}\right)-y^{\delta}\left(\tau_{n_v}\right)\right)\right\| dv \le$$

$$\le M\left(\int_s^t \left\| x(v)-x\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv + \int_s^t \left\| x\left(\tau_{n_v}\right)-y^{\delta}\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv\right) +$$

$$+ L\int_0^t \left|u-\tau_{n_u}\right| \left\| x\left(\tau_{n_u}\right)\right\| du.$$

При цьому

$$\left\| x(v)-x\left(\tau_{n_v}\right)\right\| \le \int_{\tau_{n_v}}^{v} M\| x(r)\| dr \le M\| x_0\| M^{(v-s)}\delta.$$

Тому

$$\int_s^t \left\| x(v)-x\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv \le \| x_0\|\left(e^{M(t-s)}-1\right)\delta \le \| x_0\| e^{M(T-s)}\delta.$$

Оцінка

$$L\int_s^t \left|v-\tau_{n_v}\right| \left\| x\left(\tau_{n_v}\right)\right\| dv \le \frac{L}{M}\| x_0\| e^{M(T-s)}\delta$$

є очевидною. Отже, маємо

$$Z(t) \le \left(M+\frac{L}{M}\right)\| x_0\| e^{M(T-s)}\delta + M\int_s^t Z(v)\,dv.$$

Використовуючи лему Гронуолла, отримуємо

$$Z(t) \le \left(M+\frac{L}{M}\right)\| x_0\| e^{2M(T-s)}\delta,$$

звідки випливає твердження теореми.

***Наслідок* 3.** *Має місце оцінка*

$$\sup_{1\le n\le N}\left\| U\left(s+\frac{n(T-s)}{N},s\right)x_0-\prod_{k=1}^{n}\left(I+\frac{T-s}{N}A\left(s+\frac{n(T-s)}{N}\right)\right)x_0\right\| \le \frac{C}{N},$$

де $C=\left(M+\dfrac{L}{M}\right)\| x_0\| e^{2M(T-s)}(T-s)$. *Зокрема,*

$$\left\| U(T,s)x - \prod_{k=1}^{N}\left(I + \frac{T-s}{N}A\left(s+\frac{k(T-s)}{N}\right)\right)x \right\| \le \frac{C}{N}, \quad x \in X. \tag{12}$$

Нерівність (12) вказує на те, що швидкість збіжності апроксимацій еволюційного оператора є $O(1/n)$.

У роботі [6] одержано іншу апроксимаційну формулу шляхом заміни $A(t)$ кусково-постійною операторною функцією, а саме,

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\exp\left\{\frac{T-s}{N}A\left(s+\frac{k(T-s)}{N}\right)\right\}x = U(T,s)x, \quad x \in X. \tag{13}$$

Порівнюючи дану рівність з (12), одержуємо збіжність

$$\lim_{N\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{N} e^{((T-s)/N)A(s+k(T-s)/N)}x - \prod_{k=1}^{N}\left(I+\frac{T-s}{N}A\left(s+\frac{k(T-s)}{N}\right)\right)x\right) = 0,$$

$$x \in X,$$

яка має місце для сім'ї операторів, що задовольняють умови (10).

3. Ейлерові наближення еволюційних рівнянь та апроксимаційна теорема для збуреної напівгрупи. Нехай A, B — лінійні неперервні оператори в банаховому просторі X,

$$U(t) = e^{At}, \quad S(t) = e^{(A+B)t}, \quad t \ge 0.$$

Відомо, що $S(t)$ задовольняє рівняння (див. [6])

$$S(t) = U(t) + \int_0^t U(t-s)BS(s)\,ds.$$

Зауважимо, що

$$S(t+\delta) = U(\delta)S(t) + \int_t^{t+\delta} U(t+\delta-s)BS(s)\,ds.$$

Виходячи з цього, будемо будувати апроксимації для $S(t)$ таким чином. Для $N \in \mathbb{N}$ покладемо $\delta = T/N$, $\tau_n = n\delta$, $0 \le n \le N$,

$$S^{\delta}(0) = I, \quad S^{\delta}(\tau_{n+1}) = U(\delta)S^{\delta}(\tau_n) + \delta U(\delta)BS^{\delta}(\tau_n) =$$

$$= U(\delta)(I+\delta B)S^{\delta}(\tau_n) = \left(U(\delta)(I+\delta B)\right)^{n+1}. \tag{14}$$

Неперервно інтерполюємо

$$S^{\delta}(t) = U\left(t-\tau_{n_t}\right)S^{\delta}\left(\tau_{n_t}\right) + \int_{\tau_{n_t}}^{t} U\left(t-\tau_{n_t}\right)BS^{\delta}\left(\tau_{n_t}\right)ds =$$

$$= U(t) + \int_0^t U\left(t-\tau_{n_s}\right)BS^{\delta}\left(\tau_{n_s}\right)ds. \tag{15}$$

Теорема 6. *Ейлерові апроксимації $S^{\delta}(t)$ збігаються до $S(t)$, причому*

$$\sup_{0\le s\le T}\left\|S(s)-S^{\delta}(s)\right\| \le C\delta,$$

де

$$C = \|B\|(2\|A\|+\|B\|)\exp\left\{\left(\|A\|+\|B\|+e^{\|A\|T}\|B\|\right)T\right\}.$$

Доведення. Маємо оцінки

$$\|U(t)\| \leq e^{\|A\|t}, \quad \|S(t)\| \leq e^{(\|A\|+\|B\|)t}.$$

Далі, для $s \leq t$

$$\|U(t)-U(s)\| \leq \int_s^t \|AU(u)\|du \leq (t-s)\|A\|e^{\|A\|t}, \tag{16}$$

$$\|S(t)-S(s)\| \leq (t-s)\|A+B\|\, e^{\|A+B\|t}. \tag{17}$$

Покладемо

$$Z(t) = \sup_{0\leq s\leq t}{}' \left\|S(s)-S^{\delta}(s)\right\|.$$

Запишемо

$$Z(t) \leq \sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|U(s-u)BS(u)-U\left(s-\tau_{n_u}\right)BS^{\delta}\left(\tau_{n_u}\right)\right\|du \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|U(s-u)B\left(S(s)-S\left(\tau_{n_u}\right)\right)\right\|du +$$

$$+ \sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|\left(U(s-u)-U\left(s-\tau_{n_u}\right)\right)BS\left(\tau_{n_u}\right)\right\|du +$$

$$+ \sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|U\left(s-\tau_{n_u}\right)B\left(S\left(\tau_{n_u}\right)-S^{\delta}\left(\tau_{n_u}\right)\right)\right\|du.$$

Оцінимо перший доданок:

$$\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|U(s-u)B\left(S(s)-S\left(\tau_{n_u}\right)\right)\right\|ds \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s e^{\|A\|(s-u)}\|B\|\|A+B\|e^{(\|A+B\|)u}\delta\, du \leq \|B\|\|A+B\|e^{(\|A+B\|)t}\delta.$$

Аналогічно для другого та третього доданків

$$\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|\left(U(s-u)-U\left(s-\tau_{n_u}\right)\right)BS\left(\tau_{n_u}\right)\right\|du \leq \|A\|\|B\|e^{(\|A+B\|)t}\delta,$$

$$\sup_{0\leq s\leq t}\int_0^s \left\|U\left(s-\tau_{n_u}\right)B\left(S\left(\tau_{n_u}\right)-S^{\delta}\left(\tau_{n_u}\right)\right)\right\|du \leq e^{\|A\|t}\|B\|\int_0^t Z(s)\,ds.$$

Звідси

$$Z(t) \leq \|B\|(2\|A\|+\|B\|)e^{(\|A+B\|)T}\delta + e^{\|A\|T}\|B\|\int_0^t Z(s)\,ds,$$

і, застосовуючи лему Гронуолла, маємо

$$Z(t) \le \|B\|(2\|A\|+\|B\|)\exp\left\{\left(\|A+B\|+e^{\|A\|T}\|B\|\right)T\right\}\delta.$$

Теорему доведено.

***Наслідок* 4.** *Справджується оцінка*

$$\sup_{1\le n\le N}\left\|S\left(\frac{nT}{N}\right)-\left(U\left(\frac{T}{N}\right)\left(I+\frac{T}{N}B\right)\right)^n\right\| \le \frac{C}{N},$$

зокрема,

$$\left\|S(T)-\left(U\left(\frac{T}{N}\right)\left(I+\frac{T}{N}B\right)\right)^N\right\| \le \frac{C}{N}.$$

Ми отримали своєрідну апроксимаційну формулу для $S(t) = e^{(A+B)t}$, відмінну від мультиплікативної формули Троттера. Щоправда, поки що вона має місце лише для обмежених операторів A і B. Нехай тепер A — генератор стискуючої C_0-напівгрупи, A_λ — його наближення Іосіда, $B \in L(X)$. Тоді, очевидно, $A+B$ генерує C_0-напівгрупу і

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|e^{(A_\lambda+B)t}x-e^{(A+B)t}x\right\|\to 0, \quad n\to\infty,$$

для будь-яких $T>0$, $x\in X$.

Означення 2. *Послідовність* $\{\lambda_n,\ n\ge 0\}$ *таку, що* $\lambda_n\to\infty$, $n\to\infty$, *назвемо K-надповільною, якщо*

$$\frac{1}{n}\lambda_n^2 e^{K\lambda_n}\to 0, \quad \lambda\to\infty.$$

Враховуючи теорему 6, аналогічно теоремі 2 можна довести наступний результат.

Теорема 7. *Нехай A генерує стискуючу напівгрупу,* $B\in L(X)$, $\{\lambda_n,\ n\ge 0\}$ — $\left(1+e^{\|B\|T}\right)T$*-надповільна послідовність. Тоді*

$$e^{(A+B)t}x = \lim_{n\to\infty}\left(e^{Bt/n}\left(I+\frac{A_{\lambda_n}}{n}\right)^n\right)x, \quad x\in X,$$

рівномірно на будь-якому скінченному відрізку.

***Зауваження* 4.** У статтях [8 – 17] розглянуто інші варіанти формул Чернова та Троттера, які не базуються на ейлерових наближеннях, і наведено оцінки швидкості збіжності. При цьому, наприклад, у статті [8] оцінюється, в наших термінах, норма $\left\|e^B-(I+B/n)^n\right\|$ для квазісекторіальних стискуючих операторі. Але при цьому швидкість збіжності лише $O\left(n^{-1/3}\right)$. У статті [12] оцінюється норма $\left\|e^{(A+B)t}-\left(e^{At/n}e^{Bt/n}\right)^n\right\|$ для спеціального класу m-акретивних операторів, швидкість збіжності при цьому $O\left(\ln n\,/\,n^\alpha\right)$.

1. *Butzer P. L., Berens H.* Semigroups of operators and approximation. – New York: Springer, 1967. – 318 p.
2. *Altomare F., Campiti M.* Korovkin-type approximation theory and its applications // De Gruyter Stud. Math. – Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1994. – **17**. – 627 p.

3. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Мат анализ / ВИНИТИ. – 1990. – **28**. – С. 87–202.
4. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща шк., 1989. – 348 с.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
6. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations // Grad. Texts Math. – New York: Springer, 2000. – **194**. – 586 p.
7. *Chernoff P. R.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. – 1968. – **2**. – P. 238–242.
8. *Paulauskas V.* On operator-norm approximation of some semigroups by quasi-sectorial operators // Ibid. – 2003.
9. *Cachia V., Zagrebnov V. A.* Operator-norm approximation of semigroups by quasi-sectorial contractions // Ibid. – 2001. – **180**. – P. 176–194.
10. *Cachia V., Zagrebnov V. A.* Operator-norm convergence of the Trotter product formula for holomorphic semigroups // J. Operator Theory. – 2001. – **46**, № 1. – P. 199–213.
11. *Cachia V., Zagrebnov V. A.* Operator-norm convergence of the Trotter product formula for sectorial generators // Lett. Math. Phys. – 1999. – **50**. – P. 203–211.
12. *Cachia V., Neidhardt H., Zagrebov V. A.* Comments on the Trotter product formula error-bound estimates for nonself-adjoint semigroups // Int. Equat. Operator Theory. – 2002. – **42**, № 4. – P. 425–448.
13. *Cachia V., Neidhardt H., Zagrebnov V. A.* Accretive perturbations and error estimates for the Trotter product formula // Ibid. – 2001. – **39**, № 4. – P. 396–412.
14. *Neidhardt H., Zagrebnov V. A.* On error estimates for the Trotter product formula // Lett. Math. Phys. – 1998. – **44**, № 3. – P. 169–186.
15. *Neidhardt H., Zagrebnov V. A.* Trotter – Kato product formula and operator-norm convergence // Communs Math. Phys. – 1999. – **205**. – P. 129–159.
16. *Cachia V.* Euler's exponential formula for semigroups. – Preprint 11/2002 (to appear in Semigroup Forum).
17. *Ichinose T., Tamura H.* On the norm convergence of the self-adjoint Trotter – Kato formula with error bound // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 2002. – **112**, № 1. – P.99–106.

Одержано 06.02.2003