УДК 519.21

Т. В. Каданкова (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ В ИНТЕРВАЛЕ

We investigate boundary functionals of a semicontinuous process with independent increments on an interval with two reflecting boundaries. We obtain transition and ergodic distributions of the process, as well as distributions of boundary functionals of the process, namely, the moment of first attainment of the upper (lower) bound, the number of intersections of interval, the summary response time. We also present the boundary theorem for ergodic distribution of the process and asymptotic formulas for mean values of distributions considered.

Досліджуються граничні функціонали напівнеперервного процесу з незалежними приростами в інтервалі з двома відбиваючими межами. Отримано перехідні та ергодичні розподіли процесу, а також розподіли граничних функціоналів процесу: моменту першого досягнення верхньої (нижньої) межі, кількості відвідувань меж, кількості перетинів інтервалу, сумарного часу перебування процесу на межах та в інтервалі. Також наведено граничну теорему для ергодичного розподілу процесу та асимптотичні формули для середніх значень розподілів, що вивчаються.

Определение процесса. Пусть $\xi(t) \in R$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями [1], полунепрерывный снизу с кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{2}p^2\sigma^2 - \alpha p + \int\limits_0^\infty \left(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2}\right)\Pi(dx).$$

Будем предполагать, что выборочные траектории процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, являются непрерывными справа.

Зафиксируем действительное число $B > 0$, введем неотрицательные случайные величины $\eta, \xi \in [0, \infty)$, $M\xi, M\eta < \infty$, а также случайную величину $\gamma = \gamma(B) \in (0, B)$ и будем считать, что η, ξ, γ не зависят от процесса $\xi(t), t \geq 0$.

Пусть

$$\chi_\gamma = \inf\{t > 0,\ B - \gamma + \xi(t) \notin (0, B)\}$$

— момент первого выхода процесса $B - \gamma + \xi(t)$ из интервала $(0, B)$. Определим случайный процесс $Y(t) \in [0, B]$, $t \geq 0$, посредством следующего стохастически рекуррентного соотношения:

$$Y(t) = \begin{cases} B - \gamma + \xi(t), & & 0 \leq t < \chi_\gamma; \\ B, & \chi_\gamma \leq t < \chi_\gamma + \xi, & \xi(\chi_\gamma) \geq B; \\ Y(t - \chi_\gamma - \xi), & t \geq \chi_\gamma + \xi, & \xi(\chi_\gamma) \geq B; \\ 0, & \chi_\gamma \leq t < \chi_\gamma + \eta, & \xi(\chi_\gamma) = 0; \\ Y(t - \chi_\gamma - \eta), & t \geq \chi_\gamma + \eta, & \xi(\chi_\gamma) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Процесс $Y(t)$, $t \geq 0$, стартует из случайного состояния $B - \gamma \in (0, B)$, где γ — расстояние до верхней границы B, и до момента χ_γ его траектории совпадают с траекториями процесса $B - \gamma + \xi(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \xi_\gamma(t)$. Если момент первого выхода процесса $\xi_\gamma(t)$ из интервала $(0, B)$ осуществился на событии $\{\xi(\chi_\gamma) \geq B\}$, то процесс $Y(t)$ проводит на верхней границе B случайное время ξ и затем „отражается" в случайное состояние $B - \gamma$. Дальнейшие его траектории совпадают с траекториями процесса $Y(t - \chi_\gamma - \xi)$, $t \geq \chi_\gamma + \xi$.

Если момент первого выхода процесса $\xi_\gamma(t)$ из интервала $(0, B)$ произошел на событии $\{\xi(\mathcal{X}_\gamma) = 0\}$, то процесс $Y(t)$ проводит на нижней границе 0 случайное время η и затем отражается в случайное состояние $B-\gamma$. Для $t \geq \mathcal{X}_\gamma + \eta$ его траектории совпадают с траекториями процесса $Y(t-\mathcal{X}_\gamma-\eta)$.

Если $\mathrm{P}[\gamma = x] = 1$, $x \in (0, B)$, то после отражения от границ процесс $Y(t)$ попадает в одно и то же начальное состояние $B-x$.

Если $\mathrm{P}[\xi = \eta = 0] = 1$, то происходит „мгновенное" отражение процесса $Y(t)$, $t \geq 0$, от границ.

В настоящей работе получены переходное и эргодическое распределения процесса $Y(t)$, $t \geq 0$, а также распределения таких граничных функционалов процесса, как момент первого достижения верхней (нижней) границы, число посещений границ, число пересечений интервала $(0, B)$, суммарное время пребывания процесса на границах и внутри интервала.

Такие случайные процессы можно использовать в качестве математических моделей в теории очередей, теории надежности, финансовой математике и других прикладных областях теории вероятностей.

Граничные функционалы для процесса Пуассона с течением и отражающими границами методами теории восстановления исследованы в работе [2]. Получены как допредельные, так и предельные распределения исследуемых характеристик процесса. Переходная вероятность процесса Пуассона с течением и мгновенными отражающими границами изучалась в работе [3].

1. Переходные и эргодические распределения процесса $Y(t)$, $t \geq 0$. Пусть $c(s) > 0$ — единственный корень [1] уравнения $k(p) - s = 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и

$$R^s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xp} \frac{1}{k(p)}\, dp, \qquad a > c(s),$$

— резольвента [4–7] полунепрерывного снизу процесса с независимыми приращениями. Введем случайную величину

$$\mathcal{X}_x = \inf\{t > 0,\ B - x + \xi(t) \notin (0, B)\}, \qquad x \in (0, B).$$

Распределения момента первого выхода процесса из интервала резольвентными методами [4] получены в работе [5]:

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\mathcal{X}_x}, \xi(\mathcal{X}_x) = 0\right] = \frac{R^s(x)}{R^s(B)},$$

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\mathcal{X}_x}, \xi(\mathcal{X}_x) \geq B\right] = 1 - \frac{R^s(x)}{R^s(B)} - s\frac{R^s(x)}{R^s(B)} \int_0^B R^s(u)\, du + s\int_0^x R^s(u)\, du. \tag{2}$$

Далее, автором получено совместное распределение инфимума, супремума и значения процесса

$$\mathrm{P}\left[-y \leq \inf_{t \leq \nu_s} \xi(t), \xi(\nu_s) \in (\alpha, \beta), \sup_{t \leq \nu_s} \xi(t) \leq x\right] =$$

$$= s\frac{R^s(x)}{R^s(B)} \int_\alpha^\beta R^s(y+u)\, du - s\int_{\max\{0,\alpha\}}^{\max\{0,\beta\}} R^s(u)\, du, \tag{3}$$

где $x, y > 0$, $x + y = B$, $-y \leq \alpha < \beta \leq x$, ν_s — показательно распределенная случайная величина с параметром $s > 0$, независимая от процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$.

Равенства (2), (3) позволяют определить распределения процесса $Y(t),\ t \geq 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t),\ t \geq 0,$ — *однородный процесс с независимыми приращениями, полунепрерывный снизу, и*

$$\tilde{f}(s) = \mathrm{M}e^{-s\eta}, \quad \tilde{g}(s) = \mathrm{M}e^{-s\xi}.$$

Тогда для распределения процесса $Y(t),\ t \geq 0,$ *выполняются равенства*

$$\mathrm{P}[Y(\nu_s) \doteq B] = \frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right],$$

$$\mathrm{P}[Y(\nu_s) = 0] = \frac{1-\tilde{f}(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right], \tag{4}$$

$$\mathrm{P}\left[Y(\nu_s) \in (\alpha, \beta)\right] = \frac{s}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\frac{\mathrm{M}R^s(\gamma)}{R^s(B)}\int_\alpha^\beta R^s(u)\,du \,-$$

$$- \frac{s}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\int_0^B p(B-x)\int_{\max\{\alpha, x\}}^{\max\{\beta, x\}} R^s(u-x)\,du\,dx, \quad \alpha, \beta \in [0, B],$$

где

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa} = \tilde{g}(s)\int_0^B p(x)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_x}, \xi(\chi_x) \geq B\right]dx \,+$$

$$+ \tilde{f}(s)\int_0^B p(x)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_x}, \xi(\chi_x) = 0\right]dx.$$

Приведем ряд следствий теоремы 1.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\mathrm{M}\xi,\ \mathrm{M}\eta < \infty$ *и*

$$R(x) = \lim_{s\to 0} R^s(x), \qquad S(x) = \int_0^B R(u)\,du, \quad x > 0.$$

Тогда существует эргодическое распределение

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left[Y(t) \leq x\right] = \mathrm{P}\left[Y \leq x\right], \quad x \in [0, B],$$

процесса $Y(t),\ t \geq 0,$ *и при этом*

$$\mathrm{P}\left[Y \leq x\right] = \frac{U(x)}{U(B)}, \quad x \in [0, B],$$

где

$$U(x) = \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)}S(x) - \int_0^x p(B-u)S(x-u)\,du \,+$$

$$+ P^-(B)\mathrm{M}\eta + \varepsilon(B-x)P^+(B)\mathrm{M}\xi, \tag{5}$$

$\varepsilon(x)$ — *индикаторная функция:* $\varepsilon(x) = 0,\ x < 0;\ \varepsilon(x) = 1,\ x \geq 0$ *и*

$$P^-(B) = \mathrm{P}\left[\xi(\chi_\gamma) = 0\right] = \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)},$$

$$P^+(B) = \mathrm{P}\left[\xi(\chi_\gamma) \geq B\right] = 1 - \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)}$$

— *вероятности первого выхода процесса* $B - \gamma + \xi(t)$, $t \geq 0$, *из интервала* $(0, B)$ *через нижнюю и верхнюю границы соответственно.*

Обозначим $m = \mathrm{M}\xi(1) = -k'(0)$ и приведем предельное распределение случайной величины $Y/B \in [0, 1]$ при $B \to \infty$ в случае, когда случайная величина $\gamma = \gamma(B)$ симметрично распределена относительно середины интервала $(0, B)$.

Следствие 2. *Пусть случайная величина* $\gamma \in (0, 1)$ *симметрично распределена относительно середины интервала* $(0, 1)$,

$$\mathrm{P}[\gamma < x] = \mathrm{P}[\gamma > 1 - x], \quad x \in (0, 1),$$

а

$$\gamma(B) = B\gamma \in (0, B).$$

Тогда:

если $m > 0$, *то*

$$\lim_{B \to \infty} \mathrm{P}[Y / B \leq x] = 2\mathrm{M}[x - \gamma, \gamma < x], \quad x \in [0, 1]; \tag{6}$$

если $m = 0$, $\sigma = \mathrm{M}\xi(1)^2 < \infty$, *то*

$$\lim_{B \to \infty} \mathrm{P}[Y / B \leq x] = \frac{x^2 - 2\mathrm{M}\left[(x - \gamma)^2, \gamma < x\right]}{1 - 2\mathrm{M}\gamma^2}, \quad x \in [0, 1]; \tag{7}$$

если $m < 0$ *и существует* $c^- < 0$ *такое, что* $k(c^-) = 0$, $-\infty < k'(c^-) < 0$, *то*

$$\lim_{B \to \infty} \mathrm{P}[Y / B \leq x] = 2x - 2\mathrm{M}[x - \gamma, \gamma < x], \quad x \in [0, 1]. \tag{8}$$

Пример 1. Пусть $\gamma \in (0, B)$ — равномерно распределенная случайная величина на интервале $(0, B)$.

Тогда предельное распределение случайной величины $Y/B \in (0, 1)$ имеет вид

$$\lim_{B \to \infty} \mathrm{P}[Y / B \leq x] = \begin{cases} x^2, & m > 0; \\ 3x^2 - 2x^3, & m = 0; \\ 2x - x^2, & m < 0. \end{cases}$$

Пример 2. Пусть $\gamma \in (0, B)$ — случайная величина с плотностью

$$p(x, B) = \frac{\pi}{2B} \sin\left(\frac{x}{B}\pi\right), \quad x \in (0, B).$$

Тогда для предельного распределения случайной величины $Y/B \in (0, 1)$ справедливы равенства

$$\lim_{B \to \infty} \mathrm{P}[Y / B \leq x] = \begin{cases} x - \dfrac{1}{\pi} \sin x\pi, & m > 0; \\ \sin^2 x\pi / 2, & m = 0; \\ x + \dfrac{1}{\pi} \sin x\pi, & m < 0. \end{cases}$$

Доказательства теоремы и следствий. Согласно определению процесса $Y(t)$, $t \geq 0$ (1), для функции $\mathrm{M}e^{-pY(\nu_s)}$ справедливо уравнение

$$\mathrm{M}e^{-pY(\nu_s)} = \mathrm{M}\left[e^{-p(B - \gamma + \xi(\nu_s))}, \chi_\gamma > \nu_s\right] +$$

$$+ e^{-pB}\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) \geq B\Big](1-\tilde{g}(s)) + \mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) = 0\Big]\Big(1-\tilde{f}(s)\Big) +$$

$$+ \left(\tilde{g}(s)\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) \geq B\Big] + \tilde{f}(s)\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) = 0\Big]\right)\mathrm{M}e^{-pY(\nu_s)}. \qquad (9)$$

Из этого уравнения находим

$$\mathrm{M}e^{-pY(\nu_s)} = \frac{1}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\Big[e^{-p(B-\gamma+\xi(\nu_s))}, \mathcal{X}_\gamma > \nu_s\Big] +$$

$$+ e^{-pB}\frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) \geq B\Big] + \frac{1-\tilde{f}(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) = 0\Big], \qquad (10)$$

где

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa} = \tilde{f}(s)\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) = 0\Big] + \tilde{g}(s)\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) \geq B\Big].$$

Из (10) следуют два первых равенства теоремы

$$\mathrm{P}\big[Y(\nu_s) = B\big] = \frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) \geq B\Big],$$

$$\mathrm{P}\big[Y(\nu_s) = 0\big] = \frac{1-\tilde{f}(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{M}\Big[e^{-s\mathcal{X}_\gamma}, \xi(\mathcal{X}_\gamma) = 0\Big].$$

Далее, из (3) следует формула

$$\mathrm{M}\left[e^{-p\xi(\nu_s)}, -y \leq \inf_{t\leq\nu_s}\xi(t), \sup_{t\leq\nu_s}\xi(t) \leq x\right] =$$

$$= se^{py}\frac{R^s(x)}{R^s(B)}\int_0^B R^s(u)\,du - s\int_0^x R^s(u)\,du, \qquad x, y > 0, \quad x+y = B. \qquad (11)$$

Учитывая однородность процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, по пространству и (11), получаем цепочку равенств

$$\mathrm{M}\Big[e^{-p(B-x+\xi(\nu_s))}, \mathcal{X}_x > \nu_s\Big] =$$

$$= e^{-p(B-x)}\mathrm{M}\left[e^{-p\xi(\nu_s)}, x-B \leq \inf_{t\leq\nu_s}\xi(t), \sup_{t\leq\nu_s}\xi(t) \leq x\right] =$$

$$= s\frac{R^s(x)}{R^s(B)}\int_0^B e^{-pu}R^s(u)\,du - s\int_0^x e^{-p(B-x+u)}R^s(u)\,du =$$

$$= s\int_0^B e^{-pu}\left(\frac{R^s(x)}{R^s(B)}R^s(u) - R^s(u+x-B)\right)du, \qquad R^s(x) = 0, \quad x \leq 0.$$

Поскольку

$$\mathrm{M}\Big[e^{-p(B-x+\xi(\nu_s))}, \mathcal{X}_x > \nu_s\Big] = \int_0^B e^{-pu}\,\mathrm{P}\big[Y(\nu_s)\in du, \mathcal{X}_x > \nu_s \,/\, Y(0) = B-x\big],$$

то

$$\frac{1}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\mathrm{P}\big[Y(\nu_s)\in du, \mathcal{X}_x > \nu_s \,/\, Y(0) = B-x\big] =$$

$$= \frac{1}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}}\left(\frac{R^s(x)}{R^s(B)}R^s(u) - R^s(u+x-B)\right)du, \quad u \in (0, B).$$

Интегрируя это равенство по распределению случайной величины γ и по интервалу $u \in (\alpha, \beta)$, получаем равенство (4). Таким образом, теорема доказана.

Докажем следствие 1. Введем случайную величину

$$\kappa \doteq \chi_\gamma + \xi I\{\xi(\chi_\gamma) \geq B\} + \eta I\{\xi(\chi_\gamma) = 0\}$$

и последовательность

$$\kappa_n, \ n \geq 0: \kappa_0 = 0, \ \kappa_n = \kappa'_1 + \ldots + \kappa'_n,$$

где κ'_i, $i > 0$, — независимые одинаково распределенные с κ случайные величины, а $I(A)$ — индикатор события A.

Поскольку в условиях теоремы

$$\mathrm{M}\kappa = \mathrm{M}\chi_\gamma + P^-(B)\mathrm{M}\eta + P^+(B)\mathrm{M}\xi < \infty$$

и моменты κ_n являются моментами регенерации процесса $Y(t)$, $t \geq 0$, то [9] существует эргодическое распределение

$$\mathrm{P}\big(Y \in [\alpha, \beta]\big) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\big(Y(t) \in [\alpha, \beta]\big), \qquad \alpha, \beta \in [0, B],$$

процесса $Y(t)$, $t \geq 0$, и для определения этого распределения необходимо вычислить пределы при $s \to 0$ в равенствах теоремы 1.

Следствие 1 доказано.

Установим справедливость равенств следствия 2. Для получения предельных распределений случайной величины $Y/B \in [0, 1]$ используем асимптотические свойства резольвенты и потенциала полунепрерывного процесса с независимыми приращениями, которые исследованы в работах [6, 7].

Так, если $m > 0$, то $\lim\limits_{s\to 0} c(s) = c > 0$, и при $x \to \infty$

$$R(x) = \frac{1}{k'(c)} e^{cx} - \frac{1}{m} + o(1). \tag{12}$$

Используя это представление потенциала, симметричность распределения случайной величины $\gamma(B)$ относительно середины интервала $(0, B)$, при $B \to \infty$ находим

$$\mathrm{P}[Y / B \leq x] = \mathrm{P}[Y \leq xB] = \frac{U(xB)}{U(B)} =$$

$$= 2\mathrm{M}[x - \gamma, \gamma < x] + \frac{1}{B}\frac{2m}{ck'(c)}\mathrm{M}\xi K^+(x) + o\left(\frac{1}{B}\right),$$

где

$$K^+(x) = \frac{1}{\mathrm{M}\xi}\left(2\mathrm{M}[x - \gamma, \gamma < x]\left(\frac{k'(c)}{m} - 1 - ck'(c)\mathrm{M}\xi\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{k'(c)}{m} + \mathrm{P}[\gamma < x] + ck'(c)\varepsilon(x-1)\mathrm{M}\xi\right).$$

Следовательно, распределение случайной величины Y/B при $B \to \infty$ слабо сходится к функции распределения $F^+(x)$ такой, что

$$F^+(x) = \begin{cases} 2\mathrm{M}[x - \gamma, \gamma < x], & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Пусть теперь $m = 0$,

$$\sigma^2 = \mathrm{M}\xi(1)^2 = k''(0) < \infty.$$

Используя представление потенциала [7] при $x \to \infty$

$$R(x) = \frac{2}{\sigma^2}\left(x - \frac{m_3}{3\sigma^2}\right) + o(1), \qquad m_3 = k'''(0), \tag{13}$$

при $B \to \infty$ находим

$$U(B) = \frac{B^2}{2\sigma^2}(1 - 2\mathrm{M}\gamma^2) - B\frac{m_3}{4\sigma^4} + O(1),$$

$$U(xB) = \frac{B^2}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\mathrm{M}\left[(x-\gamma)^2, \gamma < x\right]\right) -$$

$$- B\frac{m_3}{4\sigma^4}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{M}[x-\gamma, \gamma < x]\right) + O(1).$$

Из этих двух равенств получаем

$$\mathrm{P}[Y / B \le x] = \frac{x^2 - 2\mathrm{M}\left[(x-\gamma)^2, \gamma < x\right]}{1 - 2\mathrm{M}\gamma^2} +$$

$$+ \frac{1}{B}\frac{m_3}{2\sigma^2}K^0(x) + o\left(\frac{1}{B}\right), \qquad \left|K^0(x)\right| < \infty,$$

где

$$K^0(x) = \frac{1}{1 - 2\mathrm{M}\gamma^2}\left(\frac{x^2 - 2\mathrm{M}\left[(x-\gamma)^2, \gamma < x\right]}{1 - 2\mathrm{M}\gamma^2} - x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}\mathrm{M}[x-\gamma, \gamma < x]\right).$$

Таким образом, распределение случайной величины $Y/B \in [0, 1]$ слабо сходится к функции распределения $F^0(x)$:

$$F^0(x) = \begin{cases} \left(x^2 - 2\mathrm{M}\left[(x-\gamma)^2, \gamma < x\right]\right)(1 - 2\mathrm{M}\gamma^2)^{-1}, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Если $m < 0$ и существует

$$c^- < 0 : k(c^-) = 0, \; -\infty < k'(c^-) < 0,$$

то [7] при $x \to \infty$

$$R(x) = -\frac{1}{m} + \frac{1}{k'(c^-)}e^{xc^-} + o(e^{xc^-}). \tag{14}$$

Используя это равенство, при $B \to \infty$ находим

$$\mathrm{P}[Y / B \le x] = 2 - 2\mathrm{M}[x-\gamma, \gamma < x] +$$

$$+ \frac{1}{B}\frac{2m\mathrm{M}\eta}{c^- k'(c^-)}K^-(x) + o\left(\frac{1}{B}\right), \qquad \left|K^-(x)\right| < \infty,$$

где

$$K^-(x) = c^- k'(c^-)\left(2x - 2\mathrm{M}[x-\gamma, \gamma < x] - 1\right) + \frac{1}{\mathrm{M}\eta}\mathrm{P}[\gamma > x].$$

Из этого равенства следует, что распределение случайной величины Y/B при $m < 0$, $B \to \infty$ слабо сходится к функции распределения $F^{-}(x)$:

$$F^{-}(x) = \begin{cases} 2x - 2\mathrm{M}[x-\gamma, \gamma < x], & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Анализируя асимптотические равенства для $\mathrm{P}[Y/B \le x]$ при $B \to \infty$, приходим к выводу, что предельные функции распределения $F^{+}(x)$, $F^{0}(x)$, $F^{-}(x)$ зависят только от случайной величины γ. Характеристики процесса $\xi(t)$, $t \ge 0$ $(m, \sigma^2, m_3, k'(c), k'(c^-))$ содержатся в слагаемых порядка $1/B$. Если $m > 0$, то в этом слагаемом содержится и характеристика верхней границы $\mathrm{M}\xi$, а при $m < 0$ в слагаемом порядка $1/B$ — характеристика нижней границы $\mathrm{M}\eta$. Если $m = 0$, то $\mathrm{M}\xi$, $\mathrm{M}\eta$ содержатся в члене порядка $1/B^2$.

Теорема 1 и следствия доказаны.

2. Достижение границ процессом $Y(t)$, $t \ge 0$. В этом пункте мы определим распределения времени достижения верхней (нижней) границы процессом $Y(t)$, $t \ge 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*

$$\kappa^{+} = \inf\{t > 0 : Y(t) = B\}, \qquad \kappa^{-} = \inf\{t > 0 : Y(t) = 0\}$$

— моменты первого достижения соответственно верхней и нижней границы процессом $Y(t)$, $t \ge 0$.

Тогда:

1) *для преобразований Лапласа случайных величин κ^{+}, κ^{-} выполняются равенства*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}e^{-s\kappa^{+}} &= \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_{\gamma}}, \xi(\chi_{\gamma}) \ge B\right]\left(1 - \tilde{f}(s)\frac{\mathrm{M}R^{s}(\gamma)}{R^{s}(B)}\right)^{-1}, \\ \mathrm{M}e^{-s\kappa^{-}} &= \frac{\mathrm{M}R^{s}(\gamma)}{R^{s}(B)}\left(1 - \tilde{g}(s)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_{\gamma}}, \xi(\chi_{\gamma}) \ge B\right]\right)^{-1}; \end{aligned} \tag{15}$$

2) *для средних значений случайных величин κ^{+}, κ^{-} справедливы формулы*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\kappa^{+} &= \frac{1}{\mathrm{P}^{+}(B)}\left(\mathrm{M}\chi_{\gamma} + \mathrm{P}^{-}(B)\mathrm{M}\eta\right), \\ \mathrm{M}\kappa^{-} &= \frac{1}{\mathrm{P}^{-}(B)}\left(\mathrm{M}\chi_{\gamma} + \mathrm{P}^{+}(B)\mathrm{M}\xi\right), \end{aligned} \tag{16}$$

где $P^{+}(B)$, $P^{-}(B)$ — вероятности первого выхода процесса $B - \gamma + \xi(t)$, $t \ge 0$, из интервала $(0, B)$ через верхнюю и нижнюю границы соответственно.

Используя асимптотические формулы (12) – (14) для потенциала $R(x)$, можно получить асимптотические равенства для вычисления средних значений случайных величин κ^{+}, κ^{-}. Мы приведем эти равенства в случае, когда $m = 0$, $\sigma^2 < \infty$.

***Следствие* 3.** *Пусть случайная величина $\gamma \in (0, 1)$ симметрично распределена относительно середины интервала $(0, 1)$, $\mathrm{P}[\gamma < x] = \mathrm{P}[\gamma > 1 - x]$, $x \in (0, 1)$, а $\gamma(B) = B\gamma \in (0, B)$.*

Тогда для вычисления средних значений κ^{+}, κ^{-} при достаточно больших B справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{M}\kappa^{+} = \frac{B^2}{\sigma^2}\left(1 - 2\mathrm{M}\gamma^2\right) - B\frac{2m_3}{3\sigma^4}\left(1 - \mathrm{M}\gamma^2\right) + \frac{m_3^2}{3\sigma^6} + \mathrm{M}\eta + O\left(\frac{1}{B}\right),$$
$$\mathrm{M}\kappa^{-} = \frac{B^2}{\sigma^2}\left(1 - 2\mathrm{M}\gamma^2\right) - B\frac{2m_3}{3\sigma^4}\mathrm{M}\gamma^2 + \frac{m_3^2}{9\sigma^6} + \mathrm{M}\xi + O\left(\frac{1}{B}\right), \tag{17}$$

где $m_3 = k'''(0)$.

Доказательство. Из определения процесса $Y(t),\ t \geq 0$ (1), следуют такие уравнения для преобразований Лапласа случайных величин κ^+, κ^-:

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa^+} = \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right] + \tilde{f}(s)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right]\mathrm{M}e^{-s\kappa^+},$$
$$\mathrm{M}e^{-s\kappa^-} = \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right] + \tilde{g}(s)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right]\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right] = \frac{\mathrm{M}R^s(\gamma)}{R^s(B)},$$

из этих уравнений получаем равенства (15).

Вычисляя пределы

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^\pm}\right) = \mathrm{M}\kappa^\pm,$$

из равенств (15) получаем равенства (16), где

$$\mathrm{P}^-(B) = \mathrm{P}\left[\xi(\chi_\gamma) = 0\right] = \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)},$$
$$P^+(B) = P\left[\xi(\chi_\gamma) \geq B\right] = 1 - \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)},$$
$$\mathrm{M}\chi_\gamma = \mathrm{P}^-(B)S(B) - \mathrm{M}S(\gamma),$$
$$S(x) = \int_0^x R(u)\,du, \quad \gamma = \gamma(B).$$

Далее, в условиях следствия 3

$$\mathrm{M}\gamma(B) = \frac{B}{2}, \quad \mathrm{M}\gamma(B)^2 = B^2\mathrm{M}\gamma^2.$$

Используя асимптотическое представление потенциала (13) при $m = 0$, $\sigma^2 < < \infty$, при $B \to \infty$ находим

$$\mathrm{P}^-(B) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_3}{3\sigma^2 B}\right) + o\left(\frac{1}{B}\right),$$
$$\mathrm{P}^+(B) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_3}{3\sigma^2 B}\right) + o\left(\frac{1}{B}\right),$$
$$\mathrm{M}\left[\chi_{\gamma(B)}\right] = \frac{B^2}{2\sigma^2}\left(1 - 2\mathrm{M}\gamma^2\right) - B\frac{m_3}{6\sigma^4} + \frac{m_3^2}{9\sigma^6} + o\left(\frac{1}{B}\right).$$

Из этих равенств и (16) получаем асимптотические равенства (17).

Теорема и следствие доказаны.

3. О числе посещений границ процессом $Y(t),\ t \geq 0$. В этом пункте мы определим распределения числа посещений границ процессом $Y(t),\ t \geq 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть*

$$\alpha^+(t),\ \alpha^-(t) \in N = \{0, 1, \dots\}$$

— число посещений верхней и нижней границ процессом $Y(u)$ *до момента времени* t *и* $\alpha(t) = \alpha^+(t) + \alpha^-(t)$ *— общее число посещений границ процессом* $Y(u)$ *на интервале* $(0, t)$.

Тогда:

1) *для совместной производящей функции случайных величин* $\alpha^+(\nu_s)$, $\alpha^-(\nu_s)$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{M}\left[a^{\alpha^+(\nu_s)} b^{\alpha^-(\nu_s)}\right] =$$

$$= \frac{1 - M(s) + a(1-\tilde{g}(s))M^+(s) + b\left(1-\tilde{f}(s)\right)M^-(s)}{1 - a\tilde{g}(s)M^+(s) - b\tilde{f}(s)M^-(s)}, \quad a, b \in [0, 1], \tag{18}$$

где

$$M^+(s) = \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right], \quad M^-(s) = \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right],$$

$$M(s) = \mathrm{M}\left[e^{\chi_\gamma}\right] = M^+(s) + M^-(s);$$

2) *совместное распределение случайных величин* $\alpha^+(\nu_s)$, $\alpha^-(\nu_s)$ *имеет вид*

$$\mathrm{P}\left[\alpha^+(\nu_s) = \alpha^-(\nu_s) = 0\right] = 1 - \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}\right],$$

$$\mathrm{P}\left[\alpha^+(\nu_s) = n, \alpha^-(\nu_s) = m\right] =$$

$$= C_{n+m-1}^{n}\left(\tilde{g}(s)M^+(s)\right)^n \left(\tilde{f}(s)M^-(s)\right)^{m-1} M^-(s)\left[1 - \tilde{f}(s)M(s)\right] + \tag{19}$$

$$+ C_{n+m-1}^{m}\left(\tilde{f}(s)M^-(s)\right)^m \left(\tilde{g}(s)M^+(s)\right)^{n-1} M^+(s)\left[1 - \tilde{g}(s)M(s)\right], \quad n + m > 0,$$

и, в частности,

$$\mathrm{P}\left[\alpha(\nu_s) = n\right] = \delta_{n0}\left(1 - \mathrm{M}e^{-s\chi_\gamma}\right) + (1 - \delta_{n0})\left(\mathrm{M}e^{-s\kappa}\right)^{n-1} M(s)\left(1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}\right),$$

$$\mathrm{P}\left[\alpha^+(\nu_s) = n\right] =$$

$$= \delta_{n0}\left(1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\right) + (1 - \delta_{n0})\left(\tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\right)^{n-1} \mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\left(1 - \tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\right), \tag{20}$$

$$\mathrm{P}\left[\alpha^-(\nu_s) = n\right] =$$

$$= \delta_{n0}\left(1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\right) + (1 - \delta_{n0})\left(\tilde{f}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\right)^{n-1} \mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\left(1 - \tilde{f}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\right),$$

где δ_{kr} *— символ Кронекера,*

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa} = \tilde{g}(s)M^+(s) + \tilde{f}(s)M^-(s),$$

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa^+} = \frac{M^+(s)}{1 - \tilde{f}(s)M^-(s)}, \quad \mathrm{M}e^{-s\kappa^-} = \frac{M^-(s)}{1 - \tilde{g}(s)M^+(s)}.$$

Для проведения асимптотического анализа в этом и последующих пунктах нам потребуются два первых момента случайных величин χ_γ, κ.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для первых двух моментов случайной величины* χ_γ *выполняются равенства*

$$\mathrm{M}\chi_\gamma = \mathrm{M}R(\gamma)\frac{S(B)}{R(B)} - \mathrm{M}S(\gamma),$$

$$\mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) = 0\right] = \frac{\mathrm{M}R(\gamma)R_1(B)}{R(B)^2} - \frac{\mathrm{M}R_1(\gamma)}{R(B)},$$

$$\mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right] = \mathrm{M}\chi_\gamma - \mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) = 0\right],$$

$$\mathrm{M}\chi_\gamma^2 = 2\left[\frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)}\left(R_1(B)\frac{S(B)}{R(B)} - S_1(B)\right) - \left(\mathrm{M}R_1(B)\frac{S(B)}{R(B)} - \mathrm{M}S_1(\gamma)\right)\right],$$

а для первых двух моментов случайной величины κ *имеют место следующие формулы:*

$$\mathrm{M}\kappa = \mathrm{P}^+(B)\mathrm{M}\xi + \mathrm{P}^-(B)\mathrm{M}\eta + \mathrm{M}\chi_\gamma,$$

$$\mathrm{P}^+(B) = \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)}, \quad \mathrm{P}^-(B) = 1 - \frac{\mathrm{M}R(\gamma)}{R(B)},$$

$$\mathrm{M}\kappa^2 = \mathrm{P}^+(B)\mathrm{M}\xi^2 + \mathrm{P}^-(B)\mathrm{M}\eta^2 + \mathrm{M}\chi_\gamma^2 +$$

$$+ 2\left(\mathrm{M}\xi\mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right] + \mathrm{M}\eta\mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) = 0\right]\right),$$

где

$$S(x) = \int_0^x R(u)\,du,$$

$$R_1(x) = \int_0^x R(x-u)R(u)\,du, \qquad S_1(x) = \int_0^x R_1(u)\,du.$$

***Следствие* 4.** *Для средних значений случайных величин* $\alpha(\nu_s)$, $\alpha^+(\nu_s)$, $\alpha^-(\nu_s)$ *справедливы следующие равенства:*

$$\mathrm{M}\alpha(\nu_s) = \frac{\mathrm{M}e^{-s\chi_\gamma}}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}},$$

$$\mathrm{M}\alpha^+(\nu_s) = \frac{\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right]}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}}, \tag{21}$$

$$\mathrm{M}\alpha^-(\nu_s) = \frac{\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right]}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}}.$$

При $t \to \infty$ *для средних значений* $\alpha(t)$, $\alpha^+(t)$, $\alpha^-(t)$ *справедливы асимптотические формулы*

$$\mathrm{M}\alpha(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma\right) + o(1),$$

$$\mathrm{M}\alpha^+(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right]\right) + o(1), \tag{22}$$

$$\mathrm{M}\alpha^-(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\left[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) = 0\right]\right) + o(1).$$

Доказательство. Из определения процесса $Y(t),\ t \geq 0,$ вытекает уравнение для совместной производящей функции случайных величин $\alpha^+(\nu_s), \alpha^-(\nu_s)$:

$$\mathrm{M}\left[a^{\alpha^+(\nu_s)}b^{\alpha^-(\nu_s)}\right] = \mathrm{P}\left[\chi_\gamma > \nu_s\right] +$$

$$+\ aM^+(s)\left(1-\tilde{g}(s)\right) + aM^+(s)\tilde{g}(s)\mathrm{M}\left[a^{\alpha^+(\nu_s)}b^{\alpha^-(\nu_s)}\right] +$$

$$+\ bM^-(s)\left(1-\tilde{f}(s)\right) + bM^-(s)\tilde{f}(s)\mathrm{M}\left[a^{\alpha^+(\nu_s)}b^{\alpha^-(\nu_s)}\right], \qquad a, b \in [0, 1],$$

где

$$M^+(s) = \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right], \qquad M^-(s) = \mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right].$$

Решая это уравнение, получаем равенство (18).

Сравнивая коэффициенты при $a^n b^m,\ n, m \in N,$ в левой и правой частях (18), получаем равенство (19).

Последовательно полагая в (18) $a = b,\ b = 1,\ a = 1,$ находим производящие функции случайных величин $\alpha(\nu_s), \alpha^+(\nu_s), \alpha^-(\nu_s)$:

$$\mathrm{M}a^{\alpha(\nu_s)} = \frac{1 - M(s) + a\left(M(s) - \mathrm{M}e^{-s\kappa}\right)}{1 - a\mathrm{M}e^{-s\kappa}},$$

$$M(s) = M^+(s) + M^-(s), \tag{23}$$

$$\mathrm{M}a^{\alpha^+(\nu_s)} = \frac{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^+} + a\left(1-\tilde{g}(s)\right)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}}{1 - a\tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}},$$

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa^+} = \frac{M^+(s)}{1-\tilde{f}(s)M^-(s)}, \tag{24}$$

$$\mathrm{M}b^{\alpha^-(\nu_s)} = \frac{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^-} + b\left(1-\tilde{f}(s)\right)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}}{1 - b\tilde{f}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}},$$

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa^-} = \frac{M^-(s)}{1-\tilde{g}(s)M^+(s)}. \tag{25}$$

Сравнивая в этих равенствах коэффициенты при соответствующих степенях a, b, получаем равенства (20).

Равенства леммы следуют из (2) и формулы

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa} = \tilde{g}(s)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) \geq B\right] + \tilde{f}(s)\mathrm{M}\left[e^{-s\chi_\gamma}, \xi(\chi_\gamma) = 0\right].$$

Дифференцируя равенства (23), (24) по a, равенство (25) по b, затем полагая $a = 1,\ b = 1,$ получаем формулы (21).

Обоснуем справедливость равенств (22). Из (21) следует

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{M}[\alpha(t)]\,dt = \frac{1}{s}\frac{\mathrm{M}e^{-s\chi_\gamma}}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}}.$$

При достаточно малых значениях параметра $s > 0$ запишем

$$\mathrm{M}e^{-s\chi_\gamma} = 1 - s\mathrm{M}\chi_\gamma + o(s), \qquad \mathrm{M}e^{-s\kappa} = 1 - s\mathrm{M}\kappa + \frac{s^2}{2}\mathrm{M}\kappa^2 + o(s^2).$$

Тогда при $s \to 0$

$$\frac{1}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}} = \frac{1}{s\mathrm{M}\kappa} + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2(\mathrm{M}\kappa)^2} + o(1) \tag{26}$$

и

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}\mathrm{M}[\alpha(t)]\,dt = \frac{1}{s^2\mathrm{M}\kappa} + \frac{1}{s\mathrm{M}\kappa}\left(\frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma\right) + \frac{1}{s}o(1).$$

Обращая преобразования Лапласа, находящиеся в этом равенстве, при $t \to \infty$ получаем первое из равенств (22)

$$\mathrm{M}\alpha(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma\right) + o(1).$$

Остальные два равенства из (22) доказываются аналогично.

Теорема и следствие доказаны.

4. Число пересечений интервала $(0, B)$ процессом $Y(t),\ t \geq 0$. Пусть $\beta^+(t), \beta^-(t) \in N$ — число пересечений интервала $(0, B)$ процессом $Y(u)$ снизу вверх и сверху вниз до момента времени t.

Справедливы следующая теорема и следствие.

Теорема 4. *Пусть ν_s — показательно распределенная случайная величина с параметром $s > 0$ и $\beta^+(\nu_s), \beta^-(\nu_s)$ — число пересечений интервала $(0, B)$ процессом $Y(u)$ до момента времени ν_s снизу вверх и сверху вниз соответственно.*

Тогда:

1) *совместная производящая функция случайных величин $\{\beta^+(\nu_s), \beta^-(\nu_s)\}$ имеет вид*

$$\mathrm{M}\left[a^{\beta^+(\nu_s)}b^{\beta^-(\nu_s)}\right] =$$

$$= 1 - M(s) + \frac{1}{H^s(a,b)}\left(M(s) - \tilde{g}(s)M^+(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-} - \tilde{f}(s)M^-(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\right) +$$

$$+ \frac{1}{H^s(a,b)}\left(a\tilde{f}(s)M^-(s)\left(1 - \tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\right)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+} + \right.$$

$$\left. + \ b\tilde{g}(s)M^+(s)\left(1 - \tilde{f}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\right)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\right), \tag{27}$$

и, в частности,

$$\mathrm{M}\left[a^{\beta^+(\nu_s)}\right] =$$

$$= 1 - M(s) + \frac{1}{H^s(a,1)}\left(M(s) - \tilde{f}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\left(1 - a\left(1 - \tilde{g}(s)M(s)\right)\right)\right),$$

(28)

$$\mathrm{M}\left[a^{\beta^-(\nu_s)}\right] =$$

$$= 1 - M(s) + \frac{1}{H^s(1,b)}\left(M(s) - \tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\left(1 - b\left(1 - \tilde{f}(s)M(s)\right)\right)\right),$$

где

$$H^s(a, b) = 1 - ab\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\mathrm{M}e^{-s\kappa^-};$$

2) *для распределений случайных величин* $\beta^+(\nu_s), \beta^-(\nu_s)$ *имеют место формулы*

$$\mathrm{P}\left[\beta^+(\nu_s) = n\right] = \delta_{n0}\left(1 - \frac{1}{\tilde{g}(s)}h(s)\right) + (1-\delta_{n0})\frac{1}{\tilde{g}(s)}h(s)^n(1-h(s)),$$
$$\mathrm{P}\left[\beta^-(\nu_s) = n\right] = \delta_{n0}\left(1 - \frac{1}{\tilde{f}(s)}h(s)\right) + (1-\delta_{n0})\frac{1}{\tilde{f}(s)}h(s)^n(1-h(s)), \tag{29}$$

где

$$h(s) = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}.$$

***Следствие* 5.** *Для средних значений случайных величин* $\beta^+(\nu_s)$, $\beta^-(\nu_s)$ *справедливы следующие равенства*:

$$\mathrm{M}\beta^+(\nu_s) = \tilde{f}(s)M^-(s)\frac{M^+(s)}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}} = \tilde{f}(s)M^-(s)\mathrm{M}\alpha^+(\nu_s),$$
$$\mathrm{M}\beta^-(\nu_s) = \tilde{g}(s)M^+(s)\frac{M^-(s)}{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa}} = \tilde{g}(s)M^+(s)\mathrm{M}\alpha^-(\nu_s), \tag{30}$$

где $\alpha^+(\nu_s)$ *и* $\alpha^-(\nu_s)$ — *число посещений верхней и нижней границ* (21) *процессом* $Y(u)$ *на интервале* $[0, \nu_s]$..

При $t \to \infty$ *для средних значений* $\beta^+(t), \beta^-(t)$ *имеют место асимптотические формулы*

$$\mathrm{M}\beta^+(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma - \mathrm{M}\eta\right) + o(1),$$
$$\mathrm{M}\beta^-(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma - \mathrm{M}\xi\right) + o(1).$$

Доказательство. Обозначим

$$D^+(s) = \mathrm{M}\left[a^{\beta^+(\nu_s)}b^{\beta^-(\nu_s)} / Y(0-) = B, Y(0) = B-\gamma\right],$$
$$D^-(s) = \mathrm{M}\left[a^{\beta^+(\nu_s)}b^{\beta^-(\nu_s)} / Y(0-) = 0, Y(0) = B-\gamma\right].$$

Согласно определению процесса $Y(t)$, $t \geq 0$, для функций $D^+(s), D^-(s)$ справедлива система уравнений

$$D^+(s) = \mathrm{P}\left[\chi_\gamma > \nu_s\right] + M^+(s)(1-\tilde{g}(s)) + \tilde{g}(s)M^+(s)D^+(s) + $$
$$+ bM^-(s)\left(1-\tilde{f}(s)\right) + b\tilde{f}(s)M^-(s)D^-(s),$$
$$D^-(s) = \mathrm{P}\left[\chi_\gamma > \nu_s\right] + M^-(s)\left(1-\tilde{f}(s)\right) + \tilde{f}(s)M^-(s)D^-(s) + $$
$$+ aM^+(s)(1-\tilde{g}(s)) + a\tilde{g}(s)M^+(s)D^+(s).$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$D^+(s) = 1 - \frac{1}{H^s(a,b)}\Big((1-b)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-} + (1-a)b\tilde{f}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\Big),$$

$$D^-(s) = 1 - \frac{1}{H^s(a,b)}\Big((1-a)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+} + (1-b)a\tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}\Big),$$

где

$$H^s(a,b) = 1 - ab\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}.$$

Далее, из определения процесса $Y(t),\ t \geq 0,$ следует равенство

$$\mathrm{M}\Big[a^{\beta^+(\nu_s)}b^{\beta^-(\nu_s)}\Big] = \mathrm{P}\big[\chi_\gamma > \nu_s\big] +$$
$$+ M^+(s)\big(1-\tilde{g}(s)\big) + \tilde{g}(s)M^+(s)D^+(s) +$$
$$+ M^-(s)\big(1-\tilde{f}(s)\big) + \tilde{f}(s)M^-(s)D^-(s) =$$
$$= 1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa} + \tilde{g}(s)M^+(s)D^+(s) + \tilde{f}(s)M^-(s)D^-(s),$$

так как функции $D^+(s), D^-(s)$ уже определены.

Подставляя в это равенство выражения для $D^+(s), D^-(s),$ получаем равенство (27). Равенства (28) следуют из (27) при $b = 1,\ a = 1$ соответственно. После сравнения коэффициентов при $a^n,\ b^n$ в левых и правых частях равенств (28) получаем формулы (29).

Дифференцируя первое из равенств (28) по переменной $a,$ второе — по переменной $b,$ а затем полагая $a = 1,\ b = 1,$ получаем две первые формулы следствия.

Используя (26), при $s \to 0$ записываем

$$\mathrm{M}\beta^+(\nu_s) = \big(1 - s\mathrm{M}\eta + o(s)\big)\big(1 - s\mathrm{M}^- + o(s)\big)\left(\frac{1}{s\mathrm{M}\kappa} + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2(\mathrm{M}\kappa)^2} + o(1)\right),$$

где

$$\mathrm{M}^+ = \mathrm{M}\big[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) \geq B\big], \qquad \mathrm{M}^- = \mathrm{M}\big[\chi_\gamma, \xi(\chi_\gamma) = 0\big],$$
$$\mathrm{M}^+ + \mathrm{M}^- = \mathrm{M}\chi_\gamma.$$

Из этого равенства следует

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{M}\beta^+(t)\,dt = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\left(\frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma - \mathrm{M}\eta\right)\right] + \frac{1}{s}o(1).$$

Обращая преобразования Лапласа в обеих частях этого равенства при $t \to \infty$, получаем первую асимптотическую формулу следствия

$$\mathrm{M}\beta^+(t) = \frac{1}{\mathrm{M}\kappa}\left(t + \frac{\mathrm{M}\kappa^2}{2\mathrm{M}\kappa} - \mathrm{M}\chi_\gamma - \mathrm{M}\eta\right) + o(1).$$

Вторую формулу устанавливаем аналогично.

Теорема и следствие доказаны.

5. О времени пребывания процесса $Y(t),\ t \geq 0,$ на границах и внутри интервала. Введем случайные величины

$$\sigma^+(t) = \int_0^t I\{Y(u) = B\}\,du, \qquad \sigma^-(t) = \int_0^t I\{Y(u) = 0\}\,du,$$

$$\sigma(t) = \int_0^t I\{Y(u) \in (0, B)\}\, du$$

— суммарные времена пребывания процесса $Y(u)$ на верхней и нижней границах, а также внутри интервала $(0, B)$ до момента времени t.

Справедливы следующая теорема и следствие.

Теорема 5. *Пусть* ν_s *— показательно распределенная случайная величина с параметром* $s > 0$ *и*

$$\sigma_s^+ = \sigma^+(\nu_s), \qquad \sigma_s = \sigma(\nu_s), \qquad \sigma_s^- = \sigma^-(\nu_s)$$

— времена пребывания процесса $Y(u)$ *на границах и внутри интервала* $(0, B)$ *до момента времени* ν_s.

Тогда совместное преобразование Лапласа случайных величин σ_s^+, σ_s, σ_s^- *представимо в следующем виде:*

$$\mathrm{M}\left[e^{-a\sigma_s^+ - b\sigma_s - c\sigma_s^-}\right] H^s(a, b, c) =$$

$$= \frac{s}{s+b}(1 - M(s+b)) + \frac{s}{s+a} M^+(s+b)(1 - \tilde{g}(s+a)) +$$

$$+ \frac{s}{s+c} M^-(s+b)\left(1 - \tilde{f}(s+c)\right), \qquad a, b, c \geq 0, \tag{31}$$

где

$$H^s(a, b, c) = 1 - \tilde{g}(s+a) M^+(s+b) - \tilde{f}(s+c) M^-(s+b).$$

В частности, для преобразований Лапласа случайных величин σ_s^+, σ_s, σ_s^- *справедливы равенства*

$$\mathrm{M}e^{-a\sigma_s^+} = \frac{s}{s+a} + \frac{a}{s+a} \frac{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^+}}{1 - \tilde{g}(s+a)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}},$$
$$\mathrm{P}\left[\sigma_s^+ = 0\right] = \mathrm{P}\left[\kappa^+ > \nu_s\right], \tag{32}$$

$$\mathrm{M}e^{-b\sigma_s} = 1 - \frac{b}{s+b} \frac{1 - M(s+b)}{1 - \tilde{g}(s) M^+(s+b) - \tilde{f}(s) M^-(s+b)},$$
$$\mathrm{P}\left[\sigma_s = 0\right] = 0, \tag{33}$$

$$\mathrm{M}e^{-c\sigma_s^-} = \frac{s}{s+c} + \frac{c}{s+c} \frac{1 - \mathrm{M}e^{-s\kappa^-}}{1 - \tilde{f}(s+c)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}},$$
$$\mathrm{P}\left[\sigma_s^- = 0\right] = \mathrm{P}\left[\kappa^- > \nu_s\right], \tag{34}$$

где

$$\mathrm{M}e^{-s\kappa^+} = \frac{M^+(s)}{1 - \tilde{f}(s) M^-(s)}, \qquad \mathrm{M}e^{-s\kappa^-} = \frac{M^-(s)}{1 - \tilde{g}(s) M^+(s)}.$$

***Следствие* 6.** *Для средних значений случайных величин* σ_s^+, σ_s, σ_s^- *справедливы равенства*

$$\mathrm{M}\sigma_s^+ = \frac{1}{s}\frac{(1-\tilde g(s))\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}}{1-\tilde g(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^+}}, \qquad \mathrm{M}\sigma_s^- = \frac{1}{s}\frac{\left(1-\tilde f(s)\right)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}}{1-\tilde f(s)\mathrm{M}e^{-s\kappa^-}},$$
$$\mathrm{M}\sigma_s = \frac{1}{s}\frac{1-M(s)}{1-\mathrm{M}e^{-s\kappa}} \qquad \left(\mathrm{M}e^{-s\kappa} = \tilde g(s)M^+(s)+\tilde f(s)M^-(s)\right). \tag{35}$$

При $t\to\infty$ *для средних значений случайных величин* $\sigma^+(t), \sigma(t), \sigma^-(t)$ *имеют место асимптотические формулы*

$$\mathrm{M}\sigma^+(t) = t\frac{\mathrm{M}\xi}{\mathrm{M}\xi+\mathrm{M}\kappa^+} +$$
$$+ \frac{\mathrm{M}\xi}{\mathrm{M}\xi+\mathrm{M}\kappa^+}\left(\frac{M(\xi+\kappa^+)^2}{2M(\xi+\kappa^+)} - \mathrm{M}\kappa^+ - \frac{\mathrm{M}\xi^2}{2\mathrm{M}\xi}\right) + o(1),$$
$$\mathrm{M}\sigma^-(t) = t\frac{\mathrm{M}\eta}{\mathrm{M}\eta+\mathrm{M}\kappa^-} + \tag{36}$$
$$+ \frac{\mathrm{M}\eta}{\mathrm{M}\eta+\mathrm{M}\kappa^-}\left(\frac{M(\eta+\kappa^-)^2}{2M(\eta+\kappa^-)} - \mathrm{M}\kappa^- - \frac{\mathrm{M}\eta^2}{2\mathrm{M}\eta}\right) + o(1),$$
$$\mathrm{M}\sigma(t) = t\frac{\mathrm{M}\chi_\gamma}{\mathrm{M}\kappa} + \frac{\mathrm{M}\chi_\gamma}{2\mathrm{M}\kappa}\left(\frac{\mathrm{M}\kappa^2}{\mathrm{M}\kappa} - \frac{\mathrm{M}\chi_\gamma^2}{\mathrm{M}\chi_\gamma}\right) + o(1).$$

Доказательство. Согласно определению процесса $Y(t),\ t\ge 0,$ справедливо следующее уравнение:

$$\mathrm{M}\left[e^{-a\sigma_s^+-b\sigma_s-c\sigma_s^-}\right] = \frac{s}{s+b}\Big(1-M(s+b)+M^+(s+b)\big(1-\tilde g(s+a)\big) +$$
$$+ M^-(s+b)\big(1-\tilde f(s+c)\big)\Big) + \Big(M^+(s+b)\tilde g(s+a) +$$
$$+ M^-(s+b)\tilde f(s+c)\Big)\mathrm{M}\left[e^{-a\sigma_s^+-b\sigma_s-c\sigma_s^-}\right], \qquad a,b,c\ge 0.$$

Из этого уравнения находим

$$\mathrm{M}\left[e^{-a\sigma_s^+-b\sigma_s-c\sigma_s^-}\right] = \frac{b}{s+b}\frac{1}{H^s(a,b,c)}\big(1-M(s+b)\big) +$$
$$+ \frac{1}{H^s(a,b,c)}\left[\frac{s}{s+a}M^+(s+b)\big(1-\tilde g(s+a)\big) +\right.$$
$$\left.+ \frac{s}{s+c}M^-(s+b)\big(1-\tilde f(s+c)\big)\right], \tag{37}$$

и, таким образом, установлена справедливость равенства (31).

Последовательно полагая в (31) $b=c=0,\ a=c=0,\ a=b=0,$ получаем равенства (32) – (34).

Дифференцируя равенство (32) по переменной $a,$ равенство (33) по переменной $b,$ равенство (34) по переменной $c,$ а затем полагая в получившихся после дифференцирования равенствах $a=b=c=0,$ получаем формулы (35).

Установим справедливость асимптотической формулы (36). При $s\to\infty$ из (35) следует равенство

$$M\sigma_s^+ = \frac{1}{s}\frac{\left(M\xi - \frac{s}{2}M\xi^2 + o(s)\right)\left(1 - sM\kappa^+ + o(s)\right)}{\left(M\xi + M\kappa^+\right) - \frac{s}{2}M(\xi+\kappa^+)^2 + o(s)} =$$

$$= \frac{M\xi}{M\xi + \kappa^+}\left(\frac{1}{s} + \frac{M(\xi+\kappa^+)^2}{2M(\xi+\kappa^+)} - M\kappa^+ - \frac{M\xi^2}{2M\xi}\right) + o(1),$$

из которого находим

$$\int_0^\infty e^{-st} M\sigma^+(t)\,dt = \frac{1}{s^2}\frac{M\xi}{M\xi + M\kappa^+} +$$

$$+ \frac{1}{s}\frac{M\xi}{M\xi + M\kappa^+}\left(\frac{M(\xi+\kappa^+)^2}{2M(\xi+\kappa^+)} - M\kappa^+ - \frac{M\xi^2}{2M\xi}\right) + \frac{1}{s}o(1).$$

Обращая преобразования Лапласа в обеих частях этого асимптотического равенства, при $t \to \infty$ получаем асимптотическое равенство (32)

$$M\sigma^+(t) = t\frac{M\xi}{M\xi + M\kappa^+} + \frac{M\xi}{M\xi + M\kappa^+}\left(\frac{M(\xi+\kappa^+)^2}{2M(\xi+\kappa^+)} - M\kappa^+ - \frac{M\xi^2}{2M\xi}\right) + o(1).$$

Равенства (33), (34) выводятся аналогично.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 280 с.
2. *Карташов М. В.* Про ймовірність розорення для процесу ризику з обмеженими резервами // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1999. – Вип. 60. – С. 46 – 58.
3. *Гусак Д. В.* Складні пуассонівські процеси з двостороннім відбиттям // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1616 – 1625.
4. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 170 – 174.
5. *Супрун В. Н.* Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 1. – С. 53 – 61.
6. *Боровских Ю. В.* Полные асимптотические разложения для резольвенты полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с поглощением и распределения вероятности разорения // Асимптотические методы в теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1979. – С. 10 – 21.
7. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. – Киев: Наук. думка, 1981. – 240 с.
8. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М.* Случайные процессы. – Киев: Наук. думка, 1983. – 365 с.

Получено 22.04.2003