УДК 531.19: 532.546

В. І. Герасименко, П. В. Малишев (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТВОРЧИЙ ВНЕСОК Д. Я. ПЕТРИНИ У РОЗВИТОК СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

This is a brief survey of the results obtained by Prof. D. Ya. Petrina in various fields of contemporary mathematical physics.

Наведено короткий огляд результатів, отриманих Д. Я. Петриною в різних напрямках сучасної математичної фізики.

Наукові інтереси Дмитра Яковича Петрини охоплюють майже всі найбільш актуальні напрямки розвитку сучасної математичної фізики. Вони пов'язані з дослідженнями нескінченного числа частинок, зокрема, в квантовій теорії поля та статистичній механіці. Як відомо, стани цих систем описуються, в загальному випадку, нескінченними послідовностями функцій зростаючого числа аргументів — це функції Гріна, функції розподілу або редуковані матриці густини, властивості та еволюцію яких можна найбільш повно описати із застосуванням методів функціонального аналізу. В цьому полягає відмінність сучасної математичної фізики від класичної математичної фізики, де стани систем описуються скінченним числом функцій. Рівняння класичної математичної фізики можна отримати як граничні випадки рівнянь для станів нескінченних систем за допомогою сучасних математичних методів, зокрема функціонально-аналітичних.

Творчий внесок Дмитра Яковича Петрини у розвиток сучасної математичної фізики можна віднести до таких основних напрямків:

1) конструктивна теорія поля та теорія аналітичної матриці розсіяння;

2) статистична механіка та кінетична теорія;

3) точно розв'язувані моделі квантової статистичної механіки;

4) граничні задачі математичної фізики та їх застосування до теорії мембран.

У цьому огляді ми зупинимось на деяких найбільш важливих результатах, одержаних Д. Я. Петриною у зазначених напрямках.

1. Конструктивна теорія поля та теорія аналітичної матриці розсіяння [1 – 20, 23, 27 – 29, 34, 38, 48]. До фундаментальних результатів сучасної теорії поля належить доведена Д. Я. Петриною теорема про неможливість побудови нелокальної теорії поля з додатним спектром оператора енергії-імпульсу [6]. Ця теорема увійшла в усі монографії з аксіоматичної квантової теорії поля. Її можна сформулювати так: якщо виконуються загальноприйняті аксіоми для квантованого поля $\varphi(x)$, а замість аксіоми локальної комутативності виконується аксіома

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{при} \quad -l_2^2 < (x-y)^2 < -l_1^2, \qquad l_1 > 0, \quad l_2 > 0,$$

де x, y — чотиривектори у просторі Мінковського, $[\varphi(x), \varphi(y)]$ — комутатор полів $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$, то звідси випливає

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{при} \quad (x-y)^2 < 0,$$

а це означає, що виконується аксіома локальної комутативності і, таким чином, теорія є локальною.

У 60-ті роки Д. Я. Петрина був одним із піонерів у розвитку теорії евклідової матриці розсіяння і запропонував системи рівнянь для коефіцієнтних функцій евклідової матриці розсіяння. Не наводячи досить громіздкий точний запис цих рівнянь, опишемо їх якісно. Матриця розсіяння визначається за послідовністю коефіцієнтних функцій $F = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_s), \ldots)$, що задовольняють операторне рівняння для моделі $g : \varphi^4(x) :$ вигляду

$$F = gAF + F^0, \tag{1}$$

де оператор A зв'язує функції F_s з F_{s+2}, F_s, F_{s-2}, F_{s-4}. Для неполіноміальних моделей оператор A зв'язує коефіцієнтні функції F_s з усіма $N \geq s-1$ функціями F_N. Для неполіноміальних нелокальних теорій рівняння (1) має єдиний розв'язок у певному банаховому просторі, елементами якого є послідовності функцій F, а оператор A є узагальненням відомого оператора Кірквуда – Зальцбурга з класичної статистичної механіки [34, 58]. Отже, в роботі [23] фактично вперше встановлено існування евклідової матриці розсіяння для нетривіальної неполіноміальної моделі за допомогою методів рівноважної класичної статистичної механіки.

Пізніше для поліноміальних моделей було доведено існування розв'язку згладженого рівняння (1), а також існування розв'язків певним чином апроксимованих рівнянь. Результати цих досліджень підсумовано в монографії [34]. Зауважимо, що такі фундаментальні поняття, як евклідові оператори народження та знищення, евклідів простір Фока та інші, уперше було введено саме в цих роботах.

Необхідно також згадати роботу [38], в якій сформульовано принципово нову точку зору на виникнення ультрафіолетових розбіжностей у рівняннях для коефіцієнтних функцій. Задача про знаходження розв'язків цих рівнянь є некоректно поставленою, тому ітераційний метод (метод теорії збурень) приводить до появи ультрафіолетових розбіжностей. У роботі [38] сформульовано один із варіантів проекційно-ітеративного методу, еквівалентного перенормуванню S-матриці за допомогою R-операції Боголюбова – Парасюка.

Стосовно аналітичної матриці розсіяння Д. Я. Петрині належить найбільш загальний критерій справедливості спектральних зображень для амплітуд розсіяння теорії збурень. Математично проблема формулюється таким чином. Амплітуда розсіяння $f(s, t)$ є функцією двох комплексних змінних s та t, вона голоморфна в певній примітивній області, а її особливості розміщені на аналітичних поверхнях, які при дійсних (s, t) вироджуються у криві Ландау. Потрібно довести, що амплітуда розсіяння голоморфно продовжується в область, що складається з двох комплексних площин із розрізами вздовж дійсних осей. Виявилося, що амплітуда розсіяння $f(s, t)$ допускає голоморфне продовження в цю область при певній поведінці кривих Ландау, а саме, вони повинні бути опуклими зовні примітивної області голоморфності. Цей критерій є загальновизнаним як найбільш потужний. Він дозволяє встановити справедливість спектрального зображення для ряду внесків від діаграм Фейнмана та вивчити аналітичні властивості парціальних амплітуд у теорії збурень.

2. Статистична механіка та кінетична теорія [21, 25, 26, 30, 35, 37, 44 – 46, 52 – 54, 56 – 58, 60, 61, 63 – 66, 68 – 73, 75 – 77, 79, 81 – 83, 88, 89, 91 – 102, 105, 108]. Дослідження в області квантової теорії поля привернули увагу Д. Я. Петрини в 60-ті роки до статистичної механіки. На перший погляд квантова теорія поля та статистична механіка мають мало спільного — в першій досліджуються властивості елементарних частинок, а в другій — властивості систем, що складаються з великого числа частинок. Насправді ці наукові теорії мають багато спільного як з фізичної, так і з математичної точок зору. Дійсно, квантоване поле може породити нескінченне число частинок. Крім цього, систему скінченного числа частинок можна розглядати як таку, що знаходиться в системі нескінченного числа віртуальних частинок.

Ще більше спільного можна знайти в математичному описі систем квантованих полів та систем статистичної механіки. Як зазначалося вище, матриця розсіяння повністю визначається нескінченною послідовністю коефіцієнтних функцій, а квантоване поле — нескінченною послідовністю функцій Вайтмана або функцій Гріна, які теж задовольняють рівняння типу (1).

У класичній статистичній механіці стан системи описується нескінченною послідовністю функцій розподілу $F(t) = (F_1(t, x_1), \dots , F_s(t, x_1, \dots , x_s), \dots)$, де t — час, x — точка фазового простору. У квантовій статистичній механіці стан описується послідовністю статистичних операторів, які задаються своїми ядрами $F(t) = (F_1(t, x_1; y_1), \dots , F_s(t, x_1, \dots , x_s; y_1, \dots , y_s))$, де x та y — точки евклідового простору. В обох випадках стани є розв'язком початкової задачі для еволюційних рівнянь вигляду

$$\frac{dF(t)}{dt} = \mathcal{B} F(t), \tag{2}$$
$$F(t)\big|_{t=0} = F(0),$$

з певними необмеженими операторами $\mathcal{B}$ [58, 59]. Ці рівняння називаються ієрархією рівнянь ББГКІ (Боголюбова – Борна – Гріна – Кірквуда – Івона). Фактично центральною проблемою статистичної механіки є побудова розв'язків еволюційних рівнянь (2).

Д. Я. Петрині належать піонерські праці, в яких рівняння (2) розглянуто як еволюційне рівняння в певних функціональних просторах, явно побудовано групу еволюційних операторів $U(t)$, інфінітезимальний генератор якої є оператором $\mathcal{B}$ рівнянь (2), і доведено теорему існування та єдиності розв'язків, що визначаються формулою

$$F(t) = U(t)F(0).$$

Проблему обґрунтування термодинамічної границі було сформульовано як задачу розширення еволюційного оператора $U(t)$ з функціональних просторів, що описують стани скінченних систем, на функціональні простори, що описують стани нескінченних систем. Ця надзвичайно складна аналітична задача була розв'язана Д. Я. Петриною разом з учнями як для одновимірних, так і для багатовимірних класичних систем частинок. При цьому було введено нову для теорії гамільтонових систем концепцію області взаємодії. Саме цей шлях обумовив новий етап у дослідженні ієрархій рівнянь Боголюбова, який розпочався в 70-ті роки з робіт Д. Я. Петрини.

У працях Д. Я. Петрини досліджено також стаціонарні розв'язки рівнянь (2), що описують рівноважний стан статистичних систем. Д. Я. Петрині разом з М. М. Боголюбовим та Б. Г. Хацетом [21] належить фундаментальний результат про існування термодинамічної границі для рівноважних станів систем класичної статистичної механіки в рамках канонічного ансамблю. Доведено збіжність віріальних розкладів та еквівалентність канонічного і великого канонічного ансамблів.

Математично ця задача формулюється так. У скінченній області Λ знаходяться N частинок, які взаємодіють через парний потенціал. Їх стан описується фінітною послідовністю функцій розподілу $F^{(N)} = (F_1^{(N)}(x_1), \dots , F_s^{(N)}(x_1, \dots , x_s), \dots , F_N^{(N)}(x_1, \dots , x_N))$, що задовольняє рекурентне співвідношення Кірквуда – Зальцбурга

$$F^{(N)} = K^{(N)}F^{(N-1)} + F_0^{(N)}, \tag{3}$$

де $F^{(N-1)}$ — стан системи, що складається з $N-1$ частинки в області Λ, а $K^{(N-1)}$ — лінійний оператор, що зв'язує s-частинкові функції розподілу $F_s^{(N)}$ з $F_{s-1}^{(N)}, \dots , F_N^{(N)}$.

Термодинамічною границею називається граничний перехід, коли область Λ в певному розумінні прямує до всього евклідового простору $\Lambda \nearrow R^3$, тобто її об'єм $V(\Lambda)$ прямує до нескінченності: $V(\Lambda) \to \infty$, число частинок — до нескінченності: $N \to \infty$, а їх густина $1/v = N/V$ залишається сталою.

Формальний перехід до термодинамічної границі в рівняннях (3) приводить до рівняння Кірквуда – Зальцбурга для стану $F = (F_1(x_1), \ldots, F_s(x_1, \ldots, x_s), \ldots)$

$$F = KF + F_0, \tag{4}$$

де K — оператор Кірквуда – Зальцбурга [58]. Задача полягає в тому, щоб довести існування розв'язків співвідношень (3) та рівняння (4), а також збіжність послідовності $F^{(N)}$ до F. Це було доведено при низьких густинах і певних умовах, накладених на потенціал взаємодії у банаховому просторі E_ξ, елементами якого є послідовності функцій, заданих на фазовому просторі, обмежених за конфігураційними змінними та q і експоненціально спадних за імпульсними змінними [58]. Значні математичні труднощі пов'язані з тим, що оператор $K^{(N)}$ не збігається до оператора K ні в сильному сенсі, ні за нормою у просторі E_ξ.

Як відмічалось вище, методи, розроблені для обґрунтування термодинамічної границі, знайшли широке застосування в квантовій теорії поля [34], де вперше було доведено існування евклідової матриці розсіяння для неполіноміальних нелокальних моделей. При цьому використовувались глибокі аналогії між рівноважною класичною статистичною механікою та евклідовою теорією поля.

Проблема строгого обґрунтування виведення кінетичних рівнянь, зокрема кінетичного рівняння Больцмана з ієрархії ББГКІ, була викликом фізикам майже півстоліття. Уперше цю проблему на формальному рівні розв'язав М. М. Боголюбов. Це було епохальне досягнення, але до останнього часу залишалася нерозв'язаною дуже складна задача строгого математичного обґрунтування методу Боголюбова.

Рівняння Больцмана є нелінійним рівнянням для одночастинкової функції $F_1(t, x_1)$, і задача його строгого виведення має фундаментальне значення не тільки для математики чи фізики, а навіть для філософії. А саме, цікаво зрозуміти, як з рівнянь (2), що описують зворотну еволюцію, можна побудувати рівняння, що описують незворотну еволюцію. Цю задачу було розв'язано у серії праць Д. Я. Петрини, виконаних разом з В. І. Герасименком, для нескінченної системи пружних куль у границі Больцмана – Греда [81, 82, 91]. Було доведено, що розв'язки ієрархії рівнянь ББГКІ прямують рівномірно назовні певних гіперплощин у фазовому просторі до розв'язків певної граничної ієрархії рівнянь — ієрархії рівнянь Больцмана. Розв'язки ієрархії рівнянь Больцмана мають властивість, відому як гіпотеза хаосу, яка полягає в тому, що в процесі еволюції всі кореляційні функції є добутками одночастинкової функції, яка задовольняє нелінійне рівняння Больцмана. Труднощі, які вдалося перебороти при доведенні існування асимптотичної границі Больцмана – Греда, пов'язані з необмеженістю операторів, що породжують еволюційні рівняння Боголюбова та Больцмана, і сингулярним характером динаміки системи пружних куль. Результати цих досліджень підсумовано в монографії [91].

Пізніше Д. Я. Петрина сформулював задачу про асимптотичну динаміку, в яку перетворюється гамільтонова динаміка в границі Больцмана – Греда. У серії праць [93, 96 – 98, 101, 105], виконаних разом з М. Лампіс та К. Д. Петриною, було доведено, що в границі Больцмана – Греда детерміністична гамільтонова динаміка переходить у стохастичну динаміку точкових частинок.

Стохастична динаміка полягає в тому, що точкові частинки рухаються як вільні, поки їх положення не збігаються, а після збігу їх положень вони пружно розсіюються. Стохастичність полягає в тому, що одиничний вектор пружного розсіяння є випадковим (рівномірно розподіленим на одиничній сфері). Після розсіяння частинки знову рухаються як вільні до наступного розсіяння і т. д.

Як і для гамільтонової динаміки, було введено оператор еволюції системи скінченного числа частинок за допомогою зсуву вздовж фазових траєкторій. Для функції розподілу ймовірностей на фазовому просторі, введеної таким чином, було виведено рівняння Ліувілля з граничними умовами, що описують стохастичне розсіяння. Запропоноване рівняння Ліувілля відрізняється від рівняння для системи вільних частинок лише на гіперповерхнях меншої розмірності. Так само функція розподілу системи стохастичних частинок відрізняється від функції розподілу системи вільних частинок тільки на поверхнях меншої розмірності, де стохастичні частинки взаємодіють. Тому, на перший погляд, кореляційні функції системи стохастичних частинок є кореляційними функціями системи вільних частинок, оскільки при визначенні кореляційних функцій функція розподілу інтегрується за частиною змінних, тобто обчислюється інтеграл Лебега, і тому поведінкою функцій розподілу на гіперповерхнях меншої розмірності, де стохастичні частинки взаємодіють, можна знехтувати.

Щоб подолати цю трудність, Д. Я. Петрина увів нову концепцію кореляційних функцій, яка певним чином враховує вклад гіперповерхонь, де стохастичні частинки взаємодіють. Було проведено „аналітичний експеримент" і підраховано декілька ітерацій, що виражають розв'язок рівняння Больцмана. Ці ітерації повністю збігаються з кореляційними функціями, введеними згідно з новою концепцією. При детальному аналізі ітерацій відомої ієрархії Больцмана виявилося, що відповідні кореляційні функції теж виражаються інтегралами по гіперповерхнях, де точкові стохастичні частинки взаємодіють. Дивно, що ця обставина не була помічена раніше іншими авторами.

Для послідовності кореляційних функцій, уведеної згідно з новою концепцією, було виведено ієрархію рівнянь, яку названо стохастичною ієрархією Больцмана. Стохастична ієрархія Больцмана відрізняється від звичайної ієрархії Больцмана граничними умовами, що відповідають за розсіяння точкових частинок або (що еквівалентно) певними додатковими членами, що містять δ-функції. Розв'язки стохастичної ієрархії Больцмана є границею Больцмана – Греда розв'язків ієрархії ББГКІ для системи пружних куль у всьому фазовому просторі, в той час як розв'язки звичайної ієрархії Больцмана є відповідною границею лише поза гіперповерхнями, де стохастичні частинки взаємодіють.

Отже, для початкових даних із певних функціональних просторів побудовано як локальні, так і глобальні за часом розв'язки стохастичної ієрархії Больцмана. Для початкових даних, що задовольняють умову хаосу, одночастинкова кореляційна функція є розв'язком нелінійного рівняння Больцмана. Таким чином, рівняння Больцмана було фактично вперше виведено на основі стохастичної динаміки.

Все це дає змогу стверджувати, що для стохастичної динаміки реалізовано ту ж програму, що і для гамільтонової динаміки: виведено рівняння Ліувілля для функції розподілу і стохастичну ієрархію Больцмана та побудовано її розв'язки. При цьому було введено нову концепцію кореляційних функцій, що враховують певним чином вклади від гіперповерхонь меншої розмірності, де точкові стохастичні частинки взаємодіють.

У свій час М. Кац увів певну стохастичну динаміку точкових частинок в імпульсному просторі. Відповідна функція розподілу задовольняє рівняння Колмогорова, на основі якого було виведено просторово-однорідну ієрархію ББГКІ. Він показав, що в наближенні середнього поля та при нескінченному зростанні числа частинок ієрархія ББГКІ задовольняє умову хаосу, тобто усі кореляційні функції є добутками одночастинкових. У свою чергу, одночастинкові кореляційні функції задовольняють просторово-однорідне рівняння Больцмана. Це був перший приклад виведення рівняння Больцмана на основі стохастичної динаміки. У роботі М. Лампіс та Д. Я. Петрини було показано, що для початкових просторово-однорідних функцій розподілу (методом певного усеред по конфігураційному простору) з рівняння Ліувілля для стохастичних ч нок можна отримати рівняння Колмогорова, введене Кацом. Тим же мет було виведено просторово-однорідну ієрархію ББГКІ. Було доведено, що хаосу має місце і без наближення середнього поля, тобто усі кореляційні кції є добутками одночастинкових, а останні задовольняють просторово- рідне рівняння Больцмана. При цьому, звичайно, припускається, що поча кореляційні функції задовольняють умову хаосу.

Таким чином, стохастична динаміка Каца в імпульсному просторі і відп не рівняння Колмогорова, які просто постулювалися, випливають із стоха ної динаміки у фазовому просторі, введеної Д. Я. Петриною. Просторово- рідне рівняння Больцмана виведено без наближення середнього поля.

3. Точно розв'язувані моделі квантової статистичної механіки [2 32, 33, 41, 49, 50, 84, 88 – 90, 103, 104, 106 – 109]. У працях Д. Я. Петрини р нено новий підхід до дослідження важливих моделей теорії надпровідн надплинності, моделі Пайєрлса – Фрьоліха та моделі Ху-анга – Янга – Л джера. Усі ці моделі мають одну спільну рису, а саме, їх гамільтоніан взає складається з суми інтегралів по всьому евклідовому простору від добутку раторів народження та знищення частинок із певним потенціалом, при коефіцієнтами при цих інтегралах є обернені величини до певних сте об'єму всього простору.

Так, гамільтоніан теорії надпровідності має доданок

$$H_I = \frac{1}{2V} \int\int\int\int v(x_1 - x_2) \overset{+}{\Psi}(x_1) \overset{+}{\Psi}(x_2) v(x_1' - x_2') \Psi(x_1') \Psi(x_2')\, dx_1\, dx_2\, dx_1'\, dx_2',$$

а гамільтоніан теорії надплинності містить доданки вигляду

$$\frac{1}{V^2} \int\int \Phi(x_1 - x_2) \overset{+}{a}(x_1) \overset{+}{a}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \int a(x_3)\, dx_3 \int a(x_4)\, dx_4,$$

$$\frac{1}{V^3} \tilde{\Phi}(0) \int\int\int\int \overset{+}{a}(x_1) \overset{+}{a}(x_2) a(x_3) a(x_4)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

де інтеграл береться по всьому простору R^3 за кожною змінною, а V — простору R^3.

У цих виразах $\overset{+}{\Psi}(x)$ і $\Psi(x)$ — оператори народження та знищення ф онів, $\overset{+}{a}(x)$ і $a(x)$ — оператори народження та знищення бозонів, v та Φ – тенціали взаємодії, а $\tilde{\Phi}$ — перетворення Фур'є потенціалу Φ.

У статистичній механіці розрізняють стани скінченного числа частино описуються хвильовими функціями, та стани нескінченного числа частино описуються нескінченною послідовністю функцій Гріна або редукованих риць густини. Хвильові функції визначаються розв'язками рівнянь Шреді Щоб одержати такі розв'язки, необхідно визначити результат дії гамільто на хвильову функцію гамільтоніана теорії надпровідності. Використов правила вторинного квантування, одержуємо

$$(Hf)_N(x_1, \ldots, x_N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_i}{2m} f_N(x_1, \ldots, x_N) +$$

$$+ \sum_{i<j=1}^{N} v(x_1 - x_j) \frac{1}{V} \int\int v(x_1' - x_2') f_N(x_1', x_2', x_1, \ldots \overset{i}{\vee} \ldots \overset{j}{\vee} \ldots, x_N)\, dx_1'\, dx_2',$$

де другий доданок слід розуміти як границю

$$\lim_{\Lambda \uparrow R^3} \frac{1}{V(\Lambda)} \sum_{i<j=1}^{N} v(x_1 - x_j) \int_\Lambda \int_\Lambda v(x_1' - x_2') f_N(x_1', x_2', x_1, \ldots \overset{i}{\vee} \ldots \overset{j}{\vee} \ldots, x_N)\, dx_1'\, dx_2'$$

Звичайний підхід, коли гамільтоніан розглядається спочатку на скрізь щільній в $L_2(R^{3N})$ множині основних функцій, а потім будується його самоспряжене розширення, в цьому випадку приводить до вільного гамільтоніана, оскільки гамільтоніан взаємодії на основних функціях дорівнює нулю. З іншого боку, відомо, що за допомогою модельного гамільтоніана теорії надпровідності можна пояснити явище надпровідності, яке не вкладається в рамки теорії вільних невзаємодіючих частинок.

Щоб розв'язати цю суперечність, Д. Я. Петрина запропонував розглянути гамільтоніан (5) у спеціальному гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій $h_{N;n_1,\ldots,n_k}$. Визначимо цей простір. Розіб'ємо множину N точок $(x_1, \ldots, x_N)$ на k підмножин $\{n_1\}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), \ldots, \{n_k\}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}})$, $n_1 + \ldots + n_k = N$, і поставимо їм у відповідність функцію вигляду $F_{N;n_1,\ldots,n_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}; \ldots; x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}})$, трансляційно-інваріантну за кожною групою змінних з $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$ та інтегровну за модулем у квадраті за незалежними $\{n_1 - 1\}, \ldots, \{n_k - 1\}$ різницевими змінними

$$\int \ldots \int \left| F_{N;n_1,\ldots,n_k}(x_{i_2} - x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}} - x_{i_1}; \ldots; x_{j_2} - x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}} - x_{j_1}) \right|^2 d(x_{i_2} - x_{i_1}) \ldots$$
$$\ldots d(x_{i_{n_1}} - x_{i_1}) \ldots d(x_{j_2} - x_{j_1}) \ldots d(x_{j_{n_k}} - x_{j_1}).$$

Введемо загальний гільбертів простір h_N^T як пряму ортогональну суму гільбертових просторів $h_{N;n_1,\ldots,n_k}$

$$h_N^T = \sum_{n_1,\ldots,n_k} \oplus\, h_{N;n_1,\ldots,n_k},$$

де сума береться за всіма можливими розбиттями N точок на k підмножин $1 \leq$ $\leq k \leq N$. У цьому підпросторі гамільтоніан (5) не зводиться до вільного і може бути зображений у вигляді

$$H = \sum_{n_1,\ldots,n_k} \oplus\, I \oplus \ldots \oplus H_{n_l} \oplus \ldots \oplus I,$$

де

$$H_{n_l} = H^0_{n_0}, \quad n_l \neq 2; \quad H_{n_l} = H_2, \quad n_l = 2,$$

і двочастинковий гамільтоніан H_2 задається на функціях $f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1 -$ $- x_2) \in h_2$ оператором

$$(H_2 f_2)(x_1, x_2) = \left(\frac{\Delta_1}{2m} + \Delta_2 2m\right) f_2(x_1 - x_2) +$$
$$+ v(x_1 - x_2) \int v(x_1' - x_2') f_2(x_1' - x_2')\, d(x_1' - x_2'). \tag{6}$$

Зауважимо, що для теорії надпровідності слід розглядати h_N^T тільки з $n_i \geq$ ≥ 2.

Таким чином, у гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій h_N^T з $n_i \geq 2$ модельний гамільтоніан теорії надпровідності не зводиться до вільного, а задається оператором (6). Фізичний зміст оператора (6) полягає в тому, що модельний гамільтоніан теорії надпровідності описує взаємодію пар частинок із протилежними імпульсами (наведено спрощений безспіновий варіант), а вже пари між собою не взаємодіють. Аналогічні результати одержано і для модельного гамільтоніана теорії надплинності та інших моделей.

Д. Я. Петриною досліджено і загальний гамільтоніан із парною взаємо; в гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій. На функі $f_N(x_1, \ldots, x_N) \in h_N^T$ загальний гамільтоніан задається виразом

$$(H_N f_N)(x_1, \ldots, x_N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_i}{2m} f_N(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{i<j=1}^{N} \Phi(x_1 - x_j)\, f_N(x_1, \ldots, x_l$$

Встановлено таку фундаментальну властивість цього гамільтоніана в пр торі h_N^T. Спектр H_N в h_N^T є об'єднанням за всіма можливими розбитт: $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$ суми спектрів гамільтоніанів $H_{n_1}, \ldots, H_{n_k}$ у просторах h_{n_1}, $\ldots, h_{n_k}$:

$$\sigma(H_N) = \bigcup_{n_1, \ldots, n_k} \sum_{i=1}^{k} \sigma(H_{n_i}).$$

Встановлено також структуру власних векторів оператора H_N у просторі h показано, що їх відповідні власні значення визначаються проекціями власн векторів на підпростір $h_{N; n_1, \ldots, n_k}$, який відповідає найменшим розбиттям.

Це дало можливість встановити важливу властивість модельних гаміль ніанів теорії надпровідності та надплинності, а саме, простір пар (всі $n_i = 2$) інваріантним відносно дії модельного гамільтоніана теорії надпровідності і з гається з проекцією результату дії загального гамільтоніана на підпростір п Звідси випливає, що спектр модельного гамільтоніана в підпросторі пар збі ється з тією частиною спектра загального гамільтоніана, що відповідає власн векторам з компонентою їх підпростору пар. Це означає, що статистичні сере ні модельного гамільтоніана збігаються із статистичними середніми загально гамільтоніана, якщо обмежитися частиною спектра, що відповідає підпро тору пар.

Аналогічні результати справедливі і для модельного гамільтоніана тео надплинності, тільки його слід розглядати у підпросторі пар та конденсату.

Усі ці результати по-новому висвітлюють значення модельних систем тео надплинності та надпровідності і показують, що вони є обмеженнями загальн гамільтоніанів на відповідні підпростори.

Д. Я. Петрина також дослідив рівняння для станів модельних систем. Обм жимося знову теорією надпровідності, а стан опишемо нескінченною послідо ністю функцій Гріна $G = (\ldots, G_{mn}(t_1, x_1, \ldots, t_m, x_m; t_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, t_{m+}$ $x_{m+n}), \ldots)$, де C_{mn} — статистичне середнє хронологічного добутку m опер торів знищення та n операторів народження. Рівняння стану для G можн зобразити у вигляді

$$\frac{\partial G}{\partial t_1} = A G,$$

де оператор A містить у собі інтегральний оператор вигляду

$$\frac{1}{V} \int\!\!\int\!\!\int \upsilon(x_1 - y)\upsilon(x_1' - x_2') G_{m+1\, n+1}(t_1, x_1', t_1, x_2', t_2, x_2, \ldots$$

$$\ldots, t_m, x_m; t_1, y, t_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, t_{m+n}, x_{m+n})\, dx_1'\, dx_2'\, dy, \qquad (7$$

причому цей оператор слід розуміти у тому ж сенсі, що й вираз (5).

Д. Я. Петрина запропонував розглядати оператор (7) у просторі трансляцій но-інваріантних функцій, що є узагальненням просторів h_N^T, і показав, що цьому просторі він зводиться до оператора

$$c \int v(x_1 - y) G_{m-1\,n+1}(t_2, x_2, \ldots, t_m, x_m; t_1, y, t_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, t_{m+n}, x_{m+n})\, dy,$$

де

$$c = \int v(x_1' - x_2') G_{20}(t_1, x_1' - x_2', 0, 0)\, d(x_1' - x_2').$$

Звідси випливає, що модельний гамільтоніан (5) термодинамічно еквівалентний так званому апроксимуючому гамільтоніану

$$H_{\text{appr}} = \int \overset{*}{\Psi}(x) \left(-\frac{\Delta}{2m} - M \right) \Psi(x)\, dx + c \int\int v(x_1 - x_2) \overset{*}{\Psi}(x_1) \overset{*}{\Psi}(x_2)\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \overset{*}{c} \int\int v(x_1 - x_2) \Psi(x_1) \Psi(x_2)\, dx_1\, dx_2 - \frac{|c|^2}{2} V,$$

де сталі c та $\overset{*}{c}$ визначаються з мінімуму вільної енергії для H_{appr}. Термодинамічна еквівалентність означає, що стани, визначені за модельним (5) та апроксимуючим H_{appr} гамільтоніанами, в термодинамічній границі збігаються. Зазначимо, що апроксимуючий гамільтоніан визначається за модельним, якщо в останньому замінити операторні вирази

$$\frac{1}{V} \int\int v(x_1 - x_2) \overset{*}{\Psi}(x_1) \overset{*}{\Psi}(x_2)\, dx_1\, dx_2, \qquad \frac{1}{V} \int\int v(x_1' - x_2') \Psi(x_1') \Psi(x_2')\, dx_1\, dx_2$$

по черзі на оператор cI, кратний одиничному, а сталу c визначити з умови мінімуму вільної енергії, яка зводиться до нелінійного рівняння.

Апроксимуючий гамільтоніан допускає точні розв'язки, тобто явно визначається його спектр та послідовність функцій Гріна.

Цей підхід було успішно застосовано до моделі надплинності Боголюбова, моделі взаємодіючого бозе-газу Хуанга – Янга – Латтінджера та моделі Пайєрлса – Фрьоліха. Зазначимо, що в останній моделі певні операторні вирази в модельному гамільтоніані слід замінити на функції, що визначаються з умови мінімуму функціонала вільної енергії. В роботах Д. Я. Петрини та Є. Д. Білоколоса [49, 50] показано, що рівняння мінімуму зводиться до рівняння Кортевега – де Фріза, яке розв'язується точно за допомогою скінченнозонного потенціалу. Таким чином, уперше було вказано на тісний зв'язок між методом оберненої задачі розсіяння для розв'язування нелінійних рівнянь з частинними похідними та методом апроксимуючого гамільтоніана.

Моделі надпровідності, надплинності та Пайєрлса – Фрьоліха в основному досліджувалися за допомогою рівнянь для функцій Гріна та вільної енергії. Встановлено, що функції Гріна та вільна енергія цих моделей збігаються у термодинамічній границі з відповідними характеристиками для моделей з апроксимуючими гамільтоніанами, які є квадратичними формами по операторах народження та знищення та точно розв'язуваними. При цьому спектральна задача для модельних гамільтоніанів навіть не ставилася. Винятком можна вважати результат Боголюбова про збіг середніх енергій основних станів для модельного гамільтоніана БКШ та відповідного апроксимуючого гамільтоніана.

У свій час Д. Я. Петрина розглянув гамільтоніан БКШ безпосередньо при нескінченному об'ємі у гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій і показав, що основний стан визначається точно і на ньому модельний гамільтоніан БКШ та апроксимуючий гамільтоніан Боголюбова збігаються.

Наприкінці 90-х та на початку 2000-х років Д. Я. Петрина виконав цикл праць [102 – 104, 106, 109], присвячених вивченню спектра та власних векторів гамільтоніана БКШ у скінченному об'ємі. Гамільтоніан БКШ розглядався у скінченному кубі при періодичних граничних умовах. Було знайдено певний підпростір пар, інваріантний відносно дії гамільтоніана, і показано, що у цьому підпросторі гамільтоніан зображується сумою двох операторів, один з яких має точний розв'язок задачі на власні значення та власні вектори, а другий зменшується зі збільшенням об'єму куба і може розглядатися як збурення першого оператора.

Ця задача про збурення власних значень та власних векторів є новою у функціональному аналізі, оскільки змінюється не лише малий параметр збурення, а і гільбертів простір та обидва оператори. Незважаючи на ці обставини, встановлено, що власні значення та власні вектори гамільтоніана асимптотично точно у термодинамічній границі визначаються першим оператором. Показано, що власні значення та власні вектори збігаються у термодинамічній границі до власних значень та власних векторів гамільтоніана, розглянутого безпосередньо при нескінченному об'ємі.

Було доведено, що модельний гамільтоніан БКШ збігається у термодинамічній границі з апроксимуючим гамільтоніаном Боголюбова як квадратична форма на основному та усіх збуджених станах. Цим самим було узагальнено відомий результат Боголюбова про збіг цих гамільтоніанів на основному стані.

Було встановлено, що у термодинамічній границі існують дві спільні гілки власних значень та власних векторів гамільтоніана БКШ та апроксимуючого гамільтоніана. В обох гілках спектра існує відмінна від нуля щілина між основним та збудженими станами. Той факт, що у модельного гамільтоніана БКШ та апроксимуючого гамільтоніана існують дві гілки спектра з двома щілинами у спектрі, не був відомий до робіт Д. Я. Петрини. Відповідні дві системи операторів народження та знищення, для яких основні стани є вакуумами, не є унітарно еквівалентними.

У літературі є посилання на експериментальні дані, згідно з якими в напівпровідникових матеріалах можуть існувати дві щілини. Можливо, результат Д. Я. Петрини про дві гілки спектра з відмінними від нуля щілинами надасть пояснення цим експериментальним даним.

У свій час Д. Я. Петрина та Є. Д. Білоколос розглянули модельний гамільтоніан Фрьоліха, у якому електрони взаємодіють із фононами тільки при певних дискретних модах. Було розглянуто рівняння для функцій Гріна і показано, що у термодинамічній границі вони збігаються з рівняннями для функцій Гріна моделі з апроксимуючим гамільтоніаном, який відповідає системі електронів у зовнішньому полі. Зовнішнє поле визначається з принципу мінімуму вільної енергії, як у проблемі Пайєрлса. В одновимірному випадку ця задача розв'язується точно, і її розв'язком є однозонний потенціал — функція Вейєрштрасса. Саме тому цей гамільтоніан було названо гамільтоніаном Пайєрлса – Фрьоліха.

Нещодавно Д. Я. Петрина [109] розглянув нерівноважні стани моделі Пайєрлса – Фрьоліха, вивів для них квантову ієрархію ББГКІ та показав, що для початкових даних, що задовольняють умову хаосу, ця ієрархія зводиться до двох нелінійних зв'язаних рівнянь — Шредінгера та хвильового рівняння. В одновимірному випадку вони мають односолітонний розв'язок. Є попередні результати про існування інших точних розв'язків.

4. Граничні задачі математичної фізики та їх застосування до теорії мембран [39, 40, 42, 43, 47, 51, 55, 74]. Дослідження електростатичних полів та дифузійних і гідродинамічних процесів у просторово-неоднорідних середовищах, що моделюють мембрани різних типів, має важливе значення для опису ряду явищ фізики, хімії та біології.

У 80-х рр. Д. Я. Петрина зацікавився проблемою протікання розчинів електролітів через мембрани і запропонував досліджувати процес протікання рідин через мембрану як самоузгоджену задачу для рівнянь гідродинаміки, дифузії та електростатики. В результаті досліджень, проведених Дмитром Яковичем та його учнями, одержано принципово нові результати, що мають важливе теоретичне і практичне значення, а саме, детально описано вплив електричних полів на селективні властивості мембран, одержано нові розв'язки рівнянь Лапласа та

Пуассона поблизу мембран різних типів і досліджено їх властивості, побудовано функції розподілу систем заряджених частинок поблизу мембран, досліджено розв'язки задачі про дифузію заряджених частинок в електричному полі, створеному мембраною.

Зупинимося більш детально на роботі [43], в якій, використовуючи аналогію з квантовою теорією поля, Д. Я. Петрина запропонував новий метод дослідження крайових задач для рівнянь класичної математичної фізики в областях зі складною структурою. Основним елементом цього методу є „віднімальна процедура" — аналог відомої в квантовій теорії поля віднімальної процедури Боголюбова – Парасюка. За допомогою цього методу вперше вдалося одержати строгий розв'язок класичної задачі Максвелла про ефективну діелектричну сталу середовища, в якому розміщено нескінченну кількість сферичних діелектричних тіл.

Розглядався тривимірний простір, заповнений середовищем з діелектричною проникністю ε_1, в якому певним чином розміщено сферичні тіла, що характеризуються діелектричною проникністю ε_2 $(\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1)$. Ці тіла розміщено або у вузлах нескінченної кубічної гратки з параметром a, або випадково (з деякими обмеженнями). Початок координат пов'язано з одним із тіл, а осі $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ напрямлено вздовж ребер гратки.

Розглядається збурення зовнішнього електричного поля такою системою тіл. Зовнішнім полем $\varphi_0(x)$ в роботі [43] є однорідне електричне поле

$$\varphi_0(x) = -\frac{\bar{E}\bar{x}}{\varepsilon_1}$$

($\bar{E}$ — напруженість), а в роботі [39] — поле сукупності точкових зарядів.

Потенціал поля в такій системі визначається як розв'язок такої крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi_+(x) = \varphi_-(x), \quad x \in \partial F,$$

$$\partial F = \bigcup_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^3} \partial F_{\bar{k}}, \quad \bar{k} = (k_1, k_2, k_3),$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}}\right)_+ (x) = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{n}}\right)_- (x), \quad x \in \partial F,$$

де ∂F_i — поверхня i-го тіла, а „+" і „–" позначають граничні значення відповідних величин при наближенні до поверхні тіла відповідно із зовні та з середини.

Якщо при цьому шукати потенціал у вигляді

$$\varphi(\bar{x}) = \frac{\bar{E}\bar{x}}{\varepsilon_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \int_{\partial F_0} \frac{\sigma_{\bar{k}}(y)\, dS_y}{\left|\bar{x} - \bar{y} - a\bar{k}\right|} dS_y = \varphi_0(x) + \varphi_1(x),$$

то визначення потенціалу $\varphi(\bar{x})$ зводиться до розв'язування системи нескінченного числа інтегральних рівнянь для невідомих густин поверхневих зарядів $\sigma_{\bar{k}}$, заданих на поверхнях кожного тіла

$$\sigma_{\bar{k}}(\bar{k}) + \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \int_{\partial F_0} \frac{\sigma_{\bar{k}}(\bar{y}) \cos(\bar{x} - \bar{y} - a\bar{k}', \bar{n}_k)}{2\pi\left|\bar{x} - \bar{y} - a(\bar{k} - \bar{k}')\right|^2} dS_y = -2\lambda\xi\bar{E}\bar{n}_k. \tag{8}$$

Дослідження рівняння (8) пов'язане з суттєвими математичними труднощами, оскільки ряди, що входять у ядра інтегральних операторів, не є абсолютно збіжними. Для розв'язку такої проблеми застосовується віднімальна процедура, яка дозволяє, використовуючи змістовні фізичні міркування, а також симетрію задачі, довести, що розбіжні доданки, у певному сенсі, взаємно компенсуються.

Для рівняння, що отримано після застосування віднімальної процедури, можна побудувати розв'язок у вигляді збіжного ряду теорії збурень. Члени цього ряду відповідають внескам мультиполів певного порядку. Так, у роботі [47] Д. Я. Петрина врахував доданки, що описують вплив диполів, і одержав (уперше строго) класичну формулу Максвелла для ефективної діелектричної сталої.

Остаточно ефективність методу було доведено у роботах учнів Д. Я. Петрини, в яких, поступово враховуючи вплив мультиполів вищих порядків, вдалося одержати всі відомі формули для ефективної діелектричної сталої і встановити нову більш точну формулу, що узагальнює всі попередні. Крім формули для ефективної діелектричної сталої знайдено явні наближені розв'язки для потенціалу, густини поверхневих зарядів, дипольні моменти, тощо (П. В. Малишев і Д. В. Малишев).

Однією з найважливіших у напрямку, що розглядається, є робота Д. Я. Петрини [51], в якій досліджено нелінійну узгоджену систему рівнянь дифузії і електростатики для системи заряджених частинок поблизу мембрани. Використовуючи умову електронейтральності тіл і віднімальну процедуру у ядрах відповідних інтегральних рівнянь, Д. Я. Петрина довів теорему існування та единості розв'язку за умови достатньо малої густини зарядів і тіл у мембрані. Система нелінійних рівнянь, що виникає в цій роботі, є дуже складною з аналітичної точки зору.

Д. Я. Петриною досліджено також характер поведінки функцій розподілу систем заряджених частинок поблизу мембрани і встановлено відштовхувальний характер взаємодії іонів обох знаків із мембраною. Це дозволило зробити висновок про те, що внесок електростатичного відштовхування є одним із визначальних для селективних властивостей мембран такого типу.

На завершення наведемо список основних публікацій Дмитра Яковича Петрини з сучасної математичної фізики.

1. *Парасюк О. С., Петрина Д. Я., Тацуняк П. Н.* Теорема Челлена – Лемана для квантовой теории поля в пространстве с индефинитной метрикой // Укр. мат. журн. – 1958. – **10**, № 3. – С. 344 – 346.
2. *Петрина Д. Я.* Дисперсионные соотношения в задаче дифракции // Там же. – С. 405 – 412.
3. *Петрина Д. Я.* Дисперсионные соотношения для неупругого рассеяния в нерелятивистском приближении // Там же. – 1959. – **11**, № 3. – С. 267 – 274.
4. *Петрина Д. Я.* Решение обратной задачи дифракции // Там же. – 1960. – **12**, № 4. – С. 476 – 479.
5. *Петрина Д. Я., Коломыцев В. И.* Об одном дополнении к теореме Боголюбова – Владимирова // Там же. – № 2. – С. 165 – 169.
6. *Петрина Д. Я.* О невозможности построения нелокальной теории поля с положительным спектром оператора энергии-импульса // Там же. – 1961. – **13**, № 4. – С. 109 – 111.
7. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства парциальных волн амплитуды рассеяния в теории возмущений // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 4. – С. 755 – 758.
8. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства амплитуды рассеяния на потенциале на первом „нефизическом" листе // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1963. – **44**, вып. 1. – С. 151 – 156.
9. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства вкладов диаграмм Фейнмана // Докл. АН СССР. – 1963. – **149**, № 4. – С. 808 – 811.
10. *Петрина Д. Я.* Комплексные особые точки вкладов диаграмм Фейнмана и теорема непрерывности // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 31 – 40.
11. *Петрина Д. Я.* О принципе максимальной аналитичности по комплексному орбитальному моменту // Там же. – № 4. – С. 502 – 512.
12. *Петрина Д. Я.* Представление Мандельстама и теорема непрерывности // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1964. – **46**, вып. 2. – С. 544 – 554.
13. *Петрина Д. Я.* Доказательство представления Мандельстама для лестничной диаграммы шестого порядка // Там же. – **47**, вып. 2. – С. 524 – 529.
14. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства одного класса функций, определяемых интегралами по многообразию. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 54 – 66.

15. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства одного класса функций, определяемых интегралами по многообразию. II // Там же. – № 6. – С. 60 – 66.
16. *Петрина Д. Я.* О голоморфном продолжении вкладов от диаграмм Фейнмана // Докл. АН СССР. – 1966. – **168**, № 2. – С. 308 – 309.
17. *Петрина Д. Я.* О полноте амплитуд теории возмущений в пространстве амплитуд // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 3. – С. 62 – 78.
18. *Петрина Д. Я.* О полноте амплитуд теории возмущений в пространстве амплитуд // Докл. АН СССР. – 1967. – **173**, № 2. – С. 295 – 297.
19. *Петрина Д. Я.* О суммировании вкладов от диаграмм Фейнмана: теорема существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1052 – 1074.
20. *Петрина Д. Я., Иванов С. С.* Об уравнениях, возникающих при суммировании рядов теории возмущений для матрицы рассеяния // Докл. АН СССР. – 1969. – **188**, № 4. – С. 776 – 779.
21. *Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И.* Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // Теорет. и мат. физика. – 1969. – **1**, № 2. – С. 251 – 274.
22. *Петрина Д. Я.* О гамильтонианах квантовой статистики и о модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Там же. – 1970. – **4**, № 3. – С. 394 – 411.
23. *Петрина Д. Я., Скрипник В. И.* Уравнения Кирквуда – Зальцбурга для коэффициентных функций матрицы рассеяния // Там же. – 1971. – **8**, № 3. – С. 369 – 380.
24. *Петрина Д. Я., Яцишин В. П.* О модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Там же. – 1972. – **10**, № 2. – С. 283 – 299.
25. *Петрина Д. Я.* О решениях кинетических уравнений Боголюбова. Квантовая статистика // Там же. – 1972. – **13**, № 3. – С. 391 – 405.
26. *Петрина Д. Я., Видыбида А. К.* Задача Коши для кинетических уравнений Боголюбова // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **136**. – С. 370 – 378.
27. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Об уравнениях для коэффициентных функций С-матрицы в квантовой теории поля // Теорет. и мат. физика. – 1974. – **19**, № 1. – С. 37 – 46.
28. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* *S*-матрица в конструктивной теории поля // Там же. – 1975. – **23**, № 2. – С. 160 – 177.
29. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* *S*-матрица в конструктивной теории поля // Элементар. частицы и атом. ядро. – 1976. – **7**, вып. 3. – С. 647 – 686.
30. *Петрина Д. Я., Видыбида А. К.* Задача Коши для уравнений Боголюбова // Докл. АН СССР. – 1976. – **228**, № 3. – С. 573 – 575.
31. *Петрина Д. Я., Энольский В. З.* О колебаниях одномерных систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 8. – С. 756 – 760.
32. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Петрина Д. Я.* Об одном классе модельных систем, допускающих понижение степени гамильтониана в термодинамическом пределе. I // Теорет. и мат. физика. – 1977. – **33**, № 2. – С. 231 – 245.
33. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Петрина Д. Я.* Об одном классе модельных систем, допускающих понижение степени гамильтониана в термодинамическом пределе. II // Там же. – 1978. – **37**, № 2. – С. 246 – 257.
34. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
35. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. Локально возмущенные одномерные системы // Теорет. и мат. физика. – 1979. – **38**, № 2. – С. 230 – 250.
36. *Петрина Д. Я., Давыдов А. С., Парасюк О. С.* Н. Н. Боголюбов (к семидесятилетию со дня рождения) // Укр. физ. журн. – 1979. – № 8.
37. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* Статистическая механика квантовоклассических систем. Неравновесные системы // Там же. – 1980. – **42**, № 1. – С. 88 – 100.
38. *Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.* Проекционно-итеративный метод решения уравнений квантовой теории поля и его связь с теорией перенормировок. Уравнения квантовой теории поля и некорректно поставленные задачи математической физики // Там же. – № 2. – С. 167 – 183.
39. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В., Пилявский А. И.* О процессе обратного осмоса как краевой задаче в областях с мелкозернистой структурой // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 75 – 78.
40. *Петрина Д. Я.* Исследование функций распределения пространственно-неоднородных систем заряженных частиц методом теории пограничного слоя // Физика молекул. –. 1980. – Вып. 9.
41. *Петрина Д. Я., Боголюбов Н. Н. (мл.), Курбатов А. М.* Термодинамический предел в системах статистической механики с факторизованным взаимодействием // Советские научные обзоры. Сер. С. Мат. физика. – 1980.

42. *Петрина Д. Я., Пилявский А. И.* О потенциале электростатического поля системы заряженных частиц и динамической мембраны // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 7. – С. 57 – 60.
43. *Петрина Д. Я.* О решении одной классической задачи электростатики и вычитательной процедуре // Докл. АН СССР. – 1983. – **270**, № 1. – С. 78 – 81.
44. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 5. – С. 3 – 58.
45. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // Тр. II междунар. конф. по нелинейн. и турбулент. процессам в физике. – Киев, 1983.
46. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // Тр. II всесоюз. сов. по избр. пробл. стат. физики. – Дубна, 1984.
47. *Петрина Д. Я.* О решении одной классической задачи электростатики с помощью вычитательной процедуры // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 5. – С. 709 – 721.
48. *Петрина Д. Я.* Квантовая теория поля. – Киев: Выща шк., 1984. – 248 с.
49. *Петрина Д. Я., Белоколос Е. Д.* О связи методов аппроксимирующего гамильтониана и конечнозонного интегрирования // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 3. – С. 580 – 582.
50. *Петрина Д. Я., Белоколос Е. Д.* О связи методов аппроксимирующего гамильтониана и конечнозонного интегрирования // Теорет. и мат. физика. – 1984. – **58**, № 1. – С. 61 – 71.
51. *Петрина Д. Я.* Функции распределения систем заряженных частиц в пространственно-неоднородной среде // Там же. – 1984. – **59**, № 1. – С. 104 – 116.
52. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Термодинамический предел неравновесных состояний трехмерной системы упругих шаров // Тр. II междунар. сов. по избр. пробл. стат. механики. – Дубна, 1985. – **2**. – С. 152 – 159.
53. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Эволюция состояния бесконечных систем классической статистической механики // Сов. науч. обзоры. Сер. С. Мат. физика. – 1985. – **5**. – С. 1 – 51.
54. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. Локально возмущенные одномерные системы // Тр. II междунар. рабочей группы. – Киев: Наук. думка, 1985. – Ч. 1. – С. 109 – 117.
55. *Петрина Д. Я., Пилявский А. И.* Задачи электростатики в пространственно-неоднородных средах и вычитательная процедура // Физика многочастич. систем. – 1985. – Вып. 7. – С. 82 – 96.
56. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* Термодинамический предел неравновесных состояний трехмерной системы упругих шаров // Теорет. и мат. физика. – 1985. – **64**, № 1. – С. 130 – 149.
57. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Термодинамический предел неравновесных состояний трехмерной системы упругих шаров // Докл. АН СССР. – 1985. – **282**, № 1. – С. 130 – 136.
58. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
59. *Митропольский Ю. А., Петрина Д. Я., Барьяхтар В. Г.* Творческий вклад академика Н. Н. Боголюбова в развитие математики, нелинейной механики и теоретической физики // Вестн. АН УССР. – 1985. – № 11. – С. 9 – 21.
60. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Теормодинамический предел и предел Больцмана – Грэда неравновесных состояний системы упругих шаров // Проблемы современной стат. физики. – Киев: Наук. думка, 1985. – С. 228 – 237.
61. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I.* Evolution of states of infinite systems in classical statistical mechanics // Sov. Sci. Rev. Sec. C. Math. Phys. Rev. – New York: Harwood Acad. Publ., 1985. – Vol. 5. – P. 1 – 52.
62. *Митропольский Ю. А., Барьяхтар В. Г., Петрина Д. Я.* Наука — главная и единственная цель моей жизни (на укр. яз.) // Наука и культура. – 1986. – **20**. – С. 128 – 137.
63. *Герасименко В. И., Малышев П. В., Петрина Д. Я.* Решения уравнений Боголюбова для бесконечных трехмерных систем частиц (на англ. яз.) // Тр. IV междунар. вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. – Вильнюс, 1987. – **2**. – С. 451 – 461.
64. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Термодинамический предел для решений уравнений Боголюбова // Сов. науч. обзоры. Сер. С. Мат. физика. – 1988. – **7**. – С. 281 – 337 (на англ. яз.).
65. *Петрина Д. Я.* Математические проблемы описания эволюции состояний бесконечных систем статистической механики // Тр. междунар. рабочей группы „Избран. пробл. стат. физики". – 1987. – Т. 2. – С. 332 – 342.
66. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* Предел Больцмана – Грэда состояний бесконечной системы упругих шаров // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 2. – С. 336 – 341.

67. *Боголюбов А. Н., Петрина Д. Я., Урбанский Т. М.* Николай Митрофанович Крылов. – Киев: Наук. думка, 1987. – С. 157 – 169.
68. *Петрина Д. Я., Малышев П. В.* Термодинамический предел для неравновесных функций распределения трехмерных классических систем взаимодействующих частиц // Докл. АН СССР. – 1988. – **301**, № 3. – С. 585 – 589.
69. *Петрина Д. Я., Мищенко А. В.* О точных решениях одного класса уравнений Больцмана // Там же. – **298**, № 2. – С. 338 – 342.
70. *Петрина Д. Я., Мищенко А. В.* О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана // Теорет. и мат. физика. – 1988. – **77**, № 1. – С. 135 – 153.
71. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* Предел Больцмана – Грэда равновесных состояний // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 12. – С. 17 – 19.
72. *Петрина Д. Я.* Математические проблемы описания эволюции состояний бесконечных систем статистической механики (на англ. яз.) // Теория плазмы и нелинейные турбулентные процессы в физике. – 1988. – **2**. – С. 906 – 932.
73. *Петрина Д. Я., Малышев П. В., Герасименко В. И.* Математические проблемы описания эволюции состояний бесконечных классических статистических систем // Тр. III междунар. рабочей группы „Нелинейные и турбулентные процессы в физике". – Киев: Наук. думка, 1988. – **1**. – С. 312 – 315.
74. *Петрина Д. Я.* О процессе протекания электролита через мембрану как краевой задаче в областях с мелкозернистой структурой // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 4 – 14.
75. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* О предельной теореме Больцмана – Грэда // Докл. АН УССР. – 1989. – № 11. – С. 12 – 16.
76. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V.I., Malyshev P.V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. – London: Gordon and Breach, 1989. – 352 p.
77. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Предел Больцмана – Грэда решений уравнений Боголюбова // Нелинейный мир: Тр. IV междунар. рабочего сов. по нелинейн. и турбулент. процессам в физике. – Киев: Наук. думка, 1989. – **2**. – С. 57 – 60.
78. *Владимиров В. С., Митропольский Ю. А., Парасюк О. С., Самойленко А. М., Петрина Д. Я.* Исследования Н.Н.Боголюбова в области математики и теоретической физики // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 9. – С. 1156 – 1165.
79. *Петрина Д. Я.* Термодинамический предел решений уравнений Боголюбова // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **191**. – С. 192 – 201.
80. *Барьяхтар В. Г., Парасюк О. С., Петрина Д. Я.* Николай Николаевич Боголюбов (к 80-летию со дня рождения) // Укр. физ. журн. – 1989. – **34**, № 9. – С. 1433 – 1434.
81. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я.* Существование предела Больцмана – Грэда для бесконечной системы упругих шаров // Теорет. и мат. физика. – 1990. – **83**, № 1. – С. 92 – 114.
82. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математические проблемы статистической механической системы упругих шаров // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 3. – С. 135 – 182.
83. *Герасименко В. И., Петрина Д. Я., Энольский В. З.* Об уравнениях движения одного класса квантово-классических систем // Докл. АН СССР. – 1990. – **315**, № 1. – С. 75 – 80.
84. *Петрина Д. Я.* О гамильтонианах в пространствах трансляционно-инвариантных функций // Методы мат. физики бесконечн. систем: Сб. науч. тр. – Киев, 1991. – С. 4 – 21.
85. *Митропольский Ю. А., Петрина Д. Я.* О работах Н. Н. Боголюбова по классической и квантовой статистической механике // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 155 – 202.
86. *Петрина Д. Я.* Аппроксимация общего гамильтониана гамильтонианами теории сверхпроводимости и сверхтекучести (на англ. яз.) // Алгебраические и геометрические методы в мат. физике. – Голландия, 1994.
87. *Петрина Д. Я.* Общие гамильтонианы и модельные гамильтонианы теории сверхпроводимости и сверхтекучести в гильбертовых пространствах трансляционно-инвариантных функций (на англ. яз.) // Теория операторов. – 1994. – **70**.
88. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. – Dordrecht: Kluwer Acad.Publ., 1995. – 461 p.
89. *Петрина Д. Я.* Математические основы квантовой статистической механики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 623 с.
90. *Petrina D. Ya., Gredzhuk V. I.* On two models of interaction Bose gas: Bogolyubov's model of superfluitity and Hang-Yang-Luttinger model // Phys. Math. Rev. – 1996. – № 3/4. – P. 370 – 406.
91. *Cercignani S., Gerasimenko V., Petrina D. Ya.* Many particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.
92. *Петрина Д. Я., Петрина Е. Д.* О существовании равновесных состояний систем упругих шаров в пределе Больцмана – Энскога // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 112 – 122.
93. *Petrina D. Ya., Lampis M.* The Boltzmann – Enskog limit for equilibrium states of systems of hard spheres in framework of canonical ensemble // Там же. – № 9. – С. 1194 – 1205.
94. *Герасименко В.И., Петрина Д. Я.* On the generalized kinetic equation // Докл. АН УРСР. – 1997. – № 7. – С. 7 – 12.

95. *Петрина Д. Я.* Термодинамический предел для неравновесных состояний классических статистических систем // Мат. физика: Энцикл. – М.: Большая сов. энцикл., 1998. – С. 599 – 600.
96. *Petrina D. Ya., Petrina E. D.* Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 195 – 211.
97. *Petrina D. Ya., Petrina E. D.* Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. II // Там же. – № 3. – С. 372 – 388.
98. *Petrina D. Ya., Petrina E. D.* Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. III // Там же. – № 4. – С. 552 – 570.
99. *Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* The generalized kinetic equation generated by the BBGKY hierarchy // Укр. физ. журн. – 1998. – **43**, № 6/7. – С. 697 – 702.
100. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems. – London, New York: Taylor and Francis Sci. Publ., 2002. – 352 p.
101. *Lampis M., Petrina D. Ya., Petrina K. D.* Stochastic dynamics as a limit of Hamiltinian dynamics of hard spheres // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 614 – 636.
102. *Petrina D.Ya.* Methods of derivation of the stochastic Boltzmann hierarchy // Там же. – 2000. – **52**, № 4. – С. 474 – 492.
103. *Petrina D.Ya.* Spectrum and states of BCS Hamiltonian in finite domain. I. Spectrum // Там же. – № 5. – С. 667 – 690.
104. *Petrina D.Ya.* Spectrum and states of the BCS Hamiltonian in finite domains. II. Spectra of excitations // Там же. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1080 – 1101.
105. *Lampis M., Petrina D. Ya.* Spatially hormogeneous Boltzmann hierarchy as averaged spatially in homogeneous stochastic Boltzmann hierarchy // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 78 – 94.
106. *Petrina D. Ya.* Spectrum and states of the BCS Hamiltonian in finite domain. III. The BCS Hamiltonian with mean-field interaction // Там же. – № 11. – С. 1486 – 1504.
107. *Petrina D.Ya.* Model BCS Hamiltonian and approximating Hamiltonian for an infinite volume. IV. Two branches of their common spectra and states // Там же. – 2003. – **55**, № 2. – С. 174 – 197.
108. *Петрина Д. Я.* Стани нескінченних рівноважних класичних систем // Там же. – № 3. – С. 389 – 400.
109. *Petrina D. Ya.* Equilibrium and nonequilibrium states of model Föhlich – Peierls Hamiltonian // Там же. – № 8. – С. 1069 – 1087.

Отримано 16.01.2004