

## ПЛОСКИЕ ЗАМКНУТЫЕ ТРАЕКТОРИИ НА НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С МЕТРИКОЙ ВРАЩЕНИЯ

By using methods of infinitesimal and global geometry, we investigate plane trajectories both on spherical and toroidal manifolds.

Методами інфінітезимальної та глобальної геометрії досліджено траєкторії на сферичному та тороїдальному многовидах.

**1. Введение.** Эйнштейн высказал плодотворную мысль, что характер фундаментальных физических законов определяется геометрией пространства-времени [1]. Теоретики, участвовавшие в создании теории магнитного удержания плазмы [2–4], говорят, что физика удержания плазмы есть конечномерная геометрия. Удерживающие свойства ограниченного объема, занимаемого плазмой, в значительной мере определяются токовыми траекториями на компактных многообразиях. Теория удержания устанавливает взаимно однозначное соответствие между равновесным состоянием плазмы и глобальными инвариантами геометрии многообразий.

Цель настоящей работы — методами инфинитезимальной и глобальной геометрии получить следующие результаты:

1) точную формулу для замкнутых кусочно-гладких геодезических на ограниченных сферических многообразиях;

2) вывод уравнения плоских геодезических траекторий при фиксированном соотношении между глобальными инвариантами многообразия;

3) обоснование установленных в работе свойств траекторий в форме локсодром на торе.

Частично указанные результаты анонсированы в работах [5–7].

**2. Представление геодезических.** Рассматриваются двумерные многообразия  $M$ , диффеоморфные компактной ориентированной поверхности  $S^2$ . По теореме Пуанкаре–Хопфа [8] эйлерова характеристика  $\chi(M)$  равна сумме индексов нулей любого векторного поля с изолированными особенностями. У инфинитезимальной изометрии  $S^2$  нули всегда изолированы и индекс каждого равен 1. Поэтому многообразии  $S^2$  имеет неподвижные точки ( $N$  и  $S$  — северный и южный полюсы).

**Определение.** Гладкое поле вектора скорости вдоль параметризованной кривой  $\alpha$  на ориентированной компактной поверхности  $S^2$  называется параллельным, если  $\alpha: I \rightarrow S^2$  — геодезическая [8].

При доказательстве интегрируемости и разрешимости в явном виде уравнений геодезических используются геодезически параллельные координаты  $(u, \theta)$  [9].

Пусть  $S^2$  — двумерная сфера радиуса  $r_0$ , снабженная набором карт  $\{U, U_N, U_S\}$  и координатами  $(u, \theta)$  на  $U$ :

$$\varphi(u, \theta) = (r_0 \sin u \cos \theta, r_0 \sin u \sin \theta, r_0 \cos u),$$

$\gamma_0$  — геодезическая, соединяющая  $N$  и  $S$  и имеющая длину  $\rho_{\gamma_0}(N, S) = L$ .

Тогда  $g$  есть  $C^1$ -метрика вращения на  $U$ , задаваемая формулой

$$g = du^2 + a^2(u)d\theta^2, \quad (1)$$

где  $a(u) = \sin u$  — функция, определенная на  $]0, L[$  и принимающая значения в  $R^+$ . Для каждой геодезической  $\gamma$ , не являющейся меридианом, существуют

[9] вещественные числа  $u_1$  и  $u_2$  в интервале  $]0, L[$  такие, что  $a(u_1) = a(u_2)$ ,  $\gamma$  целиком содержится между параллелями  $u = u_1$  и  $u = u_2$  и вдоль геодезической  $\gamma$  выполнено соотношение

$$\varepsilon_1 \frac{d\theta}{ds} = \frac{a(u_1)}{a^2(u)}$$

( $\varepsilon_1$  выбирается равным  $\pm 1$  в соответствии с ориентацией  $\gamma$ ).

Сначала получим уравнения геодезических. Отличные от нуля символы Кристоффеля, связанные с метрикой (1), равны

$$\Gamma_{\theta u}^{\theta} = \Gamma_{u\theta}^{\theta} = \frac{a'(u)}{a(u)}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^u = -a'(u)a(u).$$

Геодезическая  $\gamma: t \rightarrow (u(t), \theta(t))$ , лежащая в  $U$ , удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} - a'(u)a(u) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{a'(u)}{a(u)} \frac{du}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Второе уравнение системы (2) можно проинтегрировать (интеграл Клеро)  $a^2(u) \frac{d\theta}{dt} = h$  ( $h$  — константа вдоль  $\gamma$ ). Если  $\gamma$  параметризовано длиной дуги, то (1) можно записать в виде

$$1 = \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + a^2(u) \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$a^2(u) \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \leq 1$$

и

$$\varepsilon_1 a^2(u) \frac{d\theta}{ds} = a^2(u) \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = |h| \leq a(u).$$

Если  $|h| = \sup \{a(u), u \in [0, L]\}$ , то  $\gamma$  — параллель. Если  $|h| < \sup \{a(u), u \in ]0, L[ \}$ , то существует максимальный отрезок  $[u_1, u_2] \subset ]0, L[$ , для которого  $a(u_1) = a(u_2) = |h|$ . Тогда для геодезической  $\gamma$  имеем  $u_1 \leq u \leq u_2$ .

Учитывая отмеченное, запишем уравнение любой геодезической  $\gamma$  в переменных  $u$  и  $\theta$ . Первый интеграл Клеро имеет вид

$$\sin^2 u \frac{d\theta}{ds} = h.$$

Поскольку  $|h|$  не превышает единицу, можно ввести обозначение  $|h| = \sin r$  для некоторого  $r \in ]0, \pi/2[$ . Предполагая, что  $a(u)$  кусочно- $C^2$ -гладкая на  $]0, L[$ , можно заметить, что геодезическая  $\gamma$ , содержащаяся между параллелями  $u = r$ ,  $u = \pi - r$  (рис. 1), определяется следующим образом:

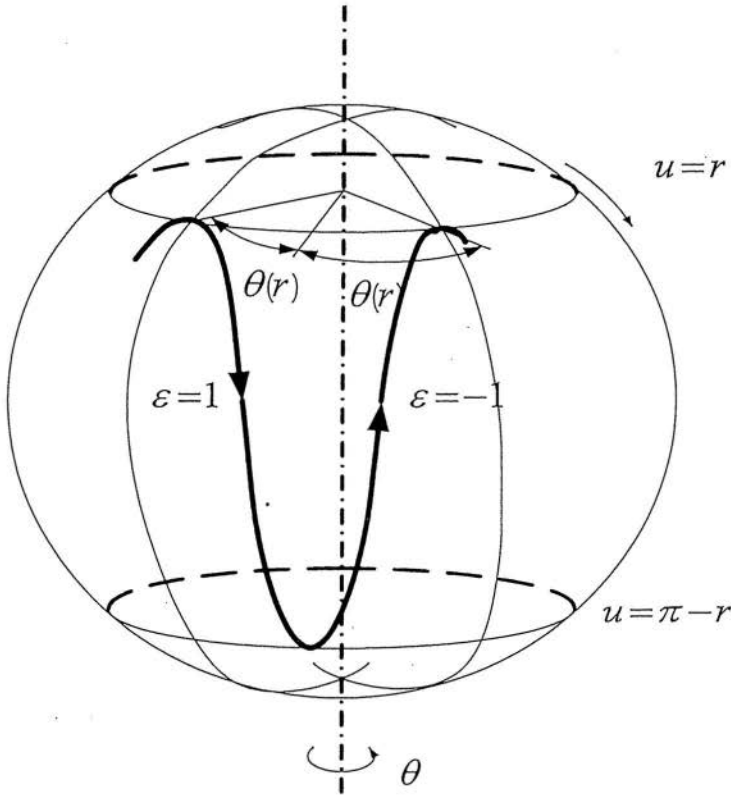


Рис. 1. Геодезическая на ограниченном сферическом многообразии ( $\varepsilon_1 = 1$ ) [10].

$$\frac{d\theta}{ds} = \varepsilon_1 \frac{\sin r}{\sin^2 u}, \quad \frac{d\theta}{du} = \varepsilon \varepsilon_1 \frac{\sin r}{\sin u \sqrt{\sin^2 u - \sin^2 r}},$$

$$\frac{ds}{du} = \varepsilon \frac{\sin u}{\sqrt{\sin^2 u - \sin^2 r}}.$$

Знак  $\varepsilon = \pm 1$  фиксирован на отрезке геодезической, идущей от  $u = r$  до  $u = \pi - r$ , и изменяется, когда  $u$  достигает значения  $r$  или  $\pi - r$ .

Любая геодезическая  $\gamma$

$$\theta(u, r) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 u - \operatorname{tg}^2 r} \operatorname{tg} r}{\operatorname{tg}^2 u - 2\operatorname{tg}^2 r}$$

находится на ограниченном сферическом многообразии и не попадает в области  $u < r$  и  $u > \pi - r$ . Угол  $\theta(r)$  между двумя последовательными точками касания равен

$$\theta(r) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 r} \operatorname{tg}^2 r}{1 - 2\operatorname{tg}^4 r}.$$

Геодезическая  $\gamma$  в  $U$  замкнута, когда

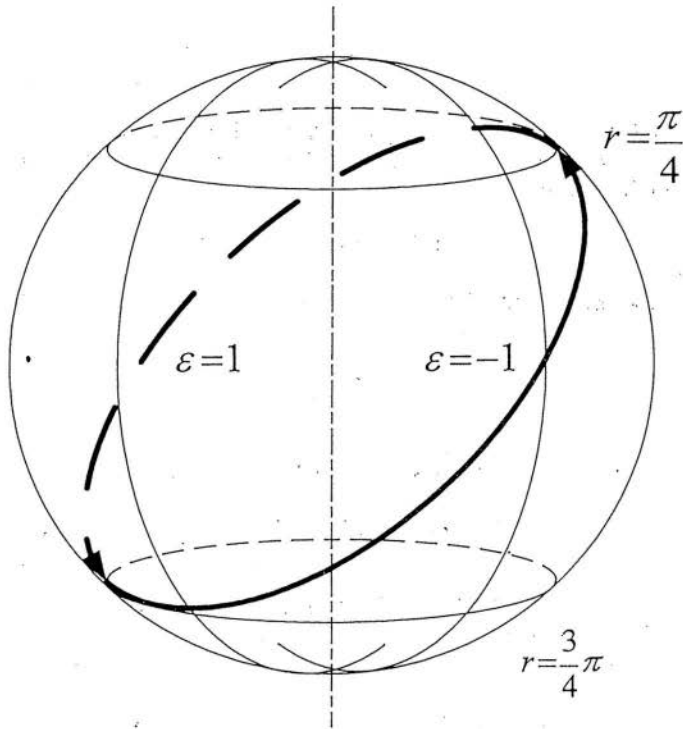


Рис. 2. Геодезическая траектория при  $q=1$ ,  $p=2$  ( $r = \pi/4$ ).

$$\frac{2\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 r} \operatorname{tg}^2 r}{1 - 2\operatorname{tg}^4 r} = -\varepsilon \varepsilon_1 \operatorname{tg}_1 \frac{p}{q} \pi,$$

причем до замыкания она огибает сферу  $p$  раз и состоит из  $2q$  геодезических отрезков между точками касания.

**3. Nesting геодезических.** Для замкнутых геодезических функция  $\varepsilon_1 \varepsilon \theta(r)$ , отображающая  $]0, \pi/2[ \subset R$  в  $R$ , непрерывна. Условие замкнутости геодезических дает возможность связать положение параллелей, между которыми находятся непрерывные геодезические, с числами  $p$  и  $q$ :

$$\operatorname{tg}^4 r = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{p}{q} \pi \right).$$

Уравнение позволяет по заданному отношению числа обходов сферы и числа геодезических отрезков до замыкания определить ограниченное сферическое многообразие, вмещающее замкнутую геодезическую, либо, задав положение предельных параллелей сферы, найти отношение  $p$  и  $2q$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(S^2, g)$  — поверхность вращения, снабженная набором карт  $\{U, U_N, U_S\}$  и такими координатными функциями  $(u, \theta)$  на  $U$ , при которых  $g$  имеет вид (1).

При числе  $2q$  геодезических отрезков между точками касания с предельными параллелями, равному числу  $p$  обходов сферы до замыкания, геодезическая  $\gamma$  в  $U$  является плоской кривой (рис. 2).

**Доказательство.** При  $p = 2q$  предельные параллели находятся при  $r = \pi/4$  и  $r = 3\pi/4$ , а уравнение геодезической  $\gamma$  и  $U$  принимает вид

$$\theta(u) = -\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 u - 1}}{\operatorname{tg}^2 u - 2}. \quad (3)$$

Поскольку форма геодезической траектории инвариантна относительно однородных поворотов, целесообразно в уравнении геодезической (3) перейти к декартовым переменным:

$$xy(1 - 3z) = z\sqrt{1 - 2z^2}(y^2 - x^2). \quad (4)$$

Ортогональная матрица поворота в плоскости  $z = y$  такова:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В преобразованной системе координат уравнение (4) принимает вид

$$-\frac{y^6}{4} + \frac{1 - 5x^2}{4} y^4 + (-x^4 + 2x^2) y^2 + x^4 - x^2 = 0,$$

имеет шестой порядок и является приводимым [11], т. е. распадается на два множителя, которые представляют систему кривых на ограниченном сферическом многообразии:

$$\left(-\frac{y^4}{4} - x^2 y^2 + x^2\right)(y^2 + x^2 - 1) = 0.$$

Первый множитель не имеет геометрического смысла, так как кривая не лежит на поверхности сферы. Вторым множителем

$$x^2 + y^2 = 1$$

описывает окружность единичного радиуса.

Теорема доказана.

Nesting геодезических интерпретируется как фазовый переход от пространственного расположения геодезических к расположению в плоскости; отношение  $p$  и  $q$  является параметром фазового перехода.

**4. Локсодромы тороидальных многообразий.** Пусть  $U$  — открытое множество в  $R^3$  и отображение  $\varphi: U \rightarrow R^3$  дано в виде

$$\varphi(\eta, \phi, \theta) = \frac{c}{\operatorname{ch} \eta - \cos \phi} (\operatorname{sh} \eta \cos \theta, \operatorname{sh} \eta \sin \theta, \sin \phi),$$

где  $\eta, \phi, \theta$  — тороидальные координаты точки поверхности тора [12],  $c$  — масштабный множитель.

Координатные поверхности

$$\eta = \operatorname{const} - \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - c \operatorname{cth} \eta\right)^2 + x_3^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \eta} \quad (5)$$

— торы, у которых масштабный множитель  $c$  связан с радиусами образующих тор окружностей соотношениями

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \operatorname{ch} \eta = \frac{a}{b}, \quad a > b > 0,$$

$$\phi = \text{const} - x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - c \text{ctg} \phi)^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \phi}$$

— сферы с центром в точке  $(0, 0, c \text{ctg} \phi)$  и радиусом, равным  $c/\sin \phi$ ;  $\theta = \text{const} - x_2 = x_1 \text{tg} \theta$  — плоскости, содержащие ось  $Ox_3$ . Пересечение координатных поверхностей  $\eta = \text{const}$  и  $\phi = \text{const}$  образует параллели тора, а  $\eta = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  — меридианы.

Параметризованный тор является двоякопериодическим, так как  $\phi(\phi + 2\kappa\pi, \theta) = \phi(\phi, \theta + 2\kappa\pi) = \phi(\phi, \theta)$  для всех  $(\phi, \theta) \in R^2$ ,  $\kappa \in Z$ . Значит, каждая точка образа  $\phi$  соответствует единственной точке  $(\phi, \theta) \in R^2$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  и  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Метрику  $g$  на торе запишем в виде

$$g = E d\phi^2 + G d\theta^2,$$

где

$$E = \frac{c^2}{(\text{ch} \eta - \cos \phi)^2}, \quad G = E \text{sh}^2 \eta.$$

Пусть  $\alpha: I \rightarrow R^2$  — регулярная параметризованная кривая в  $R^2$  ( $I$  — открытый интервал в  $R$ ):

$$\alpha(t) = (\phi(t), \theta(t)) \quad \text{для всех } t \in I.$$

Определим  $\phi(t) = d \cdot t$  и  $\theta(t) = e \cdot t$  и обозначим через  $(\phi, \theta)$  точку на поверхности тора  $\eta = \text{const}$ .

Тогда можно высказать такое **предположение**.

Пусть  $S^2 = S^1 \times S^1$  — двумерный тор, снабженный координатными функциями  $(\phi, \theta)$  на  $U$ ,  $g$  —  $C^1$ -метрика вращения на  $U$ . Тогда

$$\theta = \frac{e}{d} \phi \quad (6)$$

является локсодромой тора.

**Доказательство.** Согласно определению локсодромы необходимо показать, что траектории  $\phi(t)$  и  $\theta(t)$  пересекают все меридианы тора  $\theta = \text{const}$  под одним и тем же углом. Угол  $\delta$  между траекторией и меридианом тора

$$\cos \delta = \frac{\sqrt{E}}{(E + G e^2 / d^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{d}{(d^2 + e^2 \text{sh}^2 \eta)^{\frac{1}{2}}}$$

не зависит от координат точки траектории.

Предположение доказано.

Значения (6) принадлежат  $Q$ . Поэтому траектории плотно покрывают поверхность тора. Из (6) можно образовать замкнутые траектории. При этом угол  $\delta$  удовлетворяет соотношению

$$\text{tg} \delta = \frac{m}{n} \text{sh} \eta,$$

где  $m$  — число обходов локсодромы оси тора, а  $n$  — число обходов азимутальной оси до замыкания;  $m$  и  $n \in Z$ . Тогда замкнутые траектории имеют вид

$$\theta = \frac{m}{n} \phi. \quad (7)$$

**Теорема 2.** Замкнутая локсодрома тора, у которой число  $m$  обходов траектории (7) вокруг оси тора равно числу  $n$  обходов локсодромы азимутальной оси до замыкания, является плоской кривой.

*Доказательство.* Описанную ситуацию иллюстрирует рис. 3.

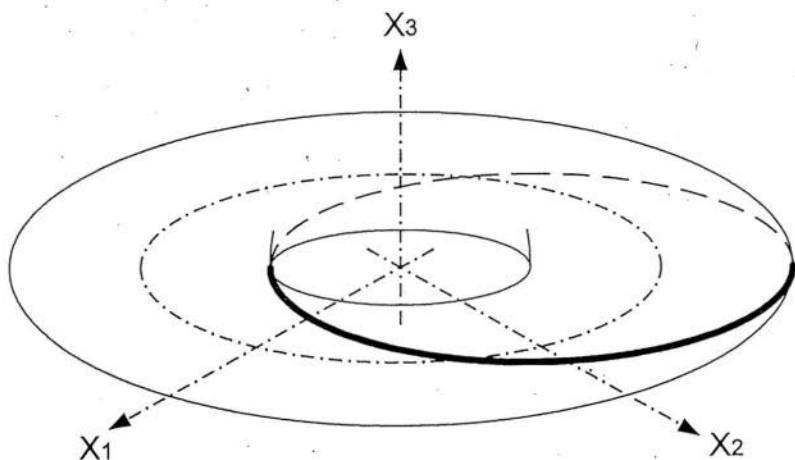


Рис. 3. Локсодрома тора с  $m = n = 1$ .

В качестве локсодромы выбираем линию пересечения двух поверхностей: тора  $\eta = \text{const}$  (5) и плоскости  $x_3 = x_2 / \text{sh} \eta$ , след которой проходит через центр тора и касается меридианов. От исходной системы координат перейдем к системе координат, связанной с этой плоскостью. Матрица ортогональных преобразований

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} \text{th} \eta & -(\text{ch} \eta)^{-1} \\ (\text{ch} \eta)^{-1} & \text{th} \eta \end{pmatrix}$$

дает возможность осуществить этот переход. Подставив в уравнение тора (5) связь исходных координат и координат в плоскости  $x_3 = x_2 / \text{sh} \eta$ , получим уравнения линии пересечения

$$\left( x_1 \pm \frac{c}{\text{sh} \eta} \right)^2 + x_2'^2 = c^2 \text{cth}^2 \eta,$$

которая представляет собой две окружности радиуса  $a$  с центрами, смещенными от центра тора на расстояние, равное радиусу меридиана  $b$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Если рассматривать сечение тора не плоскостью  $x_3 = x_2 / \text{sh} \eta$ , а ей ортогональной, то получим уравнения окружностей, которые соответствуют изменению ориентации локсодромы.

1. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности: Собр. науч. тр. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 700 с.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Геометрия магнитного поля // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. – Вып. 2. – С. 3–91.
3. Соловьев Л. С., Шафранов В. Д. Замкнутые конфигурации для удержания плазмы // Там же. – М.: Госатомиздат, 1967. – Вып. 5. – С. 3–208.
4. Roberson C. W., Mondelli A., and Chernin D. High-current betatron with stellarator fields // Phys. Rev. Lett. – 1983. – 50, № 7. – P. 507–510.

5. Романов С. С. Некоторые характерные линии на торе. – Харьков, 1974. – 14 с. – (Препринт / НАН Украины. Физ.-тех. ин-т; № 74-32).
6. Романов С. С. Токовые линии на торе круглого сечения // Допов. НАН України. – 2001. – № 9. – С. 84–88.
7. Romanov S. S. Smooth trajectories on toroidal manifolds // Int. Workshop „Innovative Concepts and Theory of Stellarators”: Abstrs.Sci. Centre „Institute for Nuclear Research” (Kyiv, Ukraine, May 28–31, 2001). – Kyiv, 2001. – P. 34.
8. Торн Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1982. – 359 с.
9. Клифгенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. – М.: Мир, 1982. – 414 с.
10. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. – М.: Мир, 1981. – 325 с.
11. Савелов А. А. Плоские кривые. – М.: Физматгиз, 1960. – 293 с.
12. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.

Получено 10.06.2002