УДК 947.946, 517.9

О. В. Воробйова, М. М. Притула (Львів. нац. ун-т)

СКІНЧЕННОВИМІРНІ НЕЛОКАЛЬНІ РЕДУКЦІЇ ІНВЕРСНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА

We study the finite-dimensional Moser-type reductions for the inverse Korteweg – de Vries (KdV) nonlinear dynamical system and the Liouville integrability of these reductions by quadratures.

Вивчаються скінченновимірні редукції типу Мозера для нелінійної інверсної динамічної системи Кортевега – де Фріза (КдФ) та їх інтегровність за Ліувіллем у квадратурах.

1. Нехай на гладкому функціональному многовиді $M \subset C^{\infty}(R/2\pi Z; R^3)$ задано інверсну динамічну систему КдФ

$$w_t = \begin{Bmatrix} u_t = v \\ p_t = u_x + uv \\ v_t = p \end{Bmatrix} = K[u, p, v], \tag{1}$$

де гладке за Фреше векторне поле $K: M \to T(M)$ є автономним і однорідним відносно незалежних точок $w = (u, p, v)^{\top} \in M$ як точок многовиду джетів $J(R^2; R^3)$, $t \in R_+$ — еволюційний параметр, $\top$ — знак транспонування.

У роботі [1] було доведено повну інтегровність за Ліувіллем системи (1), зокрема, знайдено нескінченну ієрархію інволютивних законів збереження, узгоджену імплектичну пару нетерових операторів і зображення Лакса.

Система (1) на джет-многовиді $J(R^2; R^3)$ еквівалентна інтегровному ідеалу $I(\alpha) \subset \Lambda(J(R^2; R^3))$, породженому такими 2-формами $\{\alpha\} \subset \Lambda^2(J)$:

$$\{\alpha\} = \Big\{du^{(0)} \wedge dx + v^{(0)} dx \wedge dt = \alpha_1^{(2)},$$

$$dp^{(0)} \wedge dx + du^{(0)} \wedge dt - u^{(0)} du^{(0)} \wedge dx = \alpha_2^{(2)}, \quad dv^{(0)} \wedge dx + p^{(0)} dx \wedge dt = \alpha_3^{(2)} :$$

$$(x, t; u^{(0)}, p^{(0)}, v^{(0)}) \in M^5 \subset J(R^2; R^3)\Big\},$$

де M^5 — п'ятивимірний джет-підмноговид $J(R^2; R^3)$, $\wedge$ — знак зовнішнього множення в алгебрі Грассмана $\Lambda(M)$ [2]. Ідеал $I(\alpha) \subset \Lambda(J)$ є інтегровним внаслідок його замкненості, тобто $dI(\alpha) \subset I(\alpha)$, маючи майже скрізь двовимірний інтегральний многовид $M_{\alpha}^2 = \{(x, t) \in R^2\}$, вкладений у $J(R^2; R^3)$, який анулює тотожно $I(\alpha)$. Використовуючи схему побудови асоційованої зв'язності $\Gamma \in \Lambda(M^5) \otimes \mathcal{G}$, яка задає на підмноговиді M_{α}^2 рівняння паралельного перенесення при дії структурної групи Лі G із алгебри Лі $\mathcal{G}$, після нескладних обчислень знаходимо

$$\Gamma_{\lambda} = b^{(x)}[u^{(0)}, p^{(0)}, v^{(0)}; \lambda] dx + b^{(t)}[u^{(0)}, p^{(0)}, v^{(0)}; \lambda] dt, \tag{2}$$

де для всіх $\lambda \in C$

$$b^{(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda & -\frac{1}{6}u^{(0)} \\ -1 & \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$b^{(x)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda u^{(0)} - \frac{1}{6}v^{(0)} & -\frac{1}{6}\lambda^2 u^{(0)} - \frac{1}{6}p^{(0)} + \frac{1}{6}\lambda v^{(0)} + \frac{1}{18}u^{(0)^2} \\ \frac{1}{3}u^{(0)} - \lambda^2 & \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{1}{6}\lambda u^{(0)} + \frac{1}{6}v^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Відповідно узгоджені для всіх $\lambda \in C$ рівняння паралельного перенесення на асоційованому розшаруванні $P(M, G; C^2)$ мають вигляд $dy + \Gamma_\lambda y = 0$, де $y \in C^2$, $G = SL(2; C)$, причому 2-форма кривизни $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(J)$ тотожно анулюється на інтегральному многовиді M^2_α.

2. Сформулюємо асоційовану зі зв'язністю (2) лінійну узагальнену задачу на власні значення для диференціального виразу

$$\frac{dy}{dx} = l[u, p, v; \lambda]\, y \tag{4}$$

у просторі функцій $L_\infty(R; C^2)$, де, за визначенням, $l[u, p, v; \lambda] = -b^{(x)}[u, p, v; \lambda]$ і $\lambda \in C$ — відповідний спектральний параметр. Співвідношення (4) є сумісним на множині розв'язків динамічної системи (1) за Лаксом з лінійним рівнянням

$$\frac{dy}{dt} = P(l)\, y, \tag{4$'$}$$

де $P(l) = -b^{(t)}[u, p, v; \lambda]$. Будемо також вважати, що на інтегральному многовиді M^2_α відповідні функції $(u, p, v)\colon M^2_\alpha \to R^3$ є гладкими і 2π-періодичними по відношенню до змінних $x, t \in R$, тобто многовид M^2_α є зв'язним компактним підмноговидом в $J(R^2; R^3)$, дифеоморфним тору T^2. На основі загальної теорії [3] спектральних задач типу (4) визначимо власні функції як власні вектори відповідної матриці монодромії $S(x; \lambda)$, $x \in R/2\pi Z$, із власними значеннями ± 1. Нехай $\sigma_r(l) = \{\lambda_j \in R\colon j = \overline{1, n}\}$ — дійсна частина узагальненого спектра $\sigma(l)$ періодичної задачі (5), якому відповідає набір 2π-періодичних власних функцій $y_j \in L_\infty(R; C^2)$, $j = \overline{1, N}$, де $N \in Z_+$ — деяке фіксоване число. Тоді, очевидно, справджуються рівняння

$$\frac{dy_j}{dt} = l[u, p, v; \lambda_j]\, y_j, \qquad y_j(x + 2\pi) = y_j(x), \tag{5}$$

для всіх $x \in R$, $j = \overline{1, N}$. З умови узгодженості зв'язності (2) на підмноговиді M^2_α для всіх $\lambda \in C$ випливає, що узагальнені власні значення $\lambda_j \in C$, $j = \overline{1, N}$, розглядувані як гладкі за Фреше функціонали на просторі функцій $M \in C^\infty(R/2\pi Z; R^3)$, є інваріантними по відношенню до еволюційного параметра $t \in R$, тобто для всіх $j = \overline{1, N}$, $\frac{d\lambda_j}{dt} = 0$. Це дає можливість за допомогою теорії редукції Новікова – Богоявленського [4, 5] розглянути інваріантні скінченновимірні підмноговиди на M та відповідні динамічні системи на них, асоційовані з вихідною інверсною динамічною системою типу КдФ (1). У працях [6, 7] для інтегровної за Лаксом бігамільтонової динамічної системи, заданої на періодичному функціональному многовиді M, розроблено метод редукції типу Новікова – Богоявленського [4] на підмноговид критичних точок інваріантного функціонала, що є скінченною лінійною комбінацією її локальних законів збереження та власних значень відповідної спектральної задачі як її нелокальних законів збереження. Виявлено, що такі інваріантні скінченновимірні підмноговиди розв'язків мають симплектичну структуру, а векторні поля d/dx та d/dt, породжені на многовиді M нелінійною динамічною системою, гамільтонові на них відносно цієї симплектичної структури.

3. Застосуємо згаданий метод редукції типу Новікова – Богоявленського для системи (1), яка у бігамільтоновій формі має вигляд

$$w_t = -\theta \operatorname{grad} \gamma_{j+1} = -\eta \operatorname{grad} \gamma_j,$$

де $w = (u, p, v)^\top \in M$, $\gamma_j \in D(M)$, $j \in Z_+$, — нескінченна послідовність інволютивних законів збереження ($D(M)$ — простір гладких за Фреше функціоналів на M):

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(p - \frac{u^2}{2}\right)dx, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{9}\int_0^{2\pi}\left(\frac{v^2}{2} - up + \frac{u^3}{3}\right)dx,$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{18}\int_0^{2\pi}\left(u^2 p - p^2 - \frac{u^4}{4} - uv_x + u_x v\right)dx, \ \ldots,$$

а θ, η — пара узгоджених за Магрі [3] імплектичних операторів

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \partial & -u \\ 1 & u & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial - \frac{1}{3}v & -\frac{1}{3}u \\ \partial + \frac{1}{3}v & \frac{2}{3}(\partial u + u\partial) & \frac{1}{3}(p - u^2) \\ \frac{1}{3}u & \frac{1}{3}(u^2 - p) & -\partial \end{pmatrix},$$

і дослідимо диференціально-геометричні властивості інваріантного підмноговиду $M_N \subset M$ динамічної системи (1):

$$M_N := \{(u, p, v) \in M : \operatorname{grad} \mathcal{L}_N[u, p, v] = 0\}, \tag{6}$$

де, за визначенням, функціонал Лагранжа $\mathcal{L}_N$ на M має вигляд

$$\mathcal{L}_N := -\gamma_2 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j.$$

Оскільки функціонал $\gamma_2 \in D(M)$ є теж інваріантом динамічної системи (1) на M, для підмноговиду M_N справедливою є така лема.

***Лема* 1.** *Підмноговид* (6) *є інваріантним по відношенню до динамічної системи* (1) *на* M.

Доведення. Оскільки многовид M_N складається із критичних точок інваріантного функціонала $\mathcal{L}_N \in D(M)$, згідно з теоремою Лакса [3], величина $\varphi := \operatorname{grad} \mathcal{L}_N \in T^*(M)$ задовольняє для всіх $t \in \boldsymbol{R}$ лінійне рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} + K'^*[w] \cdot \varphi = 0 \tag{7}$$

для будь-якої точки $w = (u, p, v)^\top \in M$. Покладаючи тепер $(u_0, p_0, v_0) = w_0 \in \in M_N$, знаходимо, що коли при $t = 0$ $\varphi = 0$, то внаслідок лінійності рівняння (7) $\varphi \equiv 0$ для всіх $t \in \boldsymbol{R}$. Останнє означає, що вздовж орбіт динамічної системи (1) $\varphi = \operatorname{grad} \mathcal{L}_N \equiv 0$, тобто елемент $w(t; w_0) \in M_N$ для всіх $t \in \boldsymbol{R}$, що і доводить лему.

Отже, внаслідок інваріантності підмноговиду $M_N \subset M$ ми можемо редукувати векторне поле (1) на підмноговид M_N, до якого воно є дотичним. Результуюче векторне поле $K_N[w] \in T(M_N)$ буде, очевидно, скінченновимірним потоком на M_N, який допускає канонічний запис як система звичайних нелінійних диференціальних рівнянь у термінах відповідних координатних функцій на M_N. Їх описом і явним знаходженням ми й займемося далі.

При побудові підмноговиду M_N (6) необхідно отримати величини $\operatorname{grad}\lambda_j \in T^*(M)$, $j = \overline{1, N}$, як нелокальні функціонали. З цією метою розглянемо нелокальне розширення фазового простору за допомогою координат $(y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*) \in W_2^1$, $j = \overline{1, N}$, де $(y_{1,j}, y_{1,j}^*)^\top$ та $(y_{2,j}, y_{2,j}^*)^\top$, $j = \overline{1, N}$, — відповідні періодичні власні функції матриці монодромії $S(x; \lambda)$ задачі (5). Покладаючи тепер так обчислений функціонал $\operatorname{Sp} S(x; \lambda) = \Delta(\lambda)$, який є породжуючим функціоналом для законів збереження динамічної системи (1), можемо знайти нормуючі коефіцієнти $\xi(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} = \operatorname{Sp}\int_0^{2\pi} S(x; \lambda)\frac{d}{d\lambda} l[u, p, v; \lambda]|_{\lambda=\lambda_j} dx$ відповідних нелокальних законів збереження. Матриця $S(x; \lambda)$, як відомо [5, 8], допускає зображення у вигляді $S(x; \lambda) = YC(\lambda)Y^{-1}$ із деякою сталою матрицею $C(\lambda)$, $\lambda \in C$, де $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^* & y_2^* \end{pmatrix}$. Покладаючи для зручності $C(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, отримуємо нормуючі функціонали

$$\xi(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} = \operatorname{Sp}\int_0^{2\pi} S(x; \lambda)\frac{d}{d\lambda} l[u, p, v; \lambda]|_{\lambda=\lambda_j} dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{u}{3} - 3\lambda_j^2\right)\left(y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{1,j}^*\right) + 4\lambda_j y_{1,j} y_{2,j} - 2y_{1,j}^* y_{2,j}^* \left(\frac{\lambda_j u}{3} - \frac{v}{6}\right)\right] dx, \quad (8)$$

які є визначальними для побудови нелокальних функціоналів $\lambda_j = \lambda_j[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*]$, $j = \overline{1, N}$, на вже розширеному просторі $\overline{M}_N$. З цією метою запишемо систему(4) у явному вигляді для лінійно незалежної пари розв'язків $(y_{1,j}, y_{1,j}^*)^\top$, $(y_{2,j}, y_{2,j}^*)^\top$:

$$\begin{aligned} y_{1,x} &= \left(\frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda u}{6} + \frac{v}{6}\right) y_1 + \left(\frac{\lambda^2 u}{6} + \frac{p}{6} - \frac{\lambda v}{6} - \frac{u^2}{18}\right) y_1^*, \\ y_{1,x}^* &= \left(\lambda^2 - \frac{u}{3}\right) y_1 + \left(-\frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda u}{6} - \frac{v}{6}\right) y_1^*, \\ y_{2,x} &= \left(\frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda u}{6} + \frac{v}{6}\right) y_2 + \left(\frac{\lambda^2 u}{6} + \frac{p}{6} - \frac{\lambda v}{6} - \frac{u^2}{18}\right) y_2^*, \\ y_{2,x}^* &= \left(\lambda^2 - \frac{u}{3}\right) y_2 + \left(-\frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda u}{6} - \frac{v}{6}\right) y_2^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Помноживши у системі (9) перше рівняння на y_2^*, друге — на $(-y_2)$, третє — на y_1^* і четверте — на $(-y_1)$, додавши їх почленно і проінтегрувавши за періодом, отримаємо

$$2\int_0^{2\pi} \left(y_1 y_{2,x}^* + y_2 y_{1,x}^*\right) dx = \int_0^{2\pi} \left[\lambda\left(\frac{u}{3} - 3\lambda^2\right)\left(y_1 y_2^* + y_2 y_1^*\right) + \left(2\lambda^3 - \frac{v}{3}\right)\left(y_1 y_2^* + y_2 y_1^*\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\lambda^2 u}{3} + \frac{p}{3} - \frac{\lambda v}{3} - \frac{u^2}{9}\right) y_1^* y_2^* + 2\left(\lambda^2 - \frac{u}{3}\right) y_1 y_2\right] dx. \quad (10)$$

Оскільки $\xi(\lambda)$ в (8) є інваріантом за означенням, то з рівності (10) отримуємо

$$\lambda\frac{\xi(\lambda)}{2} = \int_0^{2\pi}\left[\left(y_1 y_{2,x}^* + y_2 y_{1,x}^*\right) + \left(\lambda^2 + \frac{u}{3}\right)y_1 y_2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{v}{6} - \lambda^3\right)\left(y_1 y_2^* + y_2 y_1^*\right) + \left(\frac{p}{6} - \frac{\lambda^2 u}{6} - \frac{u^2}{18}\right)y_1^* y_2^*\right]dx. \tag{11}$$

Враховуючи, що функціонали $\xi(\lambda_j)$, $j=\overline{1,N}$, є інваріантами динамічної системи (1), їх можна віднормувати одиницею, тобто покласти $\tilde{\xi}(\lambda_j) = \xi(\lambda_j)/2 \equiv 1$, $j=\overline{1,N}$. Тоді з (11) отримаємо

$$\lambda_j = \int_0^{2\pi}\left[y_{1,j} y_{(2,j)x}^* + y_{2,j} y_{(1,j)x}^* + \left(\lambda_j^2 + \frac{u}{3}\right)y_{1,j} y_{2,j} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{v}{6} - \lambda_j^3\right)\left(y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{1,j}^*\right) + \left(\frac{p}{6} - \frac{\lambda_j^2 u}{6} - \frac{u^2}{18}\right)y_{1,j}^* y_{2,j}^*\right]dx. \tag{12}$$

4. Використовуючи явний вираз (12) для функціоналів $\lambda_j \in D(M)$, $j=\overline{1,N}$, легко знаходимо

$$\operatorname{grad}\lambda_j = \left(\frac{1}{3}y_{1,j}y_{2,j} - \left(\frac{1}{6}\lambda_j^2 + \frac{u}{9}\right)y_{1,j}^* y_{2,j}^*,\ \frac{1}{6}y_{1,j}^* y_{2,j}^*,\ \frac{1}{6}\left(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{2,j}y_{1,j}^*\right)\right)^{\top} \in$$

$$\in T^*(M). \tag{13}$$

Тепер підмноговид (6) можна записати так:

$$M_N = \left\{(u, p, v) \in M : u = -\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^*,\right.$$

$$\left. p = u^2 + \frac{3}{2}\left(\lambda_j^2 + \frac{2u}{3}\right)\sum_{j=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^* - 3y_{1,j}y_{2,j},\ v = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{1,j}^* y_{2,j}\right)\right\}. \tag{14}$$

Розглянемо власні значення $\lambda_j = \lambda_j[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*]$, $j=\overline{1,N}$, як нелокальні функціонали на розширеному функціональному просторі $\overline{M}_N \subset M \times \times W^N$ (тут W^N — декартів степінь порядку N простору W),

$$\overline{M}_N := \left\{(u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*)^{\top} \in M \times W^N :\right.$$

$$\left.\operatorname{grad}\overline{\mathcal{L}}_N[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*] = 0\right\},$$

$$\overline{\mathcal{L}}_N = -\gamma_2 + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j + \sum_{j=1}^{N}s_j(\tilde{\xi}(\lambda_i) - 1),$$

де $s_j \in \boldsymbol{R}$, $j=\overline{1,N}$, — деякі невідомі. Для знаходження s_j, $j=\overline{1,N}$, скориставшись рівністю $\operatorname{grad}\overline{\mathcal{L}}_N[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*] = 0$ і рівняннями (9), при $\lambda = \lambda_j$, $j=\overline{1,N}$, одержимо

$$\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y_{1,j}} = y_{(2,j)x}^* + \left(\lambda_j^2 + \frac{u}{3}\right)y_{2,j} + \left(\frac{v}{6} - \lambda_j^3\right)y_{(2,j)x}^* + s_j\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u}{3} - 3\lambda_j^2\right)y_{(2,j)x}^* + 2\lambda_j y_{2,j}\right] = 0,$$

$$\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y_{2,j}} = y^*_{(1,j)x} + \left(\lambda_j^2 + \frac{u}{3}\right)y_{1,j} + \left(\frac{v}{6} - \lambda_j^3\right)y^*_{1,j} + s_j\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u}{3} - 3\lambda_j^2\right)y^*_{(1,j)x} + 2\lambda_j y_{1,j}\right] = 0,$$

$$\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y^*_{1,j}} = -y_{(2,j)x} + \left(\frac{v}{6} - \lambda_j^3\right)y_{2,j} + \left(\frac{p}{6} - \frac{\lambda_j^2 u}{6} - \frac{u^2}{18}\right)y^*_{2,j} +$$

$$+ s_j\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u}{3} - 3\lambda_j^2\right)y_{2,j} - \left(\frac{\lambda_j u}{3} - \frac{v}{6}\right)y^*_{2,j}\right] = 0,$$

$$\frac{\delta\overline{\mathcal{L}}_N}{\delta y^*_{2,j}} = -y_{(1,j)x} + \left(\frac{v}{6} - \lambda_j^3\right)y_{1,j} + \left(\frac{p}{6} - \frac{\lambda_j^2 u}{6} - \frac{u^2}{18}\right)y^*_{1,j} +$$

$$+ s_j\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u}{3} - 3\lambda_j^2\right)y_{1,j} - \left(\frac{\lambda_j u}{3} - \frac{v}{6}\right)y^*_{1,j}\right] = 0.$$

Звідси знаходимо $s_j = \lambda_j$, $j = \overline{1, N}$. Згідно з [6, 7] на $\overline{M}_N$ існує симплектична структура $\omega^{(2)} = d\overline{\alpha}^{(1)}$ така, що

$$\frac{d\overline{\alpha}^{(1)}}{dx} = d\overline{\mathcal{L}}_N[u, p, v, y_{1,j}, y^*_{1,j}, y_{2,j}, y^*_{2,j}] -$$

$$- \left\langle \operatorname{grad}\overline{\mathcal{L}}_N[u, p, v, y_{1,j}, y^*_{1,j}, y_{2,j}, y^*_{2,j}], \left(du, dp, dv, dy_{1,j}, dy^*_{1,j}, dy_{2,j}, dy^*_{2,j}\right)^{\top}\right\rangle,$$

де дужки $\langle \ldots \rangle$ позначають звичайний скалярний добуток дійсного простору.

Лема 2. *Інваріантний скінченновимірний підмноговид* $\overline{M}_N$ *з координатами* $\left(y_{1,j}, y^*_{1,j}, y_{2,j}, y^*_{2,j}\right)^{\top}$, $j = \overline{1, N}$, *розширеної динамічної системи* (1), (4′) *при* $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, N}$, *має інваріантну канонічну симплектичну структуру*

$$\omega^{(2)} = \sum_{j=1}^{N}\left(dy_{1,j} \wedge y^*_{2,j} + y_{2,j} \wedge y^*_{1,j}\right). \tag{15}$$

Згідно з методом Дірака [9] 2-форма (15) задає також канонічну симплектичну структуру на інваріантному $2N$-вимірному підмноговиді $M_N \subset \overline{M}_N$ системи (1). В'язі (14), що визначають підмноговид $M_N \subset \overline{M}_N$, не змінюють вигляду канонічної симплектичної структури (15) на інваріантному $2N$-вимірному підмноговиді M_N системи (1).

Переконаємось, що векторні поля d/dx та d/dt, породжені інверсною динамічною системою (1) на розширеному підмноговиді $\overline{M}_N$, є гамільтоновими з гамільтоніанами відповідно $\overline{h}^{(x)}$ і $\overline{h}^{(t)}$:

$$\overline{h}^{(x)} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3\left(y_{1,j}y^*_{2,j} + y^*_{1,j}y_{2,j}\right) + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 y_{1,j}y_{2,j} - \frac{1}{6}u\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 y^*_{1,j}y^*_{2,j} +$$

$$+ \frac{1}{6}u\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left(y_{1,j}y^*_{2,j} + y_{2,j}y^*_{1,j}\right) + \frac{1}{6}v\sum_{j=1}^{N}\lambda_j y^*_{1,j}y^*_{2,j} + \frac{1}{3}u\sum_{j=1}^{N}y_{1,j}y_{2,j} -$$

$$- \frac{1}{6}v\sum_{j=1}^{N}\left(y_{1,j}y^*_{2,j} + y_{2,j}y^*_{1,j}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}u^2 - p\right)\sum_{j=1}^{N}y^*_{1,j}y^*_{2,j} + \frac{1}{27}u^3 - \frac{1}{9}up + \frac{1}{18}v^2, \tag{16}$$

$$\bar{h}^{(t)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j\left(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{1,j}^*y_{2,j}\right) - \sum_{j=1}^{N} y_{1,j}y_{2,j} - \frac{1}{6}u\sum_{j=1}^{N} y_{1,j}^*y_{2,j}^* - \frac{1}{9}u^2. \quad (17)$$

Останні визначають при $j = \overline{1, N}$ з таких нерівностей:

$$-\frac{d\bar{h}^{(x)}}{dx} = \left\langle \operatorname{grad} \bar{\mathcal{L}}_N\left[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*\right], \left(u_x, p_x, v_x, y_{(1,j)x}, y_{(1,j)x}^*, y_{(2,j)x}, y_{(2,j)x}^*\right)^{\mathsf{T}}\right\rangle,$$

$$-\frac{d\bar{h}^{(t)}}{dx} = \left\langle \operatorname{grad} \bar{\mathcal{L}}_N\left[u, p, v, y_{1,j}, y_{1,j}^*, y_{2,j}, y_{2,j}^*\right], \left(u_t, p_t, v_t, y_{(1,j)t}, y_{(1,j)t}^*, y_{(2,j)t}, y_{(2,j)t}^*\right)^{\mathsf{T}}\right\rangle.$$

На підмноговиді $M_N \subset \overline{M}_N$ для функціоналів (16) та (17) отримуємо

$$h^{(x)} = \bar{h}^{(x)}\Big|_{M_N} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3\left(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{1,j}^*y_{2,j}\right) + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 y_{1,j}y_{2,j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} y_{1,j}y_{2,j}y_{1,k}^*y_{2,k} +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{N}\lambda_j^2 y_{1,j}^*y_{2,j}^*y_{1,k}^*y_{2,k}^* - \frac{1}{8}\sum_{j,k=1}^{N}\left(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{2,j}y_{1,j}^*\right)\left(y_{1,k}y_{2,k}^* + y_{2,k}y_{1,k}^*\right),$$

$$h^{(t)} = \bar{h}^{(t)}\Big|_{M_N} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3\left(y_{1,j}y_{2,j}^* - y_{1,j}^*y_{2,j}\right) - \sum_{j=1}^{N} y_{1,j}y_{2,j} + \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{N} y_{1,j}^*y_{2,j}^*y_{1,k}^*y_{2,k}^* -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{N} y_{1,j}^*y_{2,j}^*y_{1,k}^*y_{2,k}^*.$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 1. *На* $2N$*-вимірному симплектичному многовиді* $M_N \subset M$ *векторні поля* d/dx *та* d/dt *у вигляді* (4), (4′) *при* $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, N}$, *гамільтонові відносно канонічної симплектичної структури* (15) *з гамільтоніанами* $h^{(x)}$ *і* $h^{(t)}$ *відповідно.*

5. Підмноговид M_N є підмноговидом стаціонарних точок $\overline{M}_N$ динамічної системи за деяким еволюційним параметром $\tau \in \boldsymbol{R}$

$$w_\tau = -\theta\left(\operatorname{grad}\gamma_2 - \operatorname{grad}\sum_{j=1}^{N} c_j\lambda_j\right),$$

на якому координати розв'язку (u, p, v) мають вигляд

$$u = -\frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N} y_{1,j}^*y_{2,j}^*,$$

$$p = \frac{3}{4}\sum_{j,k=1}^{N} y_{1,j}^*y_{2,j}^*y_{1,k}^*y_{2,k}^* + \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 y_{1,j}^*y_{2,j}^* - 3\sum_{j=1}^{N} y_{1,j}y_{2,j},$$

$$v = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(y_{1,j}y_{2,j}^* + y_{1,j}^*y_{2,j}\right).$$

Тоді для зображень Лакса векторних полів d/dx та d/dt на $\overline{M}_N$, а отже, і на M_N отримаємо

$$\frac{dS}{dx} = [l, S], \quad (18)$$

$$\frac{dS}{dt} = [P(l), S]. \tag{19}$$

Рівняння (18), (19) задовольняє матриця монодромії [10] $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -S_{11} \end{pmatrix}$ спектральної задачі (4), градієнт сліду якої

$$\varphi(\lambda) = \operatorname{grad} \operatorname{tr} S = \left(\frac{1}{3}\lambda S_{11} + \frac{1}{3}S_{12} + \left(\frac{1}{9}u - \frac{1}{6}\lambda^2\right)S_{21},\ -\frac{1}{6}S_{21},\ \frac{1}{6}\lambda S_{21} - \frac{1}{3}S_{11}\right)^{\top}$$

породжує градієнти законів збереження інверсної системи (1):

$$\varphi(\lambda) \cong \varphi_1\lambda + \varphi_2 + \sum_{i\in Z_+} \varphi_{i+2}\lambda^{-i}, \quad \varphi_i = \operatorname{grad}\gamma_i, \quad i \in \boldsymbol{Z}_+, \quad |\lambda| \to \infty.$$

На підмноговиді M_N градієнти законів збереження для системи (1) набирають вигляду

$$\varphi_2 = \left(\frac{1}{6}\sum_{j,k=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^* y_{1,k}^* y_{2,k}^* - \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2 y_{1,j} y_{2,j}^* + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N} y_{1,j} y_{2,j},\right.$$
$$\left.\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^*,\ \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N}\left(y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{1,j}^*\right)\right)^{\top},$$

$$\varphi_{i+1} = (\theta^{-1}\eta)\varphi_i = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{i-1}\left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^* y_{1,k}^* y_{2,k}^* - \frac{1}{6}\lambda_j^2 y_{1,j} y_{2,j}^* + \frac{1}{3} y_{1,j} y_{2,j}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{i-1} y_{1,j}^* y_{2,j}^*,\ \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{i-1}\left(y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{2,j} y_{1,j}^*\right)\right)^{\top}, \quad i \geq 2.$$

Отже, для матриці монодромії $S_N := S\big|_{M_N}$, редукованої на підмноговид M_N, маємо

$$S_N = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_j}\begin{pmatrix} -y_{1,j}^* y_{2,j}^* & y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{1,j}^* y_{2,j} \\ 0 & y_{1,j}^* y_{2,j}^* \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2} y_{1,j}^* y_{2,j}^* \\ -2 & 0 \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_j}\begin{pmatrix} y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{1,j}^* y_{2,j} & \lambda_j^2 y_{1,j}^* y_{2,j}^* - 2y_{1,j} y_{2,j} \\ 2y_{1,j}^* y_{2,j}^* & -(y_{1,j} y_{2,j}^* + y_{1,j}^* y_{2,j}) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Коефіцієнти розкладу функціонала $\Phi(x;\lambda) := (\operatorname{tr} S_N^2)/2 = S_{11}^2 + S_{12}S_{21}$ задають множину N функціонально незалежних законів збереження $\Phi_j \in D(M_N)$ векторних полів d/dx та d/dt на M_N:

$$\Phi(x;\lambda) = \lambda^2 + \sum_{j=1}^{N}\frac{\Phi_j}{\lambda-\lambda_j} - \sum_{j=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^*,$$

де

$$\Phi_j = 2\lambda_j^2 y_{1,j}^* y_{2,j}^* - 2y_{1,j} y_{2,j} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} y_{1,j}^* y_{2,j}^* y_{1,k}^* y_{2,k}^* +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}\left(3\lambda_j^2 y_{1,j}^* y_{2,j}^* y_{1,k}^* y_{2,k}^* + \left(y_{1,j} y_{2,j}^* - y_{1,j}^* y_{2,j}\right)\left(y_{1,k} y_{2,k}^* - y_{1,k}^* y_{2,k}\right)\right)\right). \tag{21}$$

Закони збереження (21) інволютивні відносно дужки Пуассона $\{.,.\}_{\omega^{(2)}}$, породженої симплектичною структурою (15), тобто

$$\{\Phi_j, \Phi_k\}_{\omega^{(2)}} = \{\Phi_k, \Phi_j\}_{\omega^{(2)}}, \quad j, k = \overline{1, N},$$

що доводить інтегровність за Ліувіллем векторних полів d/dx та d/dt на M_N.

Теорема 2. *На* $2N$*-вимірному симплектичному підмноговиді* $M_N \subset M$ *векторні поля* d/dx *та* d/dt *у вигляді* (4), (4′) *при* $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1, N}$, *мають зображення Лакса* (18) *і* (19) *відповідно з матрицею* S_N (20) *та інтегровні за Ліувіллем.*

1. *Prytula M., Samoylenko V., Suyarov U.* The complete integrability analysis of the inverse Korteweg – de Vries equation (inv KdV) // Nonlinear Vibration Problems (Warshawa). – 1993. – **25**. – P. 411 – 422.
2. *Притула М. М., Прикарпатський А. К., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем. – Київ: УМК ВО, 1988. – 87 с.
3. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
4. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 1. – С. 9 – 13.
5. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
6. *Prykarpatsky A., Blackmore D., Strampp W., Sydorenko Yu., Samuliak R.* Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalism // Condensed Matter Phys. – 1995. – № 6. – P. 79 – 104.
7. *Prykarpatsky A., Hentosh O., Kopych M., Samuliak R.* Neumann – Bogoliubov – Rosochatius oscillatory dynamical systems and their integrability viadual moment maps // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**, № 2. – P. 98 – 113.
8. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 260 с.
9. *Dirac P. A. M.* Generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math. – 1950. – **2**, № 2. – P. 129 – 148.
10. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys. – 1978. – **19**, № 3. – P. 1156 – 1162.

Одержано 07.10.2002