УДК 517.9

Ю. Н. Бернацкая (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев; Ин-т прикл. систем. анализа)

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СНОСОМ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

We construct the fundamental solution of a parabolic equation with drift on the Riemannian manifold with nonpositive curvature by using the perturbation method on the basis of a solution of equation without drift. We establish conditions for the drift field, under which this method is applicable.

Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння зі зсувом на рімановому многовиді недодатної кривини побудовано методом збурення, виходячи з розв'язку рівняння без зсуву. Визначено умови на поле зсуву, за яких цей метод можна застосувати.

1. Постановка задачи. На полном односвязном n-мерном римановом многообразии $\mathcal{M}$ с метрикой $\rho(x, y)$ и объемом σ рассматривается параболическое уравнение со сносом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \langle \operatorname{grad} u, b(x) \rangle, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами, который через ортобазис $\{e_k\}$ в $T_x\mathcal{M}$ определяется следующим образом:

$$\Delta u \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \sum_k \left\langle \nabla_{e_k} \operatorname{grad} u, e_k \right\rangle.$$

Поле сноса $b(x)$ является векторным полем на $\mathcal{M}$.

Фундаментальное решение (1), которое будем обозначать $p(t, x, y)$, построим методом возмущений, выбрав в качестве начального приближения функцию

$$m(t, x, y) = p_0(t, x, y) e^{\psi(x, y)},$$

где

$$\psi(x, y) = -\int_0^{\rho(x, y)} \langle b(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s) \rangle \, ds,$$

γ — геодезическая, соединяющая точки x и y так, что $x = \gamma(\rho)$, $y = \gamma(0)$, $p_0(t, x, y)$ — построенное в [1] ядро теплопроводности уравнения без сноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u. \tag{2}$$

Фундаментальное решение ищется в виде

$$p(t, x, y) = m(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} m(t-\tau, x, z)\, r(\tau, z, y)\, \sigma(dz),$$

где функция $r(t, x, y)$ — решение уравнения Вольтерра

$$r(t, x, y) = M(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} M(t-\tau, x, z)\, r(\tau, z, y)\, \sigma(dz), \tag{3}$$

а $M(t, x, y)$ — невязка уравнения (1) при начальном приближении $m(t, x, y)$.

Замечание. Если в качестве начального приближения выбрать $p_0(t, x, y)$, то

$$M(t, x, y) = \left\langle \operatorname{grad} p_0(t, x, y), b(x) \right\rangle =$$
$$= \left\langle -\frac{\rho(x, y)}{t}\,\dot{\gamma}(x) + w(t, x, y), b(x) \right\rangle p_0(t, x, y),$$

где использовано полученное в [2] представление для градиента ядра теплопроводности, причем векторное поле $w(t, x, y)$ ограничено, пусть $\|w(t, x, y)\| \le c_1$. Т. е. невязка имеет интегрируемую по t особенность и построенное таким образом ядро теплопроводности

$$p(t, x, y) \le \left(1 - (1-\varepsilon)^{n/2} + c c_2 \sqrt{2\pi} e^{\bar{c}^2 t} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\bar{c}}\right)\right) q_\varepsilon(t, x, y),$$

где

$$q_\varepsilon(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x, y)}{2t}\right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Множитель $e^{\psi(x, y)}$ улучшает начальное приближение.

2. Условия и необходимые сведения. В [1] ядро теплопроводности $p_0(t, x, y)$ построено при определенных условиях на многообразие $\mathcal{M}$, которые формулируются в терминах тензора кривизны $R(x)$ [3]:

1а) $\langle R(x)(U, V)U, V\rangle \ge 0$ для всех $x \in \mathcal{M}$, $U, V \in T_x\mathcal{M}$, т. е. секционная кривизна многообразия неположительна;

1б) для произвольных ортобазисов $\{e_k\}$, $\{h_k\}$ в $T_x\mathcal{M}$

$$\sum_k \left|\left\langle R(x)(U, e_k)V, h_k\right\rangle\right| \le c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)\langle U, U\rangle \operatorname{Ric}(x)\langle V, V\rangle},$$

а константа c не зависит от x;

1в) вдоль любой геодезической γ скалярная кривизна убывает достаточно быстро, т. е. $\int_0^\infty s r(\gamma(s))\, ds < c$, где c не зависит от γ;

1г) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам

$$\left\|\left(\nabla_{X(s)} R\right)(\varphi(s))(Y(s), \dot{\varphi}(s))Z(s)\right\| \le f_1(\varphi(s))\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|,$$

$$\left\|\nabla_{U(s)}\nabla_{X(s)} R(\varphi(s))(Y(s), \dot{\varphi}(s))Z(s)\right\| \le f_2(\varphi(s))\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|\|U(s)\|,$$

где функции f_1 и f_2 такие, что вдоль любой геодезической γ выполняется неравенство $\int_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))\, ds < c$ и c не зависит от γ.

Тензор Риччи и скалярная кривизна вводятся соответственно с помощью формул (отличаются от общепринятых знаком)

$$\operatorname{Ric}(x)(U, V) = \sum_{k=1}^n \left\langle R(x)(U, e_k)V, e_k\right\rangle$$

и

$$r(x) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(x).$$

На поле сноса $b(x)$ также наложим некоторые условия. Рассмотрим случай сильных и слабых ограничений. Сильные ограничения формулируются следующим образом:

2а) вдоль любой геодезической $\gamma(s)$

$$\int_0^\rho \left\| b(\gamma(s)) \right\| ds \leq c_2;$$

2б) для любого векторного поля $h(x)$, $\|h\| < c$, вдоль любой геодезической $\gamma(s)$ выполняется

$$\int_0^\rho \left\| \nabla_{h(\gamma(s))} b(\gamma(s)) \right\| ds \leq c_3;$$

2в) для любых векторных полей $h_1(x)$ и $h_2(x)$, $\|h_1(x)\| < c$, $\|h_2(x)\| < c$, вдоль любой геодезической $\gamma(s)$ имеет место

$$\int_0^\rho \left\| \nabla_{h_1(\gamma(s))} \nabla_{h_2(\gamma(s))} b(\gamma(s)) \right\| ds \leq c_4,$$

а слабые —

2'а) $\|b(x)\| \leq c_2'$;

2'б) $\left\|\nabla_{h_1} b(x)\right\| \leq c_3'$ в произвольном направлении $h \in T_x\mathcal{M}$;

2'в) $\left\|\nabla_{h_2}\nabla_{h_1} b(x)\right\| \leq c_4'$ в произвольных направлениях h_1 и $h_2 \in T_x\mathcal{M}$.

Определение 1. *Базисными полями Якоби вдоль геодезической* γ, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho) = x$, *называются* n *решений* $Z_1(s), \ldots, Z_n(s)$ *уравнения Якоби*

$$Z''(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\dot\gamma(s),$$

где $Z'(s) = \nabla_{\dot\gamma(s)} Z(s)$ *такие, что* $Z_k(0) = 0$, $Z_k(\rho)$ *образуют в* $T_x\mathcal{M}$ *полугеодезический ортобазис* (*т. е.* $Z_1(s) = \frac{s}{\rho}\dot\gamma(s)$, $Z_k(s) \perp \dot\gamma(s)$).

Достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения Якоби является неположительность кривизны $\mathcal{M}$.

***Замечание* 1.** Для $0 < s < \rho$ базисные поля Якоби образуют базис в $T_{\gamma(s)}\mathcal{M}$.

Укажем свойства полей Якоби [3].

Утверждение 1. *Если* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию* 1а) *и* $Z(0) = 0$, *то выполняются неравенства*

$$\|Z'(0)\| \leq \frac{\|Z(\tau)\|}{\tau} \leq \frac{\|Z(s)\|}{s}, \quad 0 < \tau < s,$$

$$s^2 \|Z'(s)\|^2 \geq s\langle Z'(s), Z(s)\rangle \geq \|Z(s)\|^2.$$

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условиям* 1а) *и* 1б). *Рассмотрим* $\int_{\mathcal{M}} f(y)\sigma(dy)$, *где* σ — *объем на многообразии,* f — *интегрируемая на* $\mathcal{M}$ *функция. Тогда замена* $y = \operatorname{Exp}_x U$, $U = \rho(x,y)e(x,y)$ *приводит к равенству*

$$\int_{\mathcal{M}} f(y)\sigma(dy) = \int_{T_x\mathcal{M}} f(\operatorname{Exp}_x U) J(x, U)\sigma_x(dU),$$

где σ_x — *объем на* $T_x\mathcal{M}$, *а якобиан* $1 \le J(x, U) < c$.

Утверждение 3. *Пусть на многообразии неположительной кривизны опр... делены поля Якоби* $X(s) \perp \dot\gamma(s)$, $Z(s) \perp \dot\gamma(s)$, $X(0) = Z(0) = 0$, $\|Z(p)\| =$ ... *Тогда имеет место представление*

$$\nabla_X Z(s) = -\langle X'(s), Z(s)\rangle \dot\gamma(s) + H(s),$$

где $H(s) \perp \dot\gamma(s)$, *и справедлива оценка*

$$\|H(s)\| \le (\rho - s)\int_0^\rho \|f(\tau, X(\tau), Z(\tau))\|\, d\tau,$$

а векторное поле f *определяется формулой*

$$f(s, X(s), Z(s)) = 2R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))Z'(s) + 2R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))X'(s) +$$
$$+ (\nabla_X R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\dot\gamma(s) + (\nabla_{\dot\gamma} R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))Z(s).$$

3. Основные результаты.

Лемма 1. *Если выполнены условия* 1а) – 1г) *и* 2а) – 2в), *то* $\|\mathrm{grad}_x \psi(x, y)\|$ *и* $|\Delta\psi(x, y)|$ *ограничены константой.*

Доказательство. Очевидно, из условия 2а) вытекает 2′а). Для доказательства леммы достаточно более слабого условия.

Разложим $\mathrm{grad}\,\psi(x, y)$ по базису, которым будут базисные поля Якоби $Z_k(s)$, $Z_k(0) = 0$, $Z_k(\rho) = e_k$, определенные вдоль геодезической $\gamma(s)$:

$$\|\mathrm{grad}_x \psi(x, y)\|^2 = \langle \mathrm{grad}_x \psi(x, y), \dot\gamma(x)\rangle^2 + \sum_{k=2}^{n} \langle \mathrm{grad}_x \psi(x, y), e_k\rangle^2.$$

Чтобы найти производную $\psi(x, y)$ в направлении h, необходимо запустить в этом направлении кривую $\alpha(\varepsilon)$, $\alpha(0) = x$, $\dot\alpha(0) = h$, и вдоль этой кривой построить вариацию $\varphi(s, \varepsilon)$ геодезической $\gamma(s)$. Если $h \perp \dot\gamma(\rho)$, то производная определяется так:

$$\langle \mathrm{grad}_x \psi(x, y), h\rangle = \frac{d}{d\varepsilon}\left[-\int_0^\rho \langle b(\varphi(s, \varepsilon)), \dot\varphi(s, \varepsilon)\rangle\, ds\right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= -\langle b(x), h\rangle + \int_0^\rho \left(\left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z(s)\right\rangle - \left\langle \nabla_{Z(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\right\rangle\right) ds, \quad (4$$

где

$$Z(s) = \left.\frac{\partial\varphi(s, \tau+\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

— поле Якоби вдоль $\gamma(s)$, порожденное вариацией $\varphi(s, \varepsilon)$, такое, что $Z(0) = 0$, $Z(\rho) = h$. Производная в направлении $\dot\gamma(x)$ имеет вид

$$\langle \mathrm{grad}_x \psi(x, y), \dot\gamma(x)\rangle =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\left[-\int_0^{\rho+\varepsilon} \langle b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle\, ds\right]_{\varepsilon=0} = -\langle b(x), \dot\gamma(x)\rangle. \quad (5$$

Тогда

$$\|\mathrm{grad}_x \psi(x, y)\|^2 =$$

$$= \left\| b(x) \right\|^2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\int_0^{\rho} \left(\left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle - \left\langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle \right) ds \right)^2 -$$

$$- 2 \sum_{k=2}^{n} \left\langle b(x), e_k \right\rangle \int_0^{\rho} \left(\left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle - \left\langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle \right) ds. \qquad (6)$$

В силу утверждения 1

$$\left\| Z_k(s) \right\| \le \frac{s}{p} \le 1$$

и

$$\left| \int_0^{\rho} \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \int_0^{\rho} \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| \left\| Z_k(s) \right\| ds \le \int_0^{\rho} \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| ds \le c_3,$$

$$\left| \int_0^{\rho} \left\langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \int_0^{\rho} \left\| \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)) \right\| \left\| \dot\gamma(s) \right\| ds \le \int_0^{\rho} \left\| \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)) \right\| ds \le c_3,$$

тогда

$$\left\| \operatorname{grad}_x \psi(x, y) \right\|^2 \le c_2'^2 + (n-1)\left(3c_3^2 + 4c_2' c_3\right) \triangleq \tilde c_2^2,$$

где константа $\tilde c_2$ зависит от размерности n многообразия.

Перейдем к оценке лапласиана

$$\Delta\psi(x, y) = \sum_k \left\langle \nabla_{e_k} \operatorname{grad}_x \psi(x, y), e_k \right\rangle =$$

$$= \nabla_{\dot\gamma(\rho)} \left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), \dot\gamma(\rho) \right\rangle +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left(\nabla_{e_k} \left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), e_k \right\rangle - \left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), \nabla_{e_k} e_k \right\rangle \right).$$

Используя найденные выше производные $\psi(x, y)$ (5) и (4), записываем

$$\nabla_{\dot\gamma} \left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), \dot\gamma(x) \right\rangle = -\nabla_{\dot\gamma} \left\langle b(x), \dot\gamma(x) \right\rangle = -\left\langle \nabla_{\dot\gamma} b(x), \dot\gamma(x) \right\rangle,$$

$$\nabla_{e_k} \left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), e_k \right\rangle = -2\left\langle \nabla_{e_k} b(x), e_k \right\rangle + \left\langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho) \right\rangle \left\langle b(x), \dot\gamma(x) \right\rangle +$$

$$+ \int_0^{\rho} \left(\left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle - \left\langle Z_k'(s), Z_k(s) \right\rangle \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle + \right.$$

$$+ \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), H_k(s) \right\rangle - \left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle +$$

$$\left. + \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle \right) ds.$$

Здесь использовано утверждение 3. Далее

$$\left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), \nabla_{e_k} e_k \right\rangle = -\left\langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\right\rangle \left\langle \operatorname{grad}_x \psi(x, y), \dot\gamma(x)\right\rangle = \\ = \left\langle Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\right\rangle \left\langle b(x), \dot\gamma(x)\right\rangle.$$

Тогда

$$\Delta\psi(x, y) = -\left\langle \nabla_{\dot\gamma} b(x), \dot\gamma(x)\right\rangle - 2\sum_{k=2}^{n} \left\langle \nabla_{e_k} b(x), e_k\right\rangle + \\ + \sum_{k=2}^{n} \int_0^\rho \Big(\left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\right\rangle + \\ + \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\right\rangle - \left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\right\rangle\Big) ds - \\ - \int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\right\rangle \sum_{k=2}^{n} \left\langle Z_k'(s), Z_k(s)\right\rangle ds + \\ + \int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \sum_{k=2}^{n} H_k(s)\right\rangle ds. \tag{7}$$

Из условия интегрируемости ковариантных производных поля $b(x)$ вытекает их ограниченность:

$$\left\| \nabla_{\dot\gamma} b(x)\right\| \le c_3', \quad \left\| \nabla_{e_k} b(x)\right\| \le c_3'.$$

Тогда два первых слагаемых в (7) ограничены. Следующие интегралы оцениваются так:

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\right\rangle ds \right| \le \int_0^\rho \left\| \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\right\| \left\| Z_k(s)\right\| ds \le c_4,$$

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s)\right\rangle ds \right| \le \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\right\| \left\| Z_k(s)\right\| ds \le c_4,$$

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\right\rangle ds \right| \le \int_0^\rho \left\| \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s))\right\| \left\| \dot\gamma(s)\right\| ds \le c_4.$$

С учетом утверждения 1 получаем

$$\int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\right\rangle \sum_{k=2}^{n} \left\langle Z_k'(s), Z_k(s)\right\rangle ds \le \\ \le \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\right\| \sum_{k=2}^{n} \left\| Z_k'(s)\right\| \left\| Z_k(s)\right\| ds \le \\ \le c_3' \int_0^\rho \sum_{k=2}^{n} \frac{s}{\rho^2}\, ds = c_3'(n-1) \left.\frac{s^2}{2\rho^2}\right|_0^\rho = \frac{c_3'(n-1)}{2}.$$

Оценка последнего слагаемого вытекает из утверждения 3. В данном случае

$$\left\| H_k(s)\right\| \le (\rho - s) \int_0^\rho \left\| f(s', Z_k(s'), Z_k(s'))\right\| ds',$$

где векторное поле f определено выше. Первое слагаемое, используя условие 1б), можно оценить таким образом:

$$\left\| R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z_k(s)) Z_k'(s) \right\| \le$$

$$\le \sqrt{\left\langle R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z_k(s))\dot\gamma(s), Z_k(s)\right\rangle \operatorname{Ric}(\gamma(s))(Z_k'(s), Z_k'(s))} \le$$

$$\le \sqrt{c\,\frac{s^2}{\rho^2}\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))\operatorname{Ric}(\gamma(s))(Z_k'(s), Z_k'(s))} \le$$

$$\le \sqrt{c}\,\frac{sr(\gamma(s))}{\rho}\left\| Z_k'(s)\right\| \le \sqrt{c}\,\frac{sr(\gamma(s))}{\rho^2}.$$

Следующие два слагаемых оцениваются из условия 1г):

$$\left\|\left(\nabla_{Z_k} R\right)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z_k(s))\dot\gamma(s)\right\| \le f_1(\gamma(s))\left\| Z_k(s)\right\|^2 \le \frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2},$$

$$\left\|\left(\nabla_{\dot\gamma} R\right)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z_k(s)) Z_k(s)\right\| \le f_1(\gamma(s))\left\| Z_k(s)\right\|^2 \le \frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2}.$$

Следовательно,

$$\left\| f(s, Z_k(s), Z_k(s))\right\| \le 4\sqrt{c}\,\frac{sr(\gamma(s))}{\rho^2} + 2\,\frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2}.$$

Согласно условиям 1в) и 1г) скалярная кривизна $r(\gamma(s))$ интегрируема с весом s, а функция $f_1(\gamma(s))$ — с s^2, поэтому

$$\left\| H_k(s)\right\| \le (\rho - s)\int_0^\rho \left(4\sqrt{c}\,\frac{sr(\gamma(s))}{\rho^2} + 2\,\frac{s^2 f_1(\gamma(s))}{\rho^2}\right) ds \le \frac{\tilde c(\rho - s)}{\rho^2}.$$

Тогда запишем оценку последнего слагаемого:

$$\int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \sum_{k=2}^n H_k(s)\right\rangle ds \le \int_0^\rho \left\|\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\right\| \sum_{k=2}^n \left\| H_k(s)\right\| ds \le$$

$$\le \frac{\tilde c(n-1)}{\rho^2}\int_0^\rho \left\|\nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s))\right\| (\rho - s)\, ds \le c_3'\tilde c(n-1).$$

Окончательно получаем

$$\left|\Delta\psi(x, y)\right| \le c_3' + (n-1)\left(2c_3' + c_4 + c_4 + c_4 + c_3'/2 + c_3'\tilde c\right) \triangleq \tilde c_3.$$

Константа $\tilde c_3$ также зависит от размерности многообразия.

Лемма доказана.

***Следствие* 1.** *В условиях леммы* 1 *невязка удовлетворяет оценке*

$$\left| M(t, x, y)\right| \le \operatorname{const} m(t, x, y).$$

Доказательство. Прямыми вычислениями невязки находим

$$M(t, x, y) = \left\langle w(t, x, y),\ \operatorname{grad}_x\psi(x, y) + b(x)\right\rangle m(t, x, y) +$$

$$+\ m(t, x, y)\left(\frac{1}{2}\Delta\psi(x, y) + \frac{1}{2}\left\|\operatorname{grad}_x\psi(x, y)\right\|^2 + \left\langle\operatorname{grad}_x\psi(x, y), b(x)\right\rangle\right).$$

Теперь результат следует из условия 2′а) и леммы 1.

Теорема 1. *В условиях леммы* 1 *имеют место оценки*

$$\left|r_k(t,x,y)\right| \le \tilde{c}\,\frac{(\tilde{c}t)^k}{k!}\,p_0(t,x,y),$$

$$\left|r(t,x,y)\right| \le \tilde{c}e^{\tilde{c}t}p_0(t,x,y),$$

$$\left|p(t,x,y)\right| \le e^{c_2+\tilde{c}t}p_0(t,x,y).$$

Доказательство. Запишем первую итерацию:

$$\left|r_1(t,x,y)\right| = \left|\int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} M(t-\tau,x,z)M(\tau,z,y)\sigma(dz)\right| \le$$

$$\le c'^2\int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} m(t-\tau,x,z)m(\tau,z,y)\sigma(dz) =$$

$$= c'^2\int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} e^{\psi(x,z)+\psi(y,z)}p_0(t-\tau,x,z)\,p_0(\tau,z,y)\sigma(dz).$$

В силу условия 2а) $\left|\psi(x,y)\right| \le c_2$ и

$$\left|r_1(t,x,y)\right| \le c'^2\int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} e^{2c_2}p_0(t-\tau,x,z)\,p_0(\tau,z,y)\sigma(dz) =$$

$$= \left(c'e^{c_2}\right)^2 tp_0(t,x,y).$$

По индукции доказывается, что

$$\left|r_k(t,x,y)\right| \le \tilde{c}\,\frac{(\tilde{c}t)^k}{k!}\,p_0(t,x,y), \qquad \tilde{c} = c'e^{c_2}.$$

Тогда функция $r(t,x,y)$ оценивается следующим образом:

$$\left|r(t,x,y)\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n}\tilde{c}\,\frac{(\tilde{c}t)^k}{k!}\,p_0(t,x,y)\right| = \tilde{c}e^{\tilde{c}t}p_0(t,x,y).$$

Наконец, оценим фундаментальное решение:

$$p(t,x,y) \le m(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} m(t-\tau,x,z)\left|r(\tau,z,y)\right|\sigma(dz) \le$$

$$\le e^{c_2}p_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} e^{c_2}p_0(t-\tau,x,z)\,\tilde{c}e^{\tilde{c}\tau}p_0(\tau,z,y)\sigma(dz) =$$

$$= e^{c_2+\tilde{c}t}p_0(t,x,y).$$

Теорема доказана.

При более слабых условиях на поле сноса справедлива следующая лем

Лемма 2. *Если выполнены условия* 1а) – 1г) *и* 2′а) – 2′в), *то градиента и лапласиана* $\psi(x,y)$ *имеют вид*

$$\left\|\operatorname{grad}_x\psi(x,y)\right\| \le \hat{c}_2\left(\rho(x,y)+1\right),$$

$$\left|\Delta\psi(x,y)\right| \le \hat{c}_3\left(\rho(x,y)+1\right).$$

Доказательство. Из условия ограниченности ковариантной производной поля $b(x)$ имеем

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle ds \right| \le \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| \| Z_k(s) \| \, ds \le c_3 \int_0^\rho ds = c_3' \rho(x, y),$$

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \int_0^\rho \left\| \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)) \right\| \| \dot\gamma(s) \| \, ds \le c_3 \int_0^\rho ds = c_3' \rho(x, y).$$

Тогда

$$\| \operatorname{grad}_x \psi(x, y) \|^2 \le c_2'^2 + (n-1)\left(4 c_3'^2 \rho^2(x, y) + 4 c_2' c_3' \rho(x, y)\right) \le \hat c_2^2 (\rho(x, y) + 1)^2,$$

где константа $\hat c_2$ зависит от размерности многообразия.

Оценим интегралы от вторых производных:

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \int_0^\rho \left\| \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| \| Z_k(s) \| \, ds \le c_4' \rho(x, y),$$

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), Z_k(s) \right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)) \right\| \| Z_k(s) \| \, ds \le c_4' \rho(x, y),$$

$$\left| \int_0^\rho \left\langle \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle ds \right| \le$$

$$\le \int_0^\rho \left\| \nabla_{Z_k(s)} \nabla_{Z_k(s)} b(\gamma(s)) \right\| \| \dot\gamma(s) \| \, ds \le c_4' \rho(x, y).$$

Далее учтем, что $\| Z_k'(s) \| \le \dfrac{\| Z_k(s) \|}{s}$ и $\| Z_k(s) \| \le \dfrac{s}{\rho}$,

$$\int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle \sum_{k=2}^n \left\langle Z_k'(s), Z_k(s) \right\rangle ds \le$$

$$\le \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| \sum_{k=2}^n \| Z_k'(s) \| \| Z_k(s) \| \, ds \le$$

$$\le c_3' \int_0^\rho \sum_{k=2}^n \frac{\| Z_k(s) \|^2}{s} ds \le c_3'(n-1) \int_0^\rho \frac{s^2}{s \rho^2} ds = c_3'(n-1) \frac{s^2}{2\rho^2} \bigg|_0^\rho = \frac{c_3'(n-1)}{2}.$$

Для последнего слагаемого с учетом выкладок из доказательства предыдущей теоремы получаем

$$\int_0^\rho \left\langle \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)),\ \sum_{k=2}^n H_k(s) \right\rangle ds \;\le\; \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| \sum_{k=2}^n \left\| H_k(s) \right\| ds \;\le$$

$$\le\; \frac{\tilde c(n-1)}{\rho^2} \int_0^\rho \left\| \nabla_{\dot\gamma(s)} b(\gamma(s)) \right\| (\rho - s)\, ds \;\le\; c_3' \tilde c (n-1).$$

Окончательно имеем

$$\left| \Delta\psi(x, y) \right| \;\le\; c_3' + (n-1)\left(2c_3' + 3c_4'\rho(x, y) + c_3'/2 + c_3'\tilde c\right) \;\le\; \hat c_3\left(\rho(x, y) + 1\right),$$

константа $\hat c_3$ зависит от размерности многообразия.

Лемма доказана.

***Следствие* 2.** *В условиях леммы* 2 *имеет место оценка*

$$\left| M(t, x, y) \right| \;\le\; \text{const}\,(\rho^2(x, y) + 1)\, m(t, x, y). \tag{8}$$

Доказательство. Подставляя неравенства леммы 2 в выражение для невязки, находим

$$\left| M(t, x, y) \right| \le \left(c_1(\tilde c_2 + c_2) + \frac{\hat c_3}{2}(\rho(x, y) + 1) + \frac{\hat c_2^2}{2}(\rho(x, y) + 1)^2 + \right.$$

$$\left. +\; \hat c_2 c_2(\rho(x, y) + 1) \right) m(t, x, y) \;\le\; \hat c\left(\rho^2(x, y) + 1\right) m(t, x, y).$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *В условиях леммы* 2 *имеют место оценки*

$$\left| r_k(t, x, y) \right| \;\le\; 4\hat c\left(4\hat c c e^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))} \right)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\, e^{c_2\rho(x, y)} q_\varepsilon(t, x, y),$$

$$\left| r(t, x, y) \right| \;\le\; 2\sqrt{\frac{\hat c}{c}}\, e^{c_2\rho - c_2^2 t/(4(1-\varepsilon))}\, \mathrm{sh}\left[t\sqrt{4\hat c c e^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}} \right] q_\varepsilon(t, x, y),$$

$$p(t, x, y) \le\; e^{c_2\rho(x, y)}\, \mathrm{ch}\left[\tau\sqrt{4\hat c c e^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}} \right] q_\varepsilon(t, x, y).$$

Доказательство. Поскольку поле $b(x)$ только ограничено, то

$$e^{\psi(x, y)} \;=\; \exp\left\{ -\int_0^{\rho(x, y)} \left\langle b(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \right\rangle ds \right\} \;\le\; e^{c_2\rho(x, y)}.$$

Оценку

$$M(t, x, y) \le\; \hat c\left(\rho^2(x, y) + 1\right) m(t, x, y)$$

из следствия 2 преобразуем, используя неравенство $u^n e^{-u} \le e^{-(1-\varepsilon)u}$:

$$M(t, x, y) \le\; \hat c\left(\rho^2(x, y) + 1\right) e^{c_2\rho(x, y)} q(t, x, y) \;\le\; 4\hat c t e^{c_2\rho(x, y)} q_\varepsilon(t, x, y).$$

Тогда

$$\left| r_1(t, x, y) \right| \;=\; \left| \int_0^t d\tau \int_{\mathcal M} M(t-\tau, x, z) M(\tau, z, y) \sigma(dz) \right| \;\le$$

$$\le\; (4\hat c)^2 \int_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau \int_{\mathcal M} e^{c_2\rho(x, z) + c_2\rho(y, z)}\, q_\varepsilon(t-\tau, x, z)\, q_\varepsilon(\tau, z, y) \sigma(dz) \;=$$

$$= (4\hat{c})^2 \int_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau \int_{\mathcal{M}} \frac{e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)}}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz).$$

Рассматривая

$$\frac{1}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}} \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz)$$

как новую меру $\mu(dz)$, применим неравенство Коши – Буняковского к пространственному интегралу и в первом интеграле перейдем к касательному пространству $T_x\mathcal{M}$ заменой

$$U = \sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\,\rho(x,z)e(x,z) - \sqrt{\frac{t-\tau}{t\tau}}\,\rho(x,y)e(x,y),$$

$$z(U) = \operatorname{Exp}\left[\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\,U + \frac{t-\tau}{t}\rho(x,y)e(x,y)\right],$$

$$\sigma(dz) = \left(\frac{\tau(t-\tau)}{t}\right)^{n/2} J(z,U)\,dU,$$

а во втором — к $T_y\mathcal{M}$ заменой

$$U' = \sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\,\rho(y,z)e(y,z) - \sqrt{\frac{\tau}{t(t-\tau)}}\,\rho(x,y)e(x,y),$$

$$z(U') = \operatorname{Exp}\left[\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\,U' + \frac{\tau}{t}\rho(x,y)e(x,y)\right],$$

$$\sigma(dz) = \left(\frac{\tau(t-\tau)}{t}\right)^{n/2} J(z,U')\,dU'.$$

В результате получим следующую оценку пространственного интеграла:

$$\int_{\mathcal{M}} \frac{e^{c_2\rho(x,z)+c_2\rho(y,z)}}{(2\pi(t-\tau))^{n/2}(2\pi\tau)^{n/2}} \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\rho^2(x,z)}{2(t-\tau)} - (1-\varepsilon)\frac{\rho^2(z,y)}{2\tau}\right\}\sigma(dz) \le$$

$$\le \frac{q_\varepsilon(t,x,y)}{(2\pi)^{n/2}} \times$$

$$\times \sqrt{\int_{T_x\mathcal{M}} \exp\left\{2c_2\frac{t-\tau}{t}\rho(x,y) + 2c_2\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\|U\| - (1-\varepsilon)\frac{\|U\|^2}{2}\right\}J(z,U)\,dU} \times$$

$$\times \sqrt{\int_{T_y\mathcal{M}} \exp\left\{2c_2\frac{\tau}{t}\rho(x,y) + 2c_2\sqrt{\frac{\tau(t-\tau)}{t}}\|U'\| - (1-\varepsilon)\frac{\|U'\|^2}{2}\right\}J(z,U')\,dU'} =$$

$$= \frac{e^{c_2\rho(x,y)}q_\varepsilon(t,x,y)}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{c_2^2\frac{2\tau(t-\tau)}{t(1-\varepsilon)}\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{T_x\mathcal{M}} \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\|U\|}{\sqrt{2}} - c_2\sqrt{\frac{2\tau(t-\tau)}{t}}\right)^2\right\} J(z, U)\, dU \le$$

$$\le \frac{ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}}{(1-\varepsilon)^{n/2}} e^{c_2\rho(x,y)} q_\varepsilon(t, x, y).$$

Окончательно

$$\left| r_1(t, x, y)\right| = \frac{(4\hat{c})^2 ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}}{(1-\varepsilon)^{n/2}} e^{c_2\rho(x,y)} q_\varepsilon(t, x, y) \int\limits_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{(4\hat{c})^2 ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}}{(1-\varepsilon)^{n/2}} \frac{t^3}{3!} e^{c_2\rho(x,y)} q_\varepsilon(t, x, y).$$

По индукции доказывается, что

$$\left| r_k(t, x, y)\right| \le 4\hat{c}\left(4\hat{c}ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}\right)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{c_2\rho(x,y)} q_\varepsilon(t, x, y),$$

$$\left| r(t, x, y)\right| \le 2\sqrt{\frac{\hat{c}}{c}}\, e^{c_2\rho - c_2^2 t/(4(1-\varepsilon))} \operatorname{sh}\left[t\sqrt{4\hat{c}ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}}\right] q_\varepsilon(t, x, y).$$

И для ядра теплопроводности

$$p(t, x, y) \le e^{c_2\rho(x,y)} p_0(t, x, y) +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{\hat{c}}{c}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathcal{M}} e^{c_2\rho(x,z)} p_0(t-\tau, x, z) e^{c_2\rho(z,y)} e^{c_2^2 t/(4(1-\varepsilon))} \times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\tau\sqrt{4\hat{c}ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}}\right] q_\varepsilon(\tau, z, y)\, d\tau \le$$

$$\le e^{c_2\rho(x,y)} \operatorname{ch}\left[t\sqrt{4\hat{c}ce^{c_2^2 t/(2(1-\varepsilon))}}\right] q_\varepsilon(t, x, y).$$

Теорема доказана.

1. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1443 – 1448.
2. *Бондаренко В. Г.* Логарифмический градиент ядра теплопроводности на римановом многообразии // Мат. заметки. – 2003. – **74**, № 3. – С. 471 – 475.
3. *Bondarenko V.* Diffusion sur variete de courbure non positive // Comptes Rendus A. S. – 1997. – **324**, № 10. – P. 1099 – 1103.

Получено 22.10.2002