УДК 517.51

А. Б. Метеличенко (Одес. нац. ун-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ МОДИФИЦИРОВАННЫМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

We consider some modified interpolational polynomials for functions from the space $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$. We obtain the estimate of the rate of approximation of an initial function f by these polynomials considered in terms of its modulus of continuity. We establish the fact of almost everywhere convergence of these polynomials to f.

Розглянуто деякі модифіковані інтерполяційні поліноми для функцій із простору $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$. Отримано оцінку швидкості наближення даними поліномами вихідної функції f через її модуль неперервності. Встановлено факт збіжності згаданих поліномів до f майже скрізь.

1. Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция. Вопрос о ее приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами

$$L_n(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k) D_n(x-x_k)$$

по равноотстоящим узлам $x_k = x_0 + 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$ ($D_n(x)$ — ядро Дирихле), исследован достаточно подробно. Для равномерной нормы известна оценка (см., например, [1, с. 119])

$$\|f - L_n(f)\|_C \leq C \ln n\, E_n(f),$$

не улучшаемая по порядку для пространства непрерывных функций. Однако, как следует из теоремы Фабера, интерполяционные полиномы $L_n(x,f)$ не дают равномерного приближения для любой непрерывной функции. В связи с этим С. Н. Бернштейном [2] (см. также [3, с. 563]) были рассмотрены средние арифметические для $L_n(x,f)$

$$P_{n,m}(x, f) = \frac{1}{m+1}\sum_{s=0}^{m} L_{n,s}(x, f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k) F_m(x-x_k),$$

где $L_{n,s}(x, f)$ получен после усечения $L_n(x,f)$ до порядка $s = 0, 1, \ldots, n$, а $F_m(x)$ — ядро Фейера. С. Н. Бернштейн доказал, что имеет место равномерное стремление на всей действительной оси полиномов $P_{n,m}(x, f)$ к непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ при неограниченном возрастании n и m $(m \leq n)$.

Для приближения непрерывной функции f известно также соотношение[1]

$$\|f - L_n(f)\|_p \leq C(p)\, E_n(f),$$

которое следует из неравенства Марцинкевича [4] (см. также [5, т. 2, с. 46]). Заметим, что слева стоит норма пространства $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$, а справа $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

В случае 2π-периодической интегрируемой по Риману функции f В. Х. Христовым [6] была получена оценка (в терминах интегрального модуля непрерыв-

[1] Всюду ниже $C(\ldots)$ — положительные постоянные (различные в разных формулах), зависящие лишь от входящих в скобки параметров.

ности $\omega_k(t,f)_p$ и усредненного по норме $L_p[0, 2\pi]$ локального модуля непрерывности $\tau_k(t,f)_p$ порядков k)

$$\left\| f - L_{n,m}(f) \right\|_p \leq C(k, p)(\tau_k(h, f)_p + (mh)^{-k}\omega_k(h, f)_p),$$

где $h \geq 2\pi/(2n+1)$, $1 < p < \infty$ $(k, m, n \in \mathbb{N}, m \leq n)$.

Нам представляется более целесообразным при использовании нормы пространства $L_p[0, 2\pi]$ рассматривать и функции f из этого пространства. Но применять интерполяционные полиномы $L_n(x,f)$ для приближения $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$, не имеет смысла, поскольку на множестве меры Лебега нуль f можно задать произвольным образом. Наиболее естественно в этой ситуации для суммируемой функции вместо значений в узлах брать ее средние значения между соседними узлами. Так поступил Л. В. Канторович [7] в случае полиномов Бернштейна, а затем С. М. Лозинский [8], рассматривая вместо $L_n(x,f)$ полиномы

$$Q_n(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} D_n(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n^{(k)}} f(t)dt, \tag{1}$$

где $\delta_n^{(k)} = [x_k, x_k + \delta_n]$, $\delta_n = 2\pi/(2n+1)$. Полученные ими результаты устанавливали только факт сходимости соответствующих полиномов к исходной функции (в первом случае — почти всюду, а во втором — по норме пространства $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$), но не затрагивали скорость приближения.

В настоящей работе, объединяя идеи С. Н. Бернштейна и С. М. Лозинского, мы рассмотрим приближение функций $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, с помощью чезаровских (C, α) средних полиномов $Q_n(x,f)$

$$U_{n,m}^{\alpha}(x, f) = \frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{s=0}^{m} A_{m-s}^{\alpha-1} Q_{n,s}(x,f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} K_m^{\alpha}(x-x_k)\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n^{(k)}} f(t)dt, \tag{2}$$

где $Q_{n,s}(x,f)$ получен после усечения $Q_n(x,f)$ до порядка $s = 0, 1, \dots, n$, а $K_m^{\alpha}(x)$ — ядро метода (C, α). Наряду со сходимостью $U_{n,m}^{\alpha}(f)$ к f в пространстве $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$ (при неограниченном возрастании n и m, $m \leq n$), нами получена оценка скорости приближения

$$\left\| U_{n,m}^{\alpha}(f) - f \right\|_p \leq C(\alpha)\,\omega\left(\frac{\ln(m+2)}{m+1}, f\right)_p, \quad \alpha \geq 1, \quad m \geq 0. \tag{3}$$

Установлено также, что $U_{n,m}^{\alpha}(x,f)$ сходится к $f(x) \in L_1[0, 2\pi]$ почти всюду на $[0, 2\pi]$. Отметим, что по сравнению с результатом С. М. Лозинского для сходимости $U_{n,m}^{\alpha}(f)$ к f в пространстве $L_1[0, 2\pi]$ мы не требуем, чтобы функция $|f|\ln^+|f|$ была суммируема на $[0, 2\pi]$.

Опишем кратко структуру статьи. В п. 2 приведены некоторые вспомогательные факты и определения. В п. 3 рассмотрен вопрос о сходимости почти всюду, а в п. 4 доказана оценка (3) и приведены замечания по поводу подобного рода приближений.

2. Пусть $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство всех комплекснозначных измеримых по Лебегу 2π-периодических функций f, для которых конечен функционал[2]

---

[2] Пространство $L_\infty[0, 2\pi]$ будем считать совпадающим с пространством 2π-периодических непрерывных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x < 2\pi}|f(x)|$.

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

представляющий собой норму соответствующего пространства $L_p[0, 2\pi]$.

Модулем непрерывности $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$, называется величина

$$\omega(t, f)_p = \sup_{|h| \le t} \| f(x+h) - f(x) \|_p, \quad t \ge 0.$$

Функция $\omega(t, f)_p$ не убывает и удовлетворяет соотношениям

$$\omega(nt, f)_p \le n\omega(t, f)_p,$$

$$\omega(\lambda t, f)_p \le (\lambda + 1)\,\omega(t, f)_p$$

при $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \ge 0$ и $t \ge 0$.

Пусть

$$A_m^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}{m!}, \quad \alpha \ne -1, -2, \ldots .$$

Относительно A_m^α известны следующие соотношения [5, т. 1, с. 130 – 132]:

$$C_1(\alpha) \le \frac{A_m^\alpha}{(m+1)^\alpha} \le C_2(\alpha), \quad \alpha > -1, \quad m \ge 0, \tag{4}$$

$$A_m^{\alpha+h} = \sum_{s=0}^{m} A_s^\alpha A_{m-s}^{h-1}, \tag{5}$$

в частности

$$A_m^\alpha = \sum_{s=0}^{m} A_s^{\alpha-1}.$$

Говорят, что ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ с частными суммами U_m суммируем методом (C, α), $\alpha > -1$, к числу U, если чезаровские средние этого ряда

$$\sigma_m^\alpha = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{s=0}^{m} A_{m-s}^{\alpha-1} U_s \tag{6}$$

имеют предел U при $m \to \infty$.

Известно, что если ряд суммируем методом (C, α), $\alpha > -1$, то он также суммируем методом $(C, \alpha + h)$ к той же сумме при любом $h > 0$, причем справедливо равенство

$$\sigma_m^{\alpha+h} = \frac{1}{A_m^{\alpha+h}} \sum_{s=0}^{m} A_{m-s}^{h-1} A_s^\alpha \sigma_s^\alpha, \quad \alpha > -1, \quad h > 0. \tag{7}$$

Если в формулу (6) вместо U_s подставим усечение $Q_n(x, f)$ до порядка $s = 0$, $1, \ldots, n$, имеющее в силу (1) вид

$$Q_{n,s}(x, f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} D_s(x - x_k) \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n^{(k)}} f(t)\,dt, \tag{8}$$

то получим чезаровские средние для $Q_n(x,f)$ — полиномы $U^{\alpha}_{n,m}(x,f)$ (см. (2)). Напомним, что $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin((2n+1)(x/2))}{2\sin(x/2)}$ — ядро Дирихле. Далее, согласно (7) имеем

$$U^{\alpha+h}_{n,m}(x,f) = \frac{1}{A^{\alpha+h}_m} \sum_{s=0}^{m} A^{h-1}_{m-s} A^{\alpha}_s U^{\alpha}_{n,s}(x,f), \quad \alpha > -1, \quad h > 0. \tag{9}$$

Из (2) и (8) следует, что ядро метода (C, α)

$$K^{\alpha}_m(x) = \frac{1}{A^{\alpha}_m} \sum_{s=0}^{m} A^{\alpha-1}_{m-s} D_s(x).$$

Ясно, что порядок полинома $U^{\alpha}_{n,m}(x,f)$ не превышает порядка $K^{\alpha}_m(x)$, равного m, $m \le n$. Поскольку $m < 2n+1$, то (см. [5, т. 2, с. 15])

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} K^{\alpha}_m(x - x_k) \equiv 1. \tag{10}$$

При $0 < \alpha \le 1$ и $m \ge 0$ имеют место неравенства [5, т. 1, с. 157]

$$\left| K^{\alpha}_m(x) \right| < m + 1, \tag{11}$$

$$\left| K^{\alpha}_m(x) \right| \le C(\alpha)(m+1)^{-\alpha} |x|^{-(\alpha+1)}, \quad 0 < |x| \le \pi. \tag{12}$$

В дальнейшем будет важен случай $\alpha = 1$, поэтому рассмотрим его отдельно. Поскольку $A^0_m = 1$, а $A^1_m = m+1$, то

$$K^1_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{s=0}^{m} D_s(x) = F_m(x),$$

где $F_m(x) = \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{\sin((m+1)(x/2))}{\sin(x/2)} \right)^2$ — ядро Фейера. Таким образом,

$$U^1_{n,m}(x,f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} F_m(x - x_k) \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta^{(k)}_n} f(t)\,dt. \tag{13}$$

3. Исследуем вопрос о сходимости почти всюду полиномов $U^{\alpha}_{n,m}(x,f)$ к функции $f(x) \in L_1[0, 2\pi]$ на периоде длины 2π.

Определение 1. *Пусть в точке ξ значение суммируемой функции φ конечно. Если*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} |\varphi(t) - \varphi(\xi)|\,dt = 0,$$

то точка ξ называется точкой Лебега функции φ.

Известно, что почти каждая точка $x \in [a, b]$ является точкой Лебега суммируемой на $[a, b]$ функции.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in L_1[0, 2\pi]$, тогда $U^{\alpha}_{n,m}(x,f)$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$ к $f(x)$ при неограниченном возрастании n и m ($m \le n$) для любого $\alpha > 0$. Эта сходимость имеет место во всех точках Лебега функции f.*

Доказательство. Пусть $\xi \in [0, 2\pi]$ — произвольная точка Лебега функции f. Поскольку почти любая точка $[0, 2\pi]$ является точкой Лебега функции f, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim_{m\to\infty} U^{\alpha}_{n,m}(\xi, f) = f(\xi)$. В равенстве (2) можно заменить равноотстоящие узлы x_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, на эквивалентные им узлы (отличающиеся на величину, кратную 2π), лежащие в промежутке $[\xi - \pi, \xi + \pi)$. Для простоты будем их также обозначать через x_k.

Поскольку ξ — точка Лебега функции f, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) < \pi/2$ такое, что при $0 < |h| < 3\delta$

$$\left| \int_{\xi}^{\xi+h} |f(t) - f(\xi)| dt \right| < \varepsilon |h|. \tag{14}$$

Для всех m, начиная с некоторого номера $M_1 = M_1(\varepsilon)$, будет $\Delta_m = 2\pi/(m+1) < \delta$. Используя представления (2) и (10), получаем оценку

$$\left| U^{\alpha}_{n,m}(\xi, f) - f(\xi) \right| \le \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \left| K^{\alpha}_m(\xi - x_k) \right| \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(\xi)| dt.$$

Разобьем эту сумму на три:

$$S_1 = \frac{2}{2n+1} \sum_{|\xi - x_k| < \Delta_m}, \quad S_2 = \frac{2}{2n+1} \sum_{\Delta_m \le |\xi - x_k| \le \delta}, \quad S_3 = \frac{2}{2n+1} \sum_{\delta < |\xi - x_k| \le \pi}$$

и оценим каждую из них при $0 < \alpha \le 1$ с учетом соотношений (11), (12) и (14). Имеем

$$S_1 = \frac{2}{2n+1} \sum_{|\xi - x_k| < \Delta_m} \left| K^{\alpha}_m(\xi - x_k) \right| \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(\xi)| dt \le$$

$$\le \frac{m+1}{\pi} \sum_{|\xi - x_k| < \Delta_m} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(\xi)| dt \le$$

$$\le \frac{2}{\Delta_m} \int_{\xi - \Delta_m}^{\xi + \Delta_m + \delta_n} |f(t) - f(\xi)| dt < \frac{2}{\Delta_m} 3\Delta_m \varepsilon = 6\varepsilon,$$

поскольку

$$\int_{\xi - \Delta_m}^{\xi + \Delta_m + \delta_n} |f(t) - f(\xi)| dt = \int_{\xi - \Delta_m}^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi + \Delta_m + \delta_n} < (2\Delta_m + \delta_n)\varepsilon \le 3\Delta_m \varepsilon.$$

Для оценки суммы S_2 выберем $j = j(m) \in \mathbb{N}$ такое, чтобы $\delta < 2^j \Delta_m \le 2\delta < \pi$. Тогда

$$S_2 \le \frac{2}{2n+1} \sum_{\Delta_m \le |\xi - x_k| < 2^j \Delta_m} = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{2^i \Delta_m \le |\xi - x_k| < 2^{i+1} \Delta_m} \le$$

$$\le \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{C(\alpha)}{(m+1)^{\alpha} (2^i \Delta_m)^{\alpha+1}} \frac{1}{\delta_n} \sum_{2^i \Delta_m \le |\xi - x_k| < 2^{i+1} \Delta_m} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(\xi)| dt \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{C(\alpha)}{\pi (m+1)^{\alpha} (2^i \Delta_m)^{\alpha+1}} \int_{\xi - 2^{i+1} \Delta_m}^{\xi + 2^{i+1} \Delta_m + \delta_n} |f(t) - f(\xi)| dt \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{5C(\alpha)}{\pi(m+1)^\alpha (2^i \Delta_m)^{\alpha+1}} 2^i \Delta_m \varepsilon \leq \sum_{i=0}^{\infty} (2^{-\alpha})^i \frac{5C(\alpha)}{\pi(2\pi)^\alpha} \varepsilon = \frac{5C(\alpha)}{(2^\alpha - 1)\pi^{\alpha+1}} \varepsilon.$$

Действительно, так как $2^j \Delta_m \leq 2\delta$ и $\delta_n \leq \Delta_m < \delta$, то $2^{i+1}\Delta_m < 3\delta$ и $2^{i+1}\Delta_m + \delta_n < 3\delta$, $i = 0, \ldots, j-1$, а значит,

$$\int_{\xi - 2^{i+1}\Delta_m}^{\xi + 2^{i+1}\Delta_m + \delta_n} |f(t) - f(\xi)| dt = \int_{\xi - 2^{i+1}\Delta_m}^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi + 2^{i+1}\Delta_m + \delta_n} <$$

$$< (2^{i+2}\Delta_m + \delta_n)\varepsilon \leq (2^{i+2}\Delta_m + 2^i \Delta_m)\varepsilon = 5 \cdot 2^i \Delta_m \varepsilon.$$

Оценим последнюю сумму:

$$S_3 \leq \frac{2}{2n+1} \sum_{\delta < |\xi - x_k| \leq \pi} \frac{C(\alpha)}{(m+1)^\alpha |\xi - x_k|^{\alpha+1}} \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(\xi)| dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{2n+1} \frac{C(\alpha)}{(m+1)^\alpha \delta^{\alpha+1}} \frac{1}{\delta_n} \sum_{\delta < |\xi - x_k| \leq \pi} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(\xi)| dt \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha)}{\pi(m+1)^\alpha \delta^{\alpha+1}} \int_0^{2\pi} |f(t) - f(\xi)| dt < \varepsilon$$

для всех m, начиная с некоторого номера $M_2 = M_2(\varepsilon)$.

В итоге для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $M = \max\{M_1, M_2\}$, что при $m \geq M$ выполнено

$$\left| U_{n,m}^\alpha(\xi, f) - f(\xi) \right| < C_1(\alpha)\varepsilon,$$

т. е. $\lim_{m \to \infty} U_{n,m}^\alpha(\xi, f) = f(\xi)$ при $0 < \alpha \leq 1$. А поскольку из (C, α)-сходимости следует $(C, \alpha + h)$-сходимость к тому же числу при любом $h > 0$, то теорема полностью доказана.

4. Перейдем к вопросу о сходимости полиномов $U_{n,m}^\alpha(f)$ к функции f в пространстве $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, и оценке скорости данного приближения.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, *тогда имеет место оценка*

$$\left\| U_{n,m}^\alpha(f) - f \right\|_p \leq C(\alpha)\, \omega\left(\frac{\ln(m+2)}{m+1}, f \right)_p, \quad \alpha \geq 1, \quad m \geq 0.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\alpha = 1$. В силу (10) и (13) имеем [3]

$$\left| U_{n,m}^1(x, f) - f(x) \right| \leq \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} F_m(x - x_k) \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n^{(k)}} |f(t) - f(x)| dt.$$

Разобьем данную сумму на две:

$$S_1(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{|x - x_k| < \Delta_m}, \quad S_2(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{\Delta_m \leq |x - x_k| \leq \pi}$$

и оценим каждую из них в отдельности по аналогии с тем, как это сделано выше. Имеем

[3] Снова будем считать, что для каждого x узлы x_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, заменены на эквивалентные из промежутка $[x - \pi, x + \pi)$, которые также обозначим через x_k.

$$S_1(x) \le \frac{m+1}{\pi} \int\limits_{x-\Delta_m}^{x+\Delta_m+\delta_n} |f(t)-f(x)|dt \le \frac{2}{\Delta_m} \int\limits_{-\Delta_m}^{2\Delta_m} |f(x+t)-f(x)|dt.$$

Теперь воспользуемся неравенством Минковского для интегралов при $1 \le p \le \infty$:

$$\|S_1(x)\|_p \le \frac{2}{\Delta_m} \int\limits_{-\Delta_m}^{2\Delta_m} \|f(x+t)-f(x)\|_p\, dt \le \frac{4}{\Delta_m} \int\limits_0^{2\Delta_m} \omega(t,f)_p\, dt \le$$

$$\le \frac{4}{\Delta_m} 2\Delta_m \omega(2\Delta_m, f)_p \le 8(4\pi+1)\omega\left(\frac{1}{m+1}, f\right)_p.$$

При $m=0$ сумма $S_2(x) \equiv 0$, поскольку суммирование проводится по пустому множеству индексов. При $m \ge 1$ выберем $j = j(m) \in \mathbb{N}$ такое, чтобы $2^{j-1}\Delta_m \le \le \pi < 2^j \Delta_m$; очевидно, что $j = [\log_2(m+1)]$. Аналогично оценке суммы S_2 при доказательстве теоремы 1, учитывая, что в (12) при $\alpha = 1$ в качестве $C(\alpha)$ можно взять $\pi^2/2$, получаем

$$S_2(x) \le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\pi}{2(m+1)(2^i\Delta_m)^2} \int\limits_{-2^{i+1}\Delta_m}^{2^{i+1}\Delta_m+\delta_n} |f(x+t)-f(x)|dt \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{4^{i+1}\Delta_m} \int\limits_{-2^{i+1}\Delta_m}^{3\cdot 2^i\Delta_m} |f(x+t)-f(x)|dt.$$

Снова применим неравенство Минковского при $1 \le p \le \infty$:

$$\|S_2(x)\|_p \le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{4^{i+1}\Delta_m} \int\limits_{-2^{i+1}\Delta_m}^{3\cdot 2^i\Delta_m} \|f(x+t)-f(x)\|_p\, dt \le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2}{4^{i+1}\Delta_m} \int\limits_0^{3\cdot 2^i\Delta_m} \omega(t,f)_p dt \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{2}{4^{i+1}\Delta_m} 3\cdot 2^i \Delta_m\, \omega(3\cdot 2^i\Delta_m, f)_p \le \sum_{i=0}^{j-1} \frac{3}{2^{i+1}} \left(\frac{3\cdot 2^i \cdot 2\pi}{j} + 1\right) \omega\left(\frac{j}{m+1}, f\right)_p \le$$

$$\le 3\left(3\pi + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\right) \omega\left(\frac{j}{m+1}, f\right)_p \le 3(3\pi+1)\,\omega\left(\frac{\log_2(m+1)}{m+1}, f\right)_p.$$

В результате для любых $0 \le m \le n$

$$\left\|U^1_{n,m}(x,f) - f(x)\right\|_p \le \|S_1(x)\|_p + \|S_2(x)\|_p \le$$

$$\le C\omega\left(\frac{1}{m+1}, f\right)_p + C_1\omega\left(\frac{\log_2(m+1)}{m+1}, f\right)_p \le$$

$$\le C_2\omega\left(\frac{\log_2(m+2)}{m+1}, f\right)_p \le C_3\omega\left(\frac{\ln(m+2)}{m+1}, f\right)_p. \tag{15}$$

При $\alpha > 1$ из (9) и (5) следуют равенства

$$U^\alpha_{n,m}(x,f) = \frac{1}{A^\alpha_m} \sum_{s=0}^{m} A^{\alpha-2}_{m-s} A^1_s U^1_{n,s}(x,f),$$

$$U^\alpha_{n,m}(x,f) - f(x) = \frac{1}{A^\alpha_m} \sum_{s=0}^{m} A^{\alpha-2}_{m-s} A^1_s (U^1_{n,s}(x,f) - f(x)).$$

Принимая во внимание (4) и (15), получаем

$$\left\| U_{n,m}^{\alpha}(x,f) - f(x) \right\|_p \le \frac{C(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}} \sum_{s=0}^{m} (m-s+1)^{\alpha-2}(s+1) \left\| U_{n,s}^{1}(x,f) - f(x) \right\|_p \le$$

$$\le \frac{C_1(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}} \sum_{s=0}^{m} (m-s+1)^{\alpha-2}(s+1)\,\omega\left(\frac{\ln(s+2)}{s+1}, f\right)_p \le$$

$$\le \frac{C_1(\alpha)}{(m+1)^{\alpha}} \omega\left(\frac{\ln(m+2)}{m+1}, f\right)_p \sum_{s=0}^{m} (m-s+1)^{\alpha-2}(s+1)\left(\frac{m+1}{\ln(m+2)}\frac{\ln(s+2)}{s+1} + 1\right) \le$$

$$\le \frac{C_2(\alpha)}{(m+1)^{\alpha-1}} \omega\left(\frac{\ln(m+2)}{m+1}, f\right)_p \sum_{s=0}^{m} (m-s+1)^{\alpha-2} \le C_3(\alpha)\,\omega\left(\frac{\ln(m+2)}{m+1}, f\right)_p,$$

и теорема доказана.

***Замечание* 1.** Используя соотношение (12), аналогичным образом можно доказать, что для $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$, имеет место оценка

$$\left\| U_{n,m}^{\alpha}(f) - f \right\|_p \le C(\alpha)\,\omega\left((m+1)^{-\alpha}, f\right)_p, \quad 0 < \alpha < 1, \quad m \ge 0.$$

Следовательно, последовательность $U_{n,m}^{\alpha}(f)$ сходится к f по норме соответствующего пространства $L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$, при неограниченном возрастании n и m $(m \le n)$ для любого $\alpha > 0$.

Рассмотрим ядро Джексона порядка не выше m

$$J_m(x) = \lambda_m \left(\frac{\sin((r+1)(x/2))}{\sin(x/2)}\right)^4, \quad r = [m/2], \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} J_m(x)\,dx = 1,$$

где последнее равенство определяет величину λ_m.

***Замечание* 2.** Если для функции $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$, вместо $U_{n,m}^{\alpha}(x, f)$ рассмотреть полином

$$V_{n,m}(x, f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} J_m(x - x_k) \frac{1}{\delta_n} \int_{\delta_n^{(k)}} f(t)\,dt,$$

то нетрудно по схеме доказательства теоремы 2 получить оценку

$$\left\| V_{n,m}(f) - f \right\|_p \le C\,\omega\left(\frac{1}{m+1}, f\right)_p, \quad m \ge 0.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Э. А. Стороженко за постановку задачи и обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе.

1. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – Кн. 1. – 230 с.
2. *Бернштейн С. Н.* О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // Докл. АН СССР. – 1934. – **4**. – С. 1 – 8.
3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
4. *Marcinkiewicz J.* Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. – 1937. – **8**. – P. 127 – 130.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965.
6. *Христов В. Х.* О сходимости в среднем интерполяционных полиномов периодических функций // Болг. мат. студ. – 1983. – **5**. – С. 14 – 22.
7. *Канторович Л. В.* О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. I // Докл. АН СССР. – 1930. – **21**. – С. 563 – 568.
8. *Лозинский С. М.* Об интерполяции // Мат. сб. – 1940. – **50**, № 1. – С. 57 – 68.

Получено 27.08.2002