УДК 517.5

Т. О. Кононович (Полтав. пед. ун-т)

ОЦІНКА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЧЕРЕЗ КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є

In terms of Fourier coefficients, we obtain upper bounds of the best approximation of periodic summable functions of two variables in the metric L. We consider functions representable by trigonometric series with coefficients that satisfy the two-dimensional analog of the Boas – Telyakovsky conditions.

Отримано виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку зверху найкращого наближення в метриці L періодичних сумовних функцій двох змінних. Розглянуто функції, які можна зобразити тригонометричними рядами з коефіцієнтами, що задовольняють двовимірний аналог умов Боаса – Теляковського.

Нехай L — простір сумовних функцій двох змінних, 2π-періодичних за кожною змінною, з нормою

$$\|f(x_1, x_2)\|_L = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 .$$

Позначимо через $T_{n_1n_2}$ множину тригонометричних поліномів вигляду

$$t_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{n_1}\sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma}(A_{l_1l_2}\cos l_1x_1\cos l_2x_2 + B_{l_1l_2}\cos l_1x_1\sin l_2x_2 +$$
$$+ C_{l_1l_2}\sin l_1x_1\cos l_2x_2 + D_{l_1l_2}\sin l_1x_1\sin l_2x_2),$$

де $A_{l_1l_2}$, $B_{l_1l_2}$, $C_{l_1l_2}$, $D_{l_1l_2}$ — довільні дійсні числа, γ — кількість рівних нулю координат вектора (l_1, l_2), $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$. Нехай $E_{n_1n_2}(f)$ — величина найкращого наближення функції $f \in L$ тригонометричними поліномами $t_{n_1n_2} \in T_{n_1n_2}$:

$$E_{n_1n_2}(f) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{t_{n_1n_2} \in T_{n_1n_2}} \left\|f(x_1, x_2) - t_{n_1n_2}(x_1, x_2)\right\|_L .$$

Нехай також $N_0 = N \cup \{0\}$, $Z_+^2 = N_0 \times N_0$, $Q_{m_1m_2} = \left\{(l_1, l_2) \in Z_+^2\colon (l_1 \le m_1) \wedge \wedge (l_2 \le m_2)\right\}$, де $m_1, m_2 \in N_0$.

Для довільної послідовності дійсних чисел $\{a_{l_1l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, покладемо

$$\Delta^1 a_{l_1l_2} = a_{l_1l_2} - a_{l_1+1\,l_2}, \qquad \Delta^2 a_{l_1l_2} = a_{l_1l_2} - a_{l_1\,l_2+1},$$

$$\Delta^{12} a_{l_1l_2} = \Delta^2(\Delta^1 a_{l_1l_2}) = \Delta^1(\Delta^2 a_{l_1l_2}) = a_{l_1l_2} - a_{l_1+1\,l_2} - a_{l_1\,l_2+1} + a_{l_1+1\,l_2+1},$$

$$\nabla^1_{k_1} a_{l_1l_2} = a_{l_1-k_1\,l_2} - a_{l_1+k_1\,l_2}, \qquad \nabla^2_{k_2} a_{l_1l_2} = a_{l_1\,l_2-k_2} - a_{l_1\,l_2+k_2},$$

$$\nabla^{12}_{k_1k_2} a_{l_1l_2} = \nabla^2_{k_2}(\nabla^1_{k_1} a_{l_1l_2}) = \nabla^1_{k_1}(\nabla^2_{k_2} a_{l_1l_2}), \quad 0 \le k_i \le l_i,$$

$$\sigma_{12}(a) := \sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\sum_{k_2=1}^{[l_2/2]} \frac{1}{k_1k_2}\nabla^{12}_{k_1k_2}(\Delta^{12} a_{l_1l_2}), \qquad \sigma_i(a) := \sum_{k_i=1}^{[l_i/2]} \frac{1}{k_i}\nabla^i_{k_i}(\Delta^{12} a_{l_1l_2}),$$

$$\delta_i(a) := \sum_{k_i=1}^{[l_i/2]} \frac{1}{k_i}\nabla^i_{k_i}(\Delta^i a_{l_1l_2}), \quad i = 1, 2.$$

Через C позначимо абсолютні додатні сталі, які можуть бути неоднаковими в різних формулах.

Для періодичних сумовних функцій однієї змінної встановлено ряд оцінок їх найкращого наближення тригонометричними поліномами, виражених через коефіцієнти Фур'є.

Б. Надь, накладаючи на функцію $f(\cdot)$ досить жорсткі умови, одержав точне значення величини її найкращого наближення $E_n(f)$ тригонометричними поліномами порядку не вище n (див. [1, с. 92, 103]): якщо коефіцієнти Фур'є функції $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ утворюють невід'ємну тричі монотонну послідовність ($\Delta a_k \geq 0$, $\Delta^2 a_k \geq 0$, $\Delta^3 a_k = \Delta(\Delta^2 a_k) \geq 0$), то

$$E_n(f) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{(2k+1)(n+1)}}{2k+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

(тут і далі $\Delta a_i := a_i - a_{i+1}$, $\Delta^2 a_i := \Delta a_i - \Delta a_{i+1}$).

Якщо ж коефіцієнти Фур'є функції $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ утворюють невід'ємну двічі монотонну послідовність ($\Delta b_k \geq 0$, $\Delta^2 b_k \geq 0$), то

$$E_n(g) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{(2k+1)(n+1)}}{2k+1}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Дещо послабивши обмеження на порядок монотонності коефіцієнтів Фур'є, В. О. Баскаков (див. [2], §10, теореми 1, 3) одержав такі оцінки. Якщо послідовність $\{a_k\}$ додатна, монотонно спадає до нуля і опукла (тобто двічі монотонна), то для функції $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$

$$E_n(f) \leq 2\pi(a_{n+1} + a_{2(n+1)}), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Якщо послідовність $\{b_k\}$ монотонно спадає до нуля, а послідовність $\{b_k / k\}$ опукла, то для функції $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$

$$E_n(g) \leq C\left(b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\right), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Не обмежуючись функціями з монотонною послідовністю коефіцієнтів Фур'є, але вимагаючи виконання для $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ умов Боаса – Теляковського (див. [3], теореми 1, 2), ми одержали такі результати [4].

Якщо елементи послідовності $\{a_k\}$ задовольняють умови

$$a_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\Delta a_i| < \infty, \quad \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{1}{k} \nabla_k(\Delta a_i) \right| < \infty,$$

то для функції $f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$

$$E_n(f) \leq C\left(\sum_{i=[n/4]+1}^{\infty} |\Delta a_i| + \sum_{i=[n/2]+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{1}{k} \nabla_k(\Delta a_i) \right| \right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

(тут і надалі $\nabla_k(\Delta a_i) := \Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}$, де $0 \leq k \leq i$).

Якщо елементи послідовності $\{b_k\}$ задовольняють умови попереднього результату і $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|/i < \infty$, то для функції $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$

$$E_n(g) \leq C\left(\sum_{i=[n/4]+1}^{\infty}|\Delta b_i| + \sum_{i=[n/2]+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{[i/2]}\frac{1}{k}\nabla_k(\Delta b_i)\right| + \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|b_i|}{i}\right),$$
$$n = 0, 1, \ldots .$$

Зауважимо, що множина функцій, для коефіцієнтів Фур'є яких виконуються умови В. О. Баскакова, належить до множини функцій, що задовольняють умови Боаса – Теляковського. При виконанні для $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ умов В. О. Баскакова одержані нами оцінки можна записати у вигляді

$$E_n(f) \leq Ca_{[n/4]+1}, \quad E_n(g) \leq C\left(b_{[n/4]+1} + \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{b_i}{k}\right).$$

Якщо до того ж існують C_1, C_2 такі, що для будь-якого $k \in N$ $C_1 \leq a_{2k}/a_k \leq \leq C_2$ (аналогічно для $\{b_k\}$), то останні дві нерівності збігатимуться з відповідними оцінками В. О. Баскакова з точністю до сталої (наприклад, якщо $a_k = = 1/k^m$ або $b_k = 1/k^m$, де $m \in N$).

У даній роботі одержано виражені через коефіцієнти Фур'є оцінки зверху величини найкращого наближення поліномами $t_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \in T_{n_1 n_2}$ функцій $f \in \in L$, які зображаються тригонометричними рядами з коефіцієнтами, що задовольняють двовимірний аналог умов Боаса – Теляковського [5] (теорема 1).

Спочатку отримаємо кілька допоміжних оцінок, що будуть використані при доведенні теорем $1-3$.

Введемо деякі позначення. Нехай $P^{(\mu\nu)} := P_1^{(\mu)} \times P_2^{(\nu)}$, $\mu, \nu = \overline{1, 3}$, де

$$P_i^{(1)} := \left\{l_i \in N_0 : 0 \leq l_i \leq n_i - \left[\frac{n_i}{2}\right] - 1\right\},$$

$$P_i^{(2)} := \left\{l_i \in N_0 : n_i - \left[\frac{n_i}{2}\right] \leq l_i \leq n_i\right\},$$

$$P_i^{(3)} := \{l_i \in N_0 : l_i \geq n_i + 1\}, \quad n_i \in N_0, \quad i = 1, 2.$$

Покладемо також

$$L_i := \frac{l_i - n_i + [n_i/2]}{[n_i/2]+1}, \quad K_i := \frac{k_i}{[n_i/2]+1}, \quad \text{де} \quad n_i \in N_0, \quad l_i,\ k_i \in N_0, \quad i = 1, 2.$$

Лема 1. *Нехай послідовність* $\{\alpha_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *має вигляд*

$$\alpha_{l_1 l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(11)}; \\ L_2\, a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ L_1\, a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(21)}; \\ (L_1 + L_2 - L_1 L_2) a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(22)}; \\ a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad l_1 \in P_1^{(3)} \quad \text{або} \quad l_2 \in P_2^{(3)}, \end{cases} \tag{1}$$

де $\{a_{l_1 l_2}\}$ *— послідовність дійсних чисел така, що* $a_{l_1 l_2} \to 0$ *при* $l_1 + l_2 \to \infty$. *Тоді справедливими є оцінки*

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1 l_2}\right| \leq C \sum_{(l_1, l_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} \left|\Delta^{12} a_{l_1 l_2}\right|, \tag{2}$$

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}|\sigma_2(\alpha)| \le C\left(\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/4]}}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}|\sigma_2(a)|\right), \tag{3}$$

$$\sum_{l_1=2}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}|\sigma_1(\alpha)| \le C\left(\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4][n_2/2]}}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}|\sigma_1(a)|\right), \tag{4}$$

$$\sum_{l_1=2}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}|\sigma_{12}(\alpha)| \le C\left(\sum_{l_1=[n_1/4]+1}^{\infty}\sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right| + \sum_{l_1=[n_1/4]+1}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}|\sigma_2(\alpha)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l_1=2}^{\infty}\sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty}|\sigma_1(a)| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}|\sigma_{12}(a)|\right), \tag{5}$$

$$n_1,\ n_2 = 0, 1, \ldots .$$

Доведення. Знайдемо

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(11)}; \\ L_2\,\Delta^{12}a_{l_1l_2} - \dfrac{\Delta^1 a_{l_1\,l_2+1}}{[n_2/2]+1}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ L_1\,\Delta^{12}a_{l_1l_2} - \dfrac{\Delta^2 a_{l_1+1\,l_2}}{[n_1/2]+1}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(21)}; \\ (L_1 + L_2 - L_1L_2)\Delta^{12}a_{l_1l_2} - & \\ -(1-L_1)\dfrac{\Delta^1 a_{l_1\,l_2+1}}{[n_2/2]+1} - & \\ -(1-L_2)\dfrac{\Delta^2 a_{l_1+1\,l_2}}{[n_1/2]+1} - & \\ -\dfrac{a_{l_1+1\,l_2+1}}{([n_1/2]+1)([n_2/2]+1)}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(22)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}, & \text{якщо} \quad l_1 \in P_1^{(3)} \quad \text{або} \quad l_2 \in P_2^{(3)}. \end{cases}$$

Подамо $\{\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}\}$ у вигляді суми шести послідовностей $\{\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(j)}\}$, $j=\overline{1,6}$:

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2} = \sum_{j=1}^{6}\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(j)}, \tag{6}$$

де

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(1)} = \begin{cases} \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_2, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(13)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_2(1-L_1), & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(22)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}(1-L_1), & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(23)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad l_1 \in P_1^{(3)} \quad \text{або} \quad l_2 \in P_2^{(1)}, \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(2)}_{l_1l_2} = \begin{cases} \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_1, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(21)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_1(1-L_2), & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(22)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(31)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}(1-L_2), & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(32)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad l_1\in P_1^{(1)} \quad \text{або} \quad l_2\in P_2^{(3)}, \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(3)}_{l_1l_2} = \begin{cases} \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_1L_2, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(22)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_1, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(23)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}L_2, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(32)}; \\ \Delta^{12}a_{l_1l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(33)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad l_1\in P_1^{(1)} \quad \text{або} \quad l_2\in P_2^{(1)}, \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1l_2} = \begin{cases} -\dfrac{\Delta^1 a_{l_1\,l_2+1}}{[n_2/2]+1}, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(12)}; \\ -\dfrac{\Delta^1 a_{l_1\,l_2+1}}{[n_2/2]+1}(1-L_1), & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(22)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus(P^{(12)}\cup P^{(22)}), \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(5)}_{l_1l_2} = \begin{cases} -\dfrac{\Delta^2 a_{l_1+1\,l_2}}{[n_1/2]+1}, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(21)}; \\ -\dfrac{\Delta^2 a_{l_1+1\,l_2}}{[n_1/2]+1}(1-L_2), & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(22)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus(P^{(21)}\cup P^{(22)}), \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(6)}_{l_1l_2} = \begin{cases} -\dfrac{a_{l_1+1\,l_2+1}}{([n_1/2]+1)([n_2/2]+1)}, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in P^{(22)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad (l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus P^{(22)}. \end{cases}$$

Для $\{\Delta^{12}\alpha^{(j)}_{l_1l_2}\}$, $j=\overline{1,6}$, будемо використовувати позначення $\sigma_{12}(\alpha^{(j)})$, $\sigma_i(\alpha^{(j)})$, $i=1,2$, аналогічні введеним вище.

Домовимось надалі вважати рівними нулю суми, у яких нижня межа більша за верхню.

Доведемо оцінку (2). Враховуючи (6), отримаємо

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}\right| \le \sum_{j=1}^{6}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha^{(j)}_{l_1l_2}\right|. \tag{7}$$

Для кожного j, $j=\overline{1,6}$, оцінимо суму в правій частині (7):

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1l_2}\right| = \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\left(\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}L_2\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\right) + \sum_{l_1=n_1-[n_1/2]}^{n_1}(1-L_1)\left(\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}L_2\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right| + \right.$$

$$+\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\Bigg) \le \sum_{l_1=0}^{n_1}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|. \tag{8}$$

Наступні дві нерівності одержуємо аналогічно:

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(2)}\right| \le \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{n_2}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|, \tag{9}$$

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(3)}\right| \le \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|. \tag{10}$$

Далі

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(4)}\right| =$$

$$= \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]}^{n_2}\left(\sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\frac{\left|\Delta^{1}a_{l_1\,l_2+1}\right|}{[n_2/2]+1} + \sum_{l_1=n_1-[n_1/2]}^{n_1}(1-L_1)\frac{\left|\Delta^{1}a_{l_1\,l_2+1}\right|}{[n_2/2]+1}\right) \le$$

$$\le \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2+1}\frac{1}{[n_2/2]+1}\left(\sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\sum_{i=l_2}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1i}\right| + \sum_{l_1=n_1-[n_1/2]}^{n_1}\sum_{i=l_2}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1i}\right|\right) \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|. \tag{11}$$

Аналогічно (11) знаходимо

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(5)}\right| \le \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{n_2}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|, \tag{12}$$

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(6)}\right| \le \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|. \tag{13}$$

Таким чином, з (7), враховуючи (8) – (13), отримуємо оцінку (2).

Доведемо оцінку (3). Нехай

$$S(\alpha) := \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}\left|\sigma_2(\alpha)\right|. \tag{14}$$

Аналогічні ряди для $\{\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(j)}\}$, $j=\overline{1,6}$, будемо позначати через $S(\alpha^{(j)})$. Якщо $l_i \in P_i^{(\mu)}$, $i=1,2$, $\mu=\overline{1,3}$, то для відповідного доданка в сумі (14) використовуватимемо позначення $S_{P_i^{(\mu)}}(\alpha)$; якщо ж $(l_1, l_2) \in P^{(\mu\nu)}$, $\mu,\nu=\overline{1,3}$, — то позначення $S_{P^{(\mu\nu)}}(\alpha)$ (так само і для послідовностей $\{\Delta^{12}\alpha_{l_1l_2}^{(j)}\}$, $j=\overline{1,6}$). При доведенні нерівності (5) та співвідношень (37), (39) (див. далі лему 2) будемо використовувати аналогічні позначення.

Подамо $S(\alpha)$ у вигляді

$$S(\alpha) = S_{P_1^{(1)}}(\alpha) + S_{P_1^{(2)}}(\alpha) + S_{P_1^{(3)}}(\alpha). \tag{15}$$

Зауважимо, що при оцінюванні доданків суми (15) дотримуватимемось методу, аналогічного [6] (лема 2).

Оцінимо $S_{P_1^{(1)}}(\alpha)$. Нехай $l_1 \in P_1^{(1)}$. Тоді сума (6) набере вигляду (інші доданки при $l_1 \in P_1^{(1)}$ дорівнюють нулю):

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1 l_2} = \Delta^{12}\alpha_{l_1 l_2}^{(1)} + \Delta^{12}\alpha_{l_1 l_2}^{(4)},$$

де

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1 l_2}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(11)}; \\ \Delta^{12} a_{l_1 l_2} L_2, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ \Delta^{12} a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(13)}, \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1 l_2}^{(4)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(11)}; \\ -\dfrac{\Delta^1 a_{l_1 l_2+1}}{[n_2/2]+1}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ 0, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(13)}, \end{cases}$$

і, отже,

$$S_{P_1^{(1)}}(\alpha) \le S_{P_1^{(1)}}(\alpha^{(1)}) + S_{P_1^{(1)}}(\alpha^{(4)}). \tag{16}$$

Подамо перший доданок нерівності (16) у вигляді

$$S_{P_1^{(1)}}(\alpha^{(1)}) = S_{P^{(11)}}(\alpha^{(1)}) + S_{P^{(12)}}(\alpha^{(1)}) + S_{P^{(13)}}(\alpha^{(1)}). \tag{17}$$

Нехай $l_1 \in P_1^{(1)}$, а $2 \le l_2 \le n_2 - [n_2/2]$. Тоді

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1\, l_2-k_2}^{(1)} = 0,$$

$$\Delta^{12}\alpha_{l_1\, l_2+k_2}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad k_2 \le n_2 - [n_2/2] - l_2; \\ \Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}(L_2 + K_2), & \text{якщо} \quad k_2 > n_2 - [n_2/2] - l_2, \end{cases}$$

$$S_{P^{(11)}}(\alpha^{(1)}) = \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{l_2=2}^{n_2-[n_2/2]} \left| \sum_{k_2=n_2-[n_2/2]-l_2+1}^{[l_2/2]} (L_2+K_2)\Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2} \right| \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \frac{1}{[n_2/2]+1} \sum_{l_2=[n_2/3]+1}^{n_2-[n_2/2]} \sum_{k_2=n_2-[n_2/2]-l_2+1}^{[l_2/2]} \left|\Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}\right| =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \frac{1}{[n_2/2]+1} \sum_{l_2=[n_2/3]+1}^{n_2-[n_2/2]} \sum_{k_2=n_2-[n_2/2]+1}^{l_2+[l_2/2]} \left|\Delta^{12} a_{l_1 k_2}\right| \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \frac{n_2 - [n_2/2] - [n_2/3]}{[n_2/2]+1} \sum_{k_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left|\Delta^{12} a_{l_1 k_2}\right| \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} \left|\Delta^{12} a_{l_1 l_2}\right|.$$

Таким чином,

$$S_{p^{(11)}}(\alpha^{(1)}) \le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} \left|\Delta^{12} a_{l_1 l_2}\right|. \tag{18}$$

Нехай $l_1 \in P_1^{(1)}$, а $n_2-[n_2/2]+1 \le l_2 \le n_2$. Тоді

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1\, l_2-k_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad k_2 \ge l_2 - n_2 + [n_2/2]; \\ \Delta^{12} a_{l_1\, l_2-k_2}(L_2 - K_2), & \text{якщо} \quad k_2 < l_2 - n_2 + [n_2/2], \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1\, l_2+k_2} = \begin{cases} \Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}(L_2 + K_2), & \text{якщо} \quad k_2 \le n_2 - l_2; \\ \Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}, & \text{якщо} \quad k_2 > n_2 - l_2. \end{cases}$$

Має місце нерівність

$$S_{p^{(12)}}(\alpha^{(1)}) \le$$
$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \left(\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left|\sigma_2(\alpha^{(1)}) - L_2\sigma_2(a)\right| + \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left|L_2\sigma_2(a)\right| \right).$$

Оцінимо

$$\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left|\sigma_2(\alpha^{(1)}) - L_2\sigma_2(a)\right| = \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left| -\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1} K_2 \frac{\Delta^{12} a_{l_1\, l_2-k_2}}{k_2} - \right.$$
$$- \sum_{k_2=l_2-n_2+[n_2/2]}^{[l_2/2]} L_2 \frac{\Delta^{12} a_{l_1\, l_2-k_2}}{k_2} - \sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],\, n_2-l_2)} K_2 \frac{\Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}}{k_2} +$$
$$\left. + \sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]} (L_2 - 1) \frac{\Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}}{k_2} \right| \le$$
$$\le \frac{1}{[n_2/2]+1} \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \sum_{k_2=1}^{[l_2/2]} \left(\left|\Delta^{12} a_{l_1\, l_2-k_2}\right| + \left|\Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}\right| \right) \le$$
$$\le \frac{1}{[n_2/2]+1} \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \sum_{j=l_2-[l_2/2]}^{l_2+[l_2/2]} \left|\Delta^{12} a_{l_1 j}\right| \le$$
$$\le \sum_{j=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]} \left|\Delta^{12} a_{l_1 j}\right| \le \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty} \left|\Delta^{12} a_{l_1 l_2}\right|.$$

Тоді

$$S_{p^{(12)}}(\alpha^{(1)}) \le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \left(\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left|\sigma_2(a)\right| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty} \left|\Delta^{12} a_{l_1 l_2}\right| \right). \tag{19}$$

Нехай $l_1 \in P_1^{(1)}$, а $l_2 \ge n_2+1$. Тоді

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1\, l_2-k_2} = \begin{cases} \Delta^{12} a_{l_1\, l_2-k_2}(L_2 - K_2), & \text{якщо} \quad k_2 \ge l_2 - n_2; \\ \Delta^{12} a_{l_1\, l_2-k_2}, & \text{якщо} \quad k_2 < l_2 - n_2, \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1\, l_2+k_2} = \Delta^{12} a_{l_1\, l_2+k_2}.$$

Має місце нерівність

$$S_{p^{(13)}}(\alpha^{(1)}) \le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\left(\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\sigma_2(\alpha^{(1)})-\sigma_2(a)\right| + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\sigma_2(a)\right|\right).$$

Оцінимо

$$\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\sigma_2(\alpha^{(1)})-\sigma_2(a)\right| = \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\sum_{k_2=l_2-n_2}^{[l_2/2]}(L_2-K_2-1)\frac{\Delta^{12}a_{l_1\,l_2-k_2}}{k_2}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{[n_2/2]+1}\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\sum_{k_2=l_2-n_2}^{[l_2/2]}\left|\Delta^{12}a_{l_1\,l_2-k_2}\right| \le \frac{1}{[n_2/2]+1}\sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2}\sum_{j=[l_2/2]}^{n_2}\left|\Delta^{12}a_{l_1 j}\right| \le$$

$$\le \frac{n_2}{[n_2/2]+1}\sum_{j=[(n_2+1)/2]}^{n_2}\left|\Delta^{12}a_{l_1 j}\right| \le C\sum_{l_2=[(n_2+1)/2]}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right|.$$

Тоді

$$S_{p^{(13)}}(\alpha^{(1)}) \le C\sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\left(\sum_{l_2=n_2+1}^{\infty}\left|\sigma_2(a)\right| + \sum_{l_2=[(n_2+1)/2]}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right|\right). \tag{20}$$

Отже, з (17), враховуючи (18) – (20), одержуємо

$$S_{P_1^{(1)}}(\alpha^{(1)}) \le C\sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\left(\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\sigma_2(a)\right| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right|\right). \tag{21}$$

Тепер оцінимо другий доданок нерівності (16). Для цього побудуємо послідовність $\{\Delta^2(\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1 l_2})\}$:

$$\Delta^2(\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1 l_2}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } l_1 \in P_1^{(1)}, \quad 0 \le l_2 \le n_2-[n_2/2]-2; \\ \dfrac{\Delta^1 a_{l_1\,n_2-[n_2/2]+1}}{[n_2/2]+1}, & \text{якщо } l_1 \in P_1^{(1)}, \quad l_2 = n_2-[n_2/2]-1; \\ -\dfrac{\Delta^{12}a_{l_1\,l_2+1}}{[n_2/2]+1}, & \text{якщо } l_1 \in P_1^{(1)}, \quad n_2-[n_2/2] \le l_2 \le n_2-1; \\ -\dfrac{\Delta^1 a_{l_1\,n_2+1}}{[n_2/2]+1}, & \text{якщо } l_1 \in P_1^{(1)}, \quad l_2 = n_2; \\ 0, & \text{якщо } l_1 \in P_1^{(1)}, \quad l_2 \ge n_2+1. \end{cases}$$

Отже,

$$S_{P_1^{(1)}}(\alpha^{(4)}) = \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\sum_{l_2=2}^{\infty}\left|\sigma_2(\alpha^{(4)})\right| \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\sum_{l_2=2}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{[l_2/2]}\frac{1}{k_2}\left|\sum_{j=l_2-k_2}^{l_2+k_2-1}\Delta^2(\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1 j})\right| \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{l_2=2k_2}^{\infty}\frac{1}{k_2}\sum_{j=l_2-k_2}^{l_2+k_2-1}\left|\Delta^2(\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1 j})\right| \le \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\sum_{k_2=1}^{\infty}\sum_{j=k_2}^{\infty}\frac{1}{k_2}\times$$

$$\times\sum_{l_2=j-k_2+1}^{j+k_2}\left|\Delta^2(\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1 j})\right| = 2\sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{j}\left|\Delta^2(\Delta^{12}\alpha^{(4)}_{l_1 j})\right| =$$

$$= C \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{j=1}^{\infty} j \left| \Delta^2 (\Delta^{12} \alpha_{l_1 j}^{(4)}) \right| = C \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \left(\frac{n_2 - [n_2/2] - 1}{[n_2/2]+1} \left| \Delta^1 a_{l_1\, n_2-[n_2/2]+1} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[n_2/2]+1} \sum_{j=n_2-[n_2/2]}^{n_2-1} j \left| \Delta^{12} a_{l_1\, j+1} \right| + \frac{n_2}{[n_2/2]+1} \left| \Delta^1 a_{l_1\, n_2+1} \right| \right) \le$$

$$\le C \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \left(\left| \Delta^1 a_{l_1\, n_2-[n_2/2]+1} \right| + \left| \Delta^1 a_{l_1\, n_2+1} \right| + \sum_{j=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \left| \Delta^{12} a_{l_1 j} \right| \right) \le$$

$$\le C \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1 l_2} \right|.$$

Таким чином,

$$S_{P_1^{(1)}}(\alpha^{(4)}) \le C \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1 l_2} \right|. \tag{22}$$

З нерівності (16), враховуючи (21) та (22), одержуємо

$$S_{P_1^{(1)}}(\alpha) \le C \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \left(\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} |\sigma_2(a)| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1 l_2} \right| \right). \tag{23}$$

Другий доданок виразу (15) оцінюється аналогічно:

$$S_{P_1^{(2)}}(\alpha) \le C \left(\sum_{(l_1, l_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} |\sigma_2(a)| + \sum_{(l_1, l_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/4]}}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1 l_2} \right| \right). \tag{24}$$

Оскільки при $l_1 \in P_1^{(3)}$ $\Delta^{12} \alpha_{l_1 l_2} = \Delta^{12} a_{l_1 l_2}$, то третій доданок виразу (15)

$$S_{P_1^{(3)}}(\alpha) = \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=2}^{\infty} |\sigma_2(a)|. \tag{25}$$

Таким чином, з (15), враховуючи (23) – (25), одержуємо (3). Аналогічно доводиться оцінка (4).

Доведемо нерівність (5). Нехай

$$W(\alpha) := \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=2}^{\infty} |\sigma_{12}(\alpha)|.$$

Враховуючи (6), маємо

$$W(\alpha) \le \sum_{j=1}^{6} W(\alpha^{(j)}). \tag{26}$$

Для кожного j, $j = \overline{1,6}$, оцінюватимемо величину $W(\alpha^{(j)})$, подаючи її у вигляді суми

$$W(\alpha^{(j)}) = \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} W_{p^{(\mu\nu)}}(\alpha^{(j)}). \tag{27}$$

Оцінимо $W(\alpha^{(1)})$.

1. Нехай $2 \le l_1 \le n_1 - [n_1/2]$, $2 \le l_2 \le n_2 - [n_2/2]$. Тоді

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1-k_1\,l_2-k_2} = 0, \qquad \Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1+k_1\,l_2-k_2} = 0,$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1-k_1\,l_2+k_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 1 \le k_1 \le [l_1/2], \\ & k_2 \le n_2-[n_2/2]-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2+k_2}(L_2+K_2), & \text{якщо } 1 \le k_1 \le [l_1/2], \\ & k_2 > n_2-[n_2/2]-l_2; \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1+k_1\,l_2+k_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k_1 \le n_1-[n_1/2]-l_1, \\ & k_2 \le n_2-[n_2/2]-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}(L_2+K_2), & \text{якщо } k_1 \le n_1-[n_1/2]-l_1, \\ & k_2 > n_2-[n_2/2]-l_2; \\ 0, & \text{якщо } k_1 > n_1-[n_1/2]-l_1, \\ & k_2 \le n_2-[n_2/2]-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}(L_2+K_2)\times & \\ \times(1-(L_1+K_1)), & \text{якщо } k_1 > n_1-[n_1/2]-l_1, \\ & k_2 > n_2-[n_2/2]-l_2; \end{cases}$$

$$r_{p^{(11)}}(\alpha^{(1)}) = \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=2}^{n_2-[n_2/2]}\left| -\sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\sum_{k_2=n_2-[n_2/2]-l_2+1}^{[l_2/2]} \frac{\Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}(L_2+K_2) + \right.$$

$$+ \sum_{k_2=n_2-[n_2/2]-l_2+1}^{[l_1/2]}\left(\sum_{k_1=1}^{\min([l_1/2],\,n_1-[n_1/2]-l_1)} \frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}(L_2+K_2) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k_1=n_1-[n_1/2]-l_1+1}^{[l_1/2]} \frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}(1-(L_1+K_1))(L_2+K_2)\right)\right| \le \frac{1}{[n_2/2]+1}\times$$

$$\times \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=2}^{n_2-[n_2/2]}\sum_{k_2=n_2-[n_2/2]+1}^{l_2+[l_2/2]}\left|\sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\frac{\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1k_2})}{k_1} + \sum_{k_1=n_1-[n_1/2]-l_1+1}^{[l_1/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,k_2}}{k_1}\times\right.$$

$$\left.\times\,(L_1+K_1)\right| \le \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2-[n_2/4]+1}\left|\sigma_1(a)\right| + \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{n_1-[n_1/4]+1}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2-[n_2/4]+1}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|.$$

2. Нехай $2 \le l_1 \le n_1-[n_1/2]$, $n_2-[n_2/2]+1 \le l_2 \le n_2$. Тоді

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1-k_1\,l_2-k_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 1 \le k_1 \le [l_1/2], \\ & k_2 \ge l_2-n_2+[n_2/2]; \\ \Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2-k_2}(L_2-K_2), & \text{якщо } 1 \le k_1 \le [l_1/2], \\ & k_2 < l_2-n_2+[n_2/2], \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1-k_1\,l_2+k_2} = \begin{cases} \Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2+k_2}(L_2+K_2), & \text{якщо } 1 \le k_1 \le [l_1/2], \\ & k_2 \le n_2-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2+k_2}, & \text{якщо } 1 \le k_1 \le [l_1/2], \\ & k_2 > n_2-l_2, \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1+k_1\,l_2-k_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k_1 \le n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 \ge l_2-n_2+[n_2/2]; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}(L_2-K_2), & \text{якщо } k_1 \le n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 < l_2-n_2+[n_2/2]; \\ 0, & \text{якщо } k_1 > n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 \ge l_2-n_2+[n_2/2]; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}(L_2-K_2)\times(1-(L_1+K_1)), & \text{якщо } k_1 > n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 < l_2-n_2+[n_2/2], \end{cases}$$

$$\Delta^{12}\alpha^{(1)}_{l_1+k_1\,l_2+k_2} = \begin{cases} \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}(L_2+K_2), & \text{якщо } k_1 \le n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 \le n_2-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}, & \text{якщо } k_1 \le n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 > n_2-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}(L_2+K_2)\times(1-(L_1+K_1)), & \text{якщо } k_1 > n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 \le n_2-l_2; \\ \Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}\times(1-(L_1+K_1)), & \text{якщо } k_1 > n_1-[n_1/2]-l_1,\ k_2 > n_2-l_2. \end{cases}$$

має місце нерівність

$$W_{p^{(12)}}(\alpha^{(1)}) \le \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\ \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}\left(\left|\sigma_{12}(\alpha^{(1)})-L_2\sigma_{12}(a)\right|+\left|L_2\sigma_{12}(a)\right|\right). \quad (28)$$

Оцінимо

$$\sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\ \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}\left|\sigma_{12}(\alpha^{(1)})-L_2\sigma_{12}(a)\right| =$$

$$= \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\ \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}\Bigg|-\sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\Bigg(\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1}K_2\frac{\Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2-k_2}}{k_1k_2} +$$

$$+ L_2\sum_{k_2=l_2-n_2+[n_2/2]}^{[l_2/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2-k_2}}{k_1k_2} + \sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],n_2-l_2)}K_2\frac{\Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2} +$$

$$+ (1-L_2)\sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1-k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}\Bigg) + \sum_{k_1=1}^{\min([l_1/2],n_1-[n_1/2]-l_1)}\Bigg(\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1}K_2\times$$

$$\times\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}}{k_1k_2} + L_2\sum_{k_2=l_2-n_2+[n_2/2]}^{[l_2/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}}{k_1k_2}\Bigg) +$$

$$+\sum_{k_1=n_1-[n_1/2]-l_1+1}^{[l_1/2]}\left(\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1}(K_2+(L_1+K_1)(L_2-K_2))\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}}{k_1k_2}+\right.$$

$$\left.+L_2\sum_{k_2=l_2-n_2+[n_2/2]}^{[l_2/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}}{k_1k_2}\right)+\sum_{k_1=1}^{\min([l_1/2],n_1-[n_1/2]-l_1)}\left(\sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],n_2-l_2)}K_2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}+(1-L_2)\sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}\right)+$$

$$+\sum_{k_1=n_1-[n_1/2]-l_1+1}^{[l_1/2]}\left(\sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],n_2-l_2)}(K_2-(L_1+K_1)(L_2+K_2))\times\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}+\sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]}((1-L_2)-(L_1+K_1))\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_1k_2}\right)\right|=$$

$$=\sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}\left|-\sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\left(\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1}\frac{1}{([n_2/2]+1)k_1}\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1\,l_2-k_2})+\right.\right.$$

$$+\sum_{k_2=l_2-n_2+[n_2/2]}^{[l_2/2]}L_2\frac{1}{k_1k_2}\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1\,l_2-k_2})+$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],n_2-l_2)}\frac{1}{([n_2/2]+1)k_1}\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1\,l_2+k_2})+\sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]}(1-L_2)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{k_1k_2}\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1\,l_2+k_2})\right)+\sum_{k_1=n_1-[n_1/2]-l_1+1}^{[l_1/2]}(L_1+K_1)\frac{1}{k_1}\times$$

$$\times\left(\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1}(L_2-K_2)\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}}{k_2}-\sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],n_2-l_2)}(L_2+K_2)\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_2}\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]}\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}}{k_2}\right)\right|\le\sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}\left(\frac{1}{[n_2/2]+1}\times\right.$$

$$\times\sum_{k_2=1}^{[l_2/2]}\left(\left|\sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\frac{1}{k_1}\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1\,l_2-k_2})\right|+\left|\sum_{k_1=1}^{[l_1/2]}\frac{1}{k_1}\nabla^1_{k_1}(\Delta^{12}a_{l_1\,l_2+k_2})\right|\right)+$$

$$+\sum_{k_1=n_1-[n_1/2]-l_1+1}^{[l_1/2]}\frac{1}{[n_1/2]+1}\left|L_2\sum_{k_2=1}^{[l_2/2]}\frac{1}{k_2}\nabla^2_{k_2}(\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2})-\frac{1}{[n_2/2]+1}\times\right.$$

$$\times\sum_{k_2=1}^{l_2-n_2+[n_2/2]-1}\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}-\sum_{k_2=l_2-n_2+[n_2/2]}^{[l_2/2]}L_2\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2-k_2}}{k_2}-$$

$$-\frac{1}{[n_2/2]+1}\sum_{k_2=1}^{\min([l_2/2],n_2-l_2)}\Delta^{12}a_{l_1+k_1\,l_2+k_2}-$$

$$- \sum_{k_2=n_2-l_2+1}^{[l_2/2]} (1-L_2)\frac{\Delta^{12}a_{l_1+k_1\, l_2+k_2}}{k_2}\Bigg|\Bigg) \le$$

$$\le \sum_{l_1=n_1-[n_1/2]+1}^{n_1-[n_1/4]+1}\left(\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2-1}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2-[n_2/2]}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+2}^{n_2+[n_2/2]}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| + \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2}\left|\sigma_2(a)\right|\right) + \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\sigma_1(a)\right| \le$$

$$\le C\left(\sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{n_1-[n_1/4]+1}\left(\sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| + \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\left|\sigma_2(a)\right|\right) + \sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\sigma_1(a)\right|\right).$$

Тоді з (28) випливає

$$W_{p(12)}(\alpha^{(1)}) \le C\left(\sum_{l_1=2}^{n_1-[n_1/2]}\left(\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\left|\sigma_{12}(a)\right| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\sigma_1(a)\right|\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{n_1-[n_1/4]+1}\left(\sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| + \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\left|\sigma_2(a)\right|\right)\right).$$

Оцінивши аналогічно всі доданки суми (27) при $j=1$ і об'єднавши одержані нерівності, будемо мати

$$W(\alpha^{(1)}) \le C\left(\sum_{l_1=2}^{n_1}\left(\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\sigma_{12}(a)\right| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\sigma_1(a)\right|\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l_1=[n_1/4]+1}^{n_1+[n_1/2]}\left(\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\sigma_2(a)\right| + \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{n_2+[n_2/2]}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right|\right)\right).$$

З нерівності (26), враховуючи отримані таким же способом оцінки величин $W(\alpha^{(j)})$ для $j=\overline{2,6}$, одержуємо (5).

Лему 1 доведено.

Теорема 1. *Якщо елементи послідовності* $\{a_{l_1 l_2}\}$ *задовольняють умови*

$$a_{l_1 l_2} \to 0 \quad \text{при} \quad l_1 + l_2 \to \infty,$$

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| < \infty, \tag{29}$$

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}\left|\sigma_2(a)\right| < \infty, \tag{30}$$

$$\sum_{l_1=2}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\sigma_1(a)\right| < \infty, \tag{31}$$

$$\sum_{l_1=2}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}\left|\sigma_{12}(a)\right| < \infty, \tag{32}$$

то для функції

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} a_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \tag{33}$$

$$E_{n_1 n_2}(f) \le C\left(\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/4][n_2/4]}} \left|\Delta^{12} a_{l_1 l_2}\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/4][n_2/2]}} |\sigma_2(a)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/4]}} |\sigma_1(a)| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} |\sigma_{12}(a)| \right), \quad n_1, n_2 = 0, 1, \ldots . \tag{34}$$

Доведення. Зауважимо, що при виконанні умов теореми ряд (33) збігається скрізь в $T^2 = [-\pi, \pi]^2$, за винятком хіба що точок множини $E_0^2 = \{(x_1, x_2) \in \in T^2 : x_1 x_2 = 0\}$, збіжність рівномірна в $T_\varepsilon^2 = [\varepsilon; \pi]^2$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2$, функція $f(x_1, x_2)$ інтегровна на T^2 і ряд (33) є її рядом Фур'є [5] (теорема 1).

Нехай $t^*_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ — поліном найкращого наближення функції $f(x_1, x_2)$, а $V^{n_1 n_2}_{n_1/2\, n_2/2}(f; x_1, x_2)$ — сума Валле Пуссена вигляду

$$V^{n_1 n_2}_{n_1/2\, n_2/2}(f; x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma} \lambda^{(n_1 n_2)}_{l_1 l_2} a_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2,$$

де

$$\lambda^{(n_1 n_2)}_{l_1 l_2} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(11)}; \\ 1 - L_2, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ 1 - L_1, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(21)}; \\ (1 - L_1)(1 - L_2), & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(22)}. \end{cases}$$

Тоді

$$E_{n_1 n_2}(f) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x_1, x_2) - t^*_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right| dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x_1, x_2) - V^{n_1 n_2}_{n_1/2\, n_2/2}(f; x_1, x_2) \right| dx_1\, dx_2 =$$

$$= 4\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \left| \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} \alpha_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \right| dx_1\, dx_2, \tag{35}$$

де $\alpha_{l_1 l_2}$ визначається формулою (1).

Умови, аналогічні (29) – (32), виконуватимуться і для елементів послідовності $\{\alpha_{l_1 l_2}\}$, оскільки за лемою 1 мають місце оцінки (2) – (5), а ряди (29) – (32) збігаються. Крім того, $\alpha_{l_1 l_2} \to 0$ при $l_1 + l_2 \to \infty$ (оскільки $a_{l_1 l_2} \to 0$). Таким чином, за теоремою 1 з [5]

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \left| \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} \alpha_{l_1 l_2} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \right| dx_1\, dx_2 \le C\left(\sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \left|\Delta^{12} \alpha_{l_1 l_2}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=2}^{\infty} |\sigma_2(\alpha)| + \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} |\sigma_1(\alpha)| + \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=2}^{\infty} |\sigma_{12}(\alpha)| \right). \tag{36}$$

Враховуючи (35), (36) та оцінки (2) – (5), одержуємо (34), що і доводить теорему 1.

Лема 2. *Якщо послідовність* $\{\alpha_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *визначається за формулою* (1), *то справджуються оцінки*

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}\right|}{l_2} \leq C \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} \frac{\left|\Delta^1 a_{l_1 l_2}\right|}{l_2}, \tag{37}$$

$$\sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{\left|\Delta^2 \alpha_{l_1 l_2}\right|}{l_1} \leq C \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} \frac{\left|\Delta^2 a_{l_1 l_2}\right|}{l_1}, \tag{38}$$

$$\sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{1}{l_2}\left|\delta_1(\alpha)\right| \leq C\left(\sum_{l_1=[n_1/4]+1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{n_2+1} \frac{\left|\Delta^1 a_{l_1 l_2}\right|}{l_2} + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} \frac{1}{l_2}\left|\delta_1(a)\right| \right), \tag{39}$$

$$\sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=2}^{\infty} \frac{1}{l_1}\left|\delta_2(\alpha)\right| \leq C\left(\sum_{l_1=1}^{n_1+1} \sum_{l_2=[n_2/4]+1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^2 a_{l_1 l_2}\right|}{l_1} + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} \frac{1}{l_1}\left|\delta_2(a)\right| \right), \tag{40}$$

$$\sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{\left|\alpha_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2} \leq C \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2 \setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}} \frac{\left|a_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2}, \tag{41}$$

$$n_1,\ n_2 = 0, 1, \ldots .$$

Доведення. Встановимо оцінку (37). Знайдемо

$$\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(11)}; \\ L_2 \Delta^1 a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(12)}; \\ L_1 \Delta^1 a_{l_1 l_2} - \dfrac{a_{l_1+1\, l_2}}{[n_1/2]+1}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(21)}; \\ (1-L_2)\left(L_1 \Delta^1 a_{l_1 l_2} - \dfrac{a_{l_1+1\, l_2}}{[n_1/2]+1} \right) + & \\ + L_2 \Delta^1 a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad (l_1, l_2) \in P^{(22)}; \\ \Delta^1 a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad l_1 \in P_1^{(3)} \quad \text{або} \quad l_2 \in P_2^{(3)}. \end{cases}$$

Позначивши

$$R(\alpha) := \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}\right|}{l_2},$$

подамо $R(\alpha)$ у вигляді суми

$$R(\alpha) = R_{P_1^{(1)}}(\alpha) + R_{P_1^{(2)}}(\alpha) + R_{P_1^{(3)}}(\alpha) \tag{42}$$

і оцінимо кожен її доданок:

$$R_{P_1^{(1)}}(\alpha) = \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \left(\sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} L_2 \frac{\left|\Delta^1 a_{l_1 l_2}\right|}{l_2} + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^1 a_{l_1 l_2}\right|}{l_2} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{l_1=0}^{n_1-[n_1/2]-1} \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} \frac{\left|\Delta^1 a_{l_1 l_2}\right|}{l_2},$$

$$R_{P_1^{(2)}}(\alpha) \le \sum_{l_1=n_1-[n_1/2]}^{n_1} \left(\sum_{l_2=1}^{n_2-[n_2/2]} \frac{1}{l_2} \left(L_1 \left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right| + \frac{1}{[n_1/2]+1} \sum_{j=l_1+1}^{\infty} \left| \Delta^1 a_{j l_2} \right| \right) + \right.$$

$$+ \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2} \frac{1}{l_2} \left((1-L_2) \left(L_1 \left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right| + \frac{1}{[n_1/2]+1} \sum_{j=l_1+1}^{\infty} \left| \Delta^1 a_{j l_2} \right| \right) + \right.$$

$$\left. \left. + L_2 \left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right| \right) + \sum_{l_2=n_2+1}^{\infty} \frac{\left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right|}{l_2} \right) \le C \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{n_2} \frac{\left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right|}{l_2} +$$

$$+ \sum_{l_1=n_1-[n_1/2]}^{n_1} \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty} \frac{\left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right|}{l_2},$$

$$R_{P_1^{(3)}}(\alpha) = \sum_{l_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{\left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right|}{l_2}.$$

Тоді з (42) і з одержаних співвідношень випливає (37). Аналогічно доводиться оцінка (38).

Нехай

$$G(\alpha) := \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{1}{l_2} |\delta_1(\alpha)|.$$

Подамо $G(\alpha)$ у вигляді

$$G(\alpha) = G_{P_2^{(1)}}(\alpha) + G_{P_2^{(2)}}(\alpha) + G_{P_2^{(3)}}(\alpha). \tag{43}$$

Перший доданок в (43) оцінюється аналогічно (21):

$$G_{P_2^{(1)}}(\alpha) \le C \sum_{l_2=1}^{n_2-[n_2/2]} \frac{1}{l_2} \left(\sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty} |\delta_1(a)| + \sum_{l_1=[n_1/4]+1}^{\infty} \left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right| \right).$$

Якщо $l_2 \in P_2^{(2)}$, то $\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}$ можна подати у вигляді суми

$$\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2} = \Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}^{(1)} + \Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}^{(2)},$$

де $\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}^{(1)} := L_2 \Delta^1 a_{l_1 l_2}$, $\Delta^1 \alpha_{l_1 l_2}^{(2)} := \Delta^1 \alpha_{l_1 l_2} - L_2 \Delta^1 a_{l_1 l_2}$. Тоді

$$G_{P_2^{(2)}}(\alpha^{(1)}) \le C \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2+1} \frac{1}{l_2} |\delta_1(a)|,$$

а $G_{P_2^{(2)}}(\alpha^{(2)})$ оцінюється аналогічно (21). Отже,

$$G_{P_2^{(2)}}(\alpha) \le G_{P_2^{(2)}}(\alpha^{(1)}) + G_{P_2^{(2)}}(\alpha^{(2)}) \le$$

$$\le C \sum_{l_2=n_2-[n_2/2]+1}^{n_2+1} \frac{1}{l_2} \left(\sum_{l_1=2}^{\infty} |\delta_1(a)| + \sum_{l_1=[n_1/4]+1}^{\infty} \left| \Delta^1 a_{l_1 l_2} \right| \right).$$

Останній доданок в (43)

$$G_{P_2^{(3)}}(\alpha) \cdot = \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{l_2=n_2+2}^{\infty} \frac{1}{l_2} |\delta_1(a)|.$$

Таким чином, з (43), враховуючи оцінки для $G_{P_2^{(1)}}(\alpha)$, $G_{P_2^{(2)}}(\alpha)$, $G_{P_2^{(3)}}(\alpha)$, отримуємо (39). Аналогічно доводиться співвідношення (40).

Враховуючи (1), легко одержуємо нерівність (41).

Лему доведено.

Теорема 2. *Якщо елементи послідовності* $\{b_{l_1 l_2}\}$ *задовольняють умови теореми* 1 *і*

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2} < \infty, \qquad \sum_{l_1=2}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\frac{1}{l_2}\left|\delta_1(b)\right| < \infty, \tag{44}$$

то для функції $f(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty} 2^{-\gamma} b_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \sin l_2 x_2$

$$E_{n_1 n_2}(f) \le C\left(\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4][n_2/4]}}\left|\Delta^{12} b_{l_1 l_2}\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4][n_2/2]}}\left|\sigma_2(b)\right| + \right.$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/4]}}\left|\sigma_1(b)\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}\left|\sigma_{12}(b)\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4]n_2}}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2} +$$

$$\left. + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2]n_2}}\frac{1}{l_2}\left|\delta_1(b)\right|\right), \quad n_1,\ n_2 = 0, 1, \ldots .$$

Теорема 2 доводиться аналогічно теоремі 1 з використанням оцінок (2) – (5), (37), (39), а також співвідношень

$$\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4][n_2/2]}}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2} = \sum_{l_1=0}^{[n_1/4]}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2} + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4]n_2}}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2} \le$$

$$\le \sum_{l_1=0}^{[n_1/4]}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12} b_{l_1 l_2}\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4]n_2}}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2},$$

оскільки при $0 \le l_1 \le [n_1/4]$

$$\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\frac{\left|\Delta^1 b_{l_1 l_2}\right|}{l_2} \le \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\frac{1}{l_2}\sum_{j=l_2}^{\infty}\left|\Delta^{12} b_{l_1 j}\right| \le \frac{n_2-[n_2/2]}{[n_2/2]+1}\sum_{j=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12} b_{l_1 j}\right| \le$$

$$\le \sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\Delta^{12} b_{l_1 l_2}\right|;$$

аналогічно

$$\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}\frac{1}{l_2}\left|\delta_1(b)\right| \le \sum_{l_1=0}^{[n_1/2]}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\left|\sigma_1(b)\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2]n_2}}\frac{1}{l_2}\left|\delta_1(b)\right|.$$

Використовуючи оцінки (2) – (5), (38), (40), можна одержати аналогічну теорему для функцій вигляду

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} c_{l_1 l_2}\sin l_1 x_1 \cos l_2 x_2 .$$

Теорема 3. *Якщо елементи послідовності* $\{d_{l_1 l_2}\}$ *задовольняють умови теореми* 1, (44) *і*

$$\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{\left|\Delta^2 d_{l_1 l_2}\right|}{l_1} < \infty, \quad \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=2}^{\infty}\frac{1}{l_1}\left|\delta_2(d)\right| < \infty, \quad \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2} < \infty,$$

то для функції $f(x_1, x_2) = \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty} d_{l_1 l_2}\sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2$

$$E_{n_1 n_2}(f) \le C\Bigg(\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4][n_2/4]}}\left|\Delta^{12} d_{l_1 l_2}\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4][n_2/2]}}\left|\sigma_2(d)\right| +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/4]}}\left|\sigma_1(d)\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}\Bigg(\left|\sigma_{12}(d)\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/4]n_2}}\frac{\left|\Delta^1 d_{l_1 l_2}\right|}{l_2} +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2]n_2}}\frac{1}{l_2}\left|\delta_1(d)\right| + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{n_1[n_2/4]}}\frac{\left|\Delta^2 d_{l_1 l_2}\right|}{l_1} + \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{n_1[n_2/2]}}\frac{1}{l_1}\left|\delta_2(d)\right| +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{n_1 n_2}}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2}\Bigg)\Bigg), \quad n_1,\ n_2 = 0, 1, \ldots .$$

Теорема 3 доводиться аналогічно теоремі 1 з використанням оцінок (2) – (5), (37) – (41), а також співвідношень

$$\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{[n_1/2][n_2/2]}}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2} = \sum_{l_1=1}^{n_1}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{n_2}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2} + \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{n_1}\sum_{l_2=1}^{[n_2/2]}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2} +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{n_1 n_2}}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2} \le \sum_{l_1=1}^{n_1}\sum_{l_2=[n_2/2]+1}^{\infty}\frac{\left|\Delta^2 d_{l_1 l_2}\right|}{l_1} + \sum_{l_1=[n_1/2]+1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{[n_2/2]}\frac{\left|\Delta^1 d_{l_1 l_2}\right|}{l_2} +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{n_1 n_2}}\frac{\left|d_{l_1 l_2}\right|}{l_1 l_2}.$$

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. *Баскаков В. А.* Линейные полиномиальные операторы с наилучшим порядком приближения. – Калинин: Калинин. ун-т, 1984. – 80 с.
3. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 6. – С. 1209 – 1236.
4. *Кононович Т. О.* Оцінка найкращого наближення тригонометричними поліномами функцій, що задовольняють умови Боаса – Теляковського // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – Т. 35. – С. 47 – 67.
5. *Задерей П. В.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 340 – 365.
6. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 65 – 97.

Одержано 11.07.2002