https://orcid.org/0000-0001-5183-9090
https://orcid.org/0000-0001-6951-4091

УДК 519.61:621.3

В.П. ВОЛОБОЕВ*, В.П. КЛИМЕНКО*

КОРРЕКТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ И ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННАЯ МАТРИЦА

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, г. Киев, Украина

Анотація. *Розглянуто новий підхід до розробки методів розв'язання некоректних задач, який полягає в тому, що пропонується коректно формулювати завдання, а не вирішувати некоректну задачу. Коректне формулювання виконується на етапі складання рівнянь, які описують фізичний об'єкт. Слід зазначити, що етап складання рівнянь у сучасній літературі незаслужено обійдено увагою. На прикладі розрахунку електричного кола показано, що погана обумовленість матриці СЛАР залежить від особливостей конкретного електричного кола, а саме, діапазону зміни величин параметрів компонент електричного кола, а також, що загальноприйнятий критерій визначення некоректності завдання по поганій обумовленості матриці або близькості матриці до виродження є необхідний, але недостатній. Визначено, що механізм виникнення некоректного формулювання опису лінійного електричного кола полягає в невдалому виборі змінних при складанні опису електричного кола. При коректному формулюванні запропоновано завдання враховувати параметри компонент конкретного електричного кола при виборі змінних СЛАР на етапі складання рівнянь. Показано, що в методі вузлових потенціалів і його модифікаціях неможливо реалізувати цілеспрямований вибір змінних при складанні рівнянь. Сформульовано вимоги до методу коректного формулювання опису лінійного електричного кола. Розрахунок модельного прикладу методом, який задовольняє сформульованим вимогам, підтвердив той факт, що завдання коректно сформульовано, а рішення стійке навіть у разі погано обумовленої матриці.*
Ключові слова: *некоректне завдання, погана обумовленість, система лінійних алгебраїчних рівнянь, метод вузлових потенціалів, електричне коло, коректне формулювання завдання, цілеспрямований вибір змінних.*

Аннотация. *Рассмотрен новый подход к разработке методов решения некорректных задач, заключающийся в том, что предлагается корректно формулировать задачу, а не решать некорректную задачу. Корректное формулирование выполняется на этапе составления уравнений, описывающих физический объект. Следует отметить, что этап составления уравнений в современной литературе незаслуженно обойден вниманием. На примере расчета электрической цепи показано, что плохая обусловленность матрицы СЛАУ зависит от особенностей конкретной электрической цепи, а именно, диапазона изменения величин параметров компонент электрической цепи, а также, что общепринятый критерий определения некорректности задачи по плохой обусловленности матрицы или близости матрицы к вырождению необходимый, но недостаточный. Определено, что механизм возникновения некорректной формулировки описания линейной электрической цепи заключается в неудачном выборе переменных при составлении описания электрической цепи. При корректной формулировке задачи предложено учитывать параметры компонент конкретной электрической цепи при выборе переменных СЛАУ на этапе составления уравнений. Показано, что в методе узловых потенциалов и его модификациях невозможно реализовать целенаправленный выбор переменных при составлении уравнений. Сформулированы требования к методу корректного формулирования описания линейной электрической цепи. Расчёт модельного примера методом, в котором реализованы сформулированные требования, подтвердил тот факт, что задача корректно сформулирована, а решение устойчивое даже в случае плохо обусловленной матрицы.*
Ключевые слова: *некорректная задача, плохая обусловленность, система линейных алгебраических уравнений, метод узловых потенциалов, электрическая цепь, корректная формулировка задачи, целенаправленный выбор переменных.*

Abstract. *A new approach to the development of methods for solving ill-posed problems is considered, consisting in the fact that it is proposed to formulate the problem correctly, and not to solve the incorrect problem. Correct formulation is performed at the stage of compiling equations describing the physical*

object. It should be noted that the stage of compiling equations in modern literature is undeservedly ignored. By the example of calculating the electrical circuit, it is shown that the poor conditioning of the SLAE matrix depends on the characteristics of a particular electrical circuit, namely, the range of variation of the parameters of the components of the electrical circuit, as well as the generally accepted criterion for determining the incorrectness of a problem by poor conditioning of the matrix or proximity of the matrix to degeneracy there is a necessary, but not enough. It is determined that the mechanism for the occurrence of an incorrect formulation of a description of a linear electric circuit consists in the unsuccessful choice of variables when compiling a description of an electric circuit. It is proposed, with the correct formulation of the problem, to take into account the parameters of the components of a particular electric circuit when choosing variables of SLAEs at the stage of preparing the equations. It is shown that in the method of nodal potentials and its modifications it is impossible to realize a purposeful choice of variables in the preparation of equations. The requirements to the method of correctly formulating a description of a linear electric circuit are formulated. The calculation of the model example by the method in which the formulated requirements are realized confirmed the fact that the problem is correctly formulated, and the solution is stable even in the case of a poorly conditioned matrix.
Keywords: *ill-posed problem, poor conditionality, system of linear algebraic equations, nodal potential method, electric circuit, correct formulation of the problem, purposeful choice of variables.*

DOI: 10.34121/1028-9763-2019-3-101-110

1. Введение

Применение моделирования становится неотъемлемой частью интеллектуальной деятельности человечества. Основным критерием оценки результатов моделирования становится достоверность результатов моделирования. Это требует новых подходов к разработке методов и алгоритмов описания сложных объектов и решения составленных описаний.

Известно классическое утверждение Ж. Адамара: «Аналитическая задача всегда корректно поставлена в смысле существования и единственности решения, непрерывной зависимости от данных задачи, когда есть механическое или физическое истолкование вопроса» [1, с. 38]. Приведенное выше утверждение или постулат Адамара [2, с. 113], по существу, подразумевает возможность «хорошей» (корректной) постановки любой физически содержательной задачи. Итак, Адамар и целый ряд других выдающихся ученых полагали, что любая физически интерпретируемая задача может быть корректно поставлена, но, как следует из современной научной литературы, преобладает совершенно противоположная точка зрения, а именно, оказалось, что большая часть практически важных задач некорректны.

2. Постановка задачи

Цель настоящего исследования состоит в обосновании и конструктивном воплощении утверждения Ж. Адамара о существовании корректных постановок задач, адекватно описывающих реальные процессы и явления. Прежде чем рассматривать вопросы, связанные с корректной постановкой задачи, приведем определение корректной задачи, сформулированное в математическом виде.

«Корректные и некорректные задачи**,** классы математических задач, которые различаются степенью определённости их решений. Многие математические задачи состоят в том, что по исходным данным u ищется решение z. При этом считается, что u и z связаны функциональной зависимостью $z = R(u)$. Задача называется корректной задачей (или корректно поставленной), если выполнены следующие условия (условия корректности):

1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных (существование решения);

2) каждым исходным данным u соответствует только одно решение (однозначность решения задачи);

3) решение устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному условию корректности, называются некорректными задачами (или некорректно поставленными)» [3].

При моделировании реальных физических объектов перечисленные условия корректности можно сформулировать следующим образом:

1) если модель физического (технического) объекта корректна, то решение существует;

2) если описание модели физического (технического) объекта корректно, то решение однозначно;

3) если решение описания модели физического объекта устойчиво, то достоверность результатов решения гарантирована.

В дальнейшем будут рассмотрены вопросы, связанные с корректным описанием модели линейной физической или технической задачи, представленной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В эпоху компьютерных технологий вместо многообразия методов описания физической (технической) задачи используется только один, а на этапе решения математического описания системы выбираются методы, решающие проблемные системы уравнений. В данном случае достоверность результатов зависит только от применяемых методов решения и вычислительных средств и не зависит от научного интеллекта пользователя и его понимания решаемой задачи. Как следует из обзора научной литературы, этапы составления математического описания системы и решения рассматриваются как независимые и несвязанные между собой. Это подтверждает само определение корректной задачи.

Системный подход будет применён к исследованию механизма возникновения некорректной формулировки физической (технической) задачи. Исследование механизма будет проведено как на этапе составления уравнений физического объекта, так и на этапе их решения на модельном примере. Предлагаются гарантированные средства корректной формулировки физической (технической) задачи.

3. Модельный пример

В качестве модельного примера выбран расчет линейной электрической цепи в связи с тем, что для описания электрических цепей известны различные методы описания. Расчет линейной электрической цепи в конечном счете сводится к составлению уравнений, описывающих цепь, и их решению. Поскольку все вычисления проводятся с конечным числом значащих цифр, то точность решения значительно теряется из-за ошибок округления. Как результат – неустойчивое решение. В настоящее время важнейшим «индикатором» для определения устойчивости решения является обусловленность матрицы СЛАУ. Обусловленность оценивает близость матрицы СЛАУ к вырождению и тем самым устойчивости решения, а число обусловленности является качественной оценкой обусловленности. Известно несколько различных определений обусловленности [7]. Наиболее часто для оценки обусловленности СЛАУ применяется спектральный критерий, который вошел практически во все учебники и монографии. За число обусловленности принимается величина æ, вычисляемая по формуле $æ = {}^{\lambda_{\max}}\!/_{\lambda_{\min}}$, где λ – собственные значения матрицы СЛАУ. Задачи, когда æ $> 10^4$, обычно считаются плохо обусловленными. В технической литературе считается, что в этом случае задача однозначно некорректная. Количественные критерии обусловленности в литературе отсутствуют.

Механизм возникновения некорректной формулировки будет определён в результате исследования зависимости устойчивости решения, в случае плохо обусловленной матрицы СЛАУ, при выполнении вычисления от конечного числа значащих цифр. Для этого выбранная электрическая цепь должна удовлетворять следующим требованиям. Узловые потенциалы, отсчитываемые от базового узла, совпадают с напряжениями на соответствующих компонентах. Диапазон изменения проводимостей компонент должен быть не менее 15 порядков, Считается, что он определяет обусловленность матрицы СЛАУ. На рис. 1 приведен граф электрической цепи вместе с компонентами в него входящими.

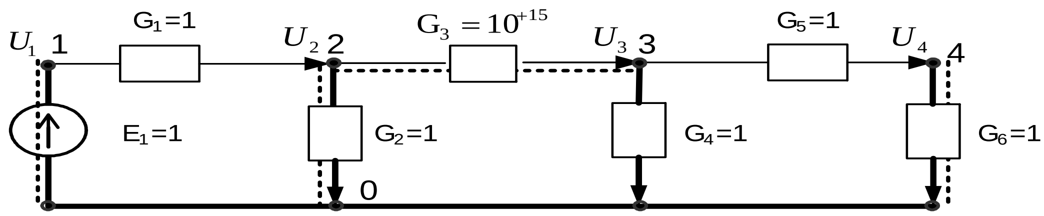

Рисунок 1 – Граф электрической цепи

Следующие обозначения приведены на рисунке: U_1, U_2, U_3, U_4 – узловые потенциалы электрической цепи отсчитываются от базового узла 0, E_1 – источник напряжения (внешнее воздействие). Связь между токами и напряжениями компонент описывается уравнением

$$I = GU, \tag{1}$$

где U – вектор напряжений компонент, I – вектор токов компонент, G – вектор проводимостей компонент. Узловые потенциалы совпадают с напряжениями $U_{E_1}, U_{G_2}, U_{G_4}, U_{G_6}$ компонент E_1, G_2, G_4, G_6. Эти компоненты есть ветви дерева графа электрической цепи и выделены на рисунке жирной линией.

Этап составления электрической цепи анализируется ниже.

3.1. Составление уравнений электрической цепи

В системах схемотехнического моделирования для составления уравнений, описывающих электрическую цепь, в основном применяется метод узловых потенциалов. В качестве переменных составленных уравнений выступают узловые потенциалы, отсчитываемые от базового узла 0. Простой алгоритм формализованного составления уравнений цепи и слабо заполненная матрица линейных уравнений, описывающих цепь, являются существенным преимуществом перед другими методами описания. Следует заметить, что уравнения математической физики [2] представляют собой системы уравнений, в которых переменные отсчитываются от базовой точки. Более того, если провести анализ методов описания объектов в физике, то окажется, что практически все они используют переменные, отсчитываемые от базовой точки. Это означает, что дискретным аналогам уравнений, описывающих объекты физики, могут быть присущи те же проблемы, что и системе уравнений, составленной методом узловых потенциалов.

В связи с тем, что имеется обширный список литературы по различным аспектам применения метода узловых потенциалов [4], приводится только система уравнений, описывающая электрическую цепь (рис. 1).

$$\begin{vmatrix} G_5 + G_6 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_4 \\ U_3 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 E_1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Элементы матрицы СЛАУ (2) приведены в общем виде. Это показывает их связь с параметрами компонент электрической цепи. Как следует из (2), есть два варианта вхождения параметров компонент электрической цепи в элементы матрицы. В первом варианте параметры компонент G_3, G_6 входят как в диагональные, так и в не диагональные элементы матрицы. Сами компоненты входят в граф электрической цепи как хорды. Во втором варианте параметры компонент G_2, G_4, G_6 электрической цепи входят только в диагональные элементы матрицы. Сами компоненты входят в граф как ветви дерева. Напряжения компонент есть переменные СЛАУ. Из этого следует, что при измерении параметров компонент электрической цепи с некоторой погрешностью рассчитывается электрическая цепь с измеренными параметрами, что не влияет на устойчивость решения. Вычисление с конечным числом значащих цифр элементов матрицы по параметрам компонент выполняется с некоторой погрешностью. Это может привести к потере точности решения или несовместимости СЛАУ. Соответствующий пример приведен в [5]. Из вышеперечисленного следует, что:

– если корректна модель реального объекта и корректно составлено описание линейной модели, то сохраняются существование и единственность решения даже в случае измерения параметров компонент с погрешностью;

– единственным фактором, влияющим на точность и устойчивость решения СЛАУ, есть погрешность округления результата, возникающая при выполнении арифметических операций вычисления элементов матрицы.

Вопросы, связанные с устойчивостью решения системы уравнений, описывающих электрическую цепь, рассматриваются ниже.

3.2. Исследования механизма возникновения некорректной формулировки СЛАУ, описывающих электрическую цепь

Механизм возникновения некорректной формулировки СЛАУ будет определён в результате анализа вычислительного процесса решения СЛАУ (1). Основное внимание обращается на определение факторов, влияющих на точность решения составленных уравнений, то есть на устойчивость решения. Ход решения будет рассматриваться в общем виде на примере определения узлового потенциала U_2. Для этого достаточно выполнить прямой ход метода Гаусса решения СЛАУ. После соответствующих преобразований система уравнений (1) принимает вид

$$U_4 = \frac{G_5}{G_5 + G_6} U_3, \tag{3}$$

$$U_3 = \frac{G_3}{(G_3 + G_4 + G_5) + \dfrac{G_5^{\,2}}{(G_5 + G_6)}} U_2, \tag{4}$$

$$U_2 = \frac{G_1 E_1}{(G_3 + G_4 + G_5) + \dfrac{G_3^{\,2}}{(G_3 + G_4 + G_5) - \dfrac{G_5^{\,2}}{(G_5 + G_6)}}}. \tag{5}$$

Прежде всего, введем понятие критической компоненты. Компонента считается критической, если параметр компоненты «значительно» больше параметров остальных компонент. Ниже будет рассмотрено, как влияет параметр критической компоненты на результаты, если вычисления выполняются с конечным числом значащих цифр. Вычисление переменной U_2 по формуле (5) рассматривается в двух вариантах. В первом варианте критическая компонента входит как в диагональные элементы матрицы, так и в недиагональные, и есть ветвь хорд графа электрической цепи. Кроме того, напряжение критической компоненты не является переменной СЛАУ. Этому требованию удовлетворяет критическая компонента $G_3 = 10^{15}$. В данном случае матрица СЛАУ (2) имеет собственные числа $\lambda_1 = 1{,}0,\ \lambda_2 = 10^{15} + j10^{15}, \lambda_3 = 10^{15} - j10^{15}$. Это означает, что система плохо обусловленная (то есть близка к вырождению), так как $æ = 10^{15}$.

Анализ хода вычислительного процесса показывает, что достоверность вычисления переменной U_2 зависит от конечного числа значащих цифр при выполнении арифметических операций, вычислении функциональной зависимости (5). Так, если вычисление функциональной зависимости (5) выполняется с числом значащих цифр меньше 15, то результат имеет следующий вид: $U_2 \approx \dfrac{1}{-10^{15} + 10^{15}} = \dfrac{1}{0}$. Это означает неустойчивость решения уравнений (2). При выполнении тех же вычислений с точностью больше, чем 15 значащих цифр, получаем другой результат, а именно $U_2 \approx 2/7$, то есть устойчивое решение. Приведенный результат подтверждает известный из литературы факт. В случае плохо обусловленной матрицы корректность задачи зависит от числа значащих цифр при выполнении арифметических операций, что и продемонстрировано на приведенном примере.

Во втором варианте рассматривается случай, когда критическая компонента входит только в диагональный элемент матрицы и есть ветвь дерева графа электрической цепи, а напряжение компоненты есть переменная СЛАУ. Этим требованиям удовлетворяет критическая компонента $G_2 = 10^{15}$. При этом параметр G_3 выбирается равным $G_3 = 1$. Нетрудно убедиться, что в результате вычисления переменной U_2 по функциональной зависимости (5) получаем устойчивое значение $U_2 \approx 10^{-15}$ несмотря на большой диапазон изменения величин проводимостей (15 порядков). Нет жестких требований к числу значащих цифр при выполнении арифметических операций как при составлении уравнений, так и при их решении. Для получения достоверного результата достаточно выполнить вычислительный процесс составления и решения СЛАУ с числом значащих цифр не менее двух. Это существенным образом отличается от не менее 15 значащих цифр 15 в первом варианте. Таким образом, несмотря на то, что матрица близка к вырождению и есть плохо обусловленная, СЛАУ (1) имеет устойчивое решение, то есть описание электрической цепи корректно составлено.

Следующие выводы вытекают из рассмотренного анализа:

• Плохая обусловленность матрицы СЛАУ зависит от диапазона изменения величин параметров компонент электрической цепи.

• Общепринятый критерий определения некорректности задачи по плохой обусловленности матрицы или близости матрицы к вырождению есть необходимый, но недостаточный. На модельном примере показано, что плохая обусловленность матрицы или близость матрицы к вырождению не есть признак неустойчивого решения (некорректности задачи).

Следующие требования к методу корректного формулирования описания электрической цепи вытекают из рассмотренного материала:

• Корректность описания электрической цепи (устойчивость решения СЛАУ) зависит от выбора переменных СЛАУ при составлении описания электрической цепи.

• Метод узловых потенциалов и его модификации не допускают реализацию целенаправленного выбора переменных.

• Метод, реализующий целенаправленный выбор переменных, должен использовать напряжения или токи компонент в качестве переменных СЛАУ.

• При целенаправленном выборе переменных при описании электрической цепи предлагается учитывать значения параметров компонент электрической цепи.

4. Метод корректной формулировки СЛАУ, описывающий линейную электрическую цепь

Метод составления уравнений электрической цепи, удовлетворяющий сформулированным требованиям, предложен в [9]. Расширение области применимости метода рассмотрено в [10, 11], а модификации метода относительно задач моделирования поведения энергосистем, стержневих систем механики и эллиптических уравнений математической физики рассмотрены в [11–13]. Ниже будут приведены только основные положения метода корректной формулировки описания линейной электрической цепи, необходимые для решения модельного примера, подтверждающего приведенные выше выводы.

Суть метода заключается в следующем. Построение математической модели электрической цепи базируется на основной системе уравнений электрической цепи, куда входят уравнения, составленные на основе законов Кирхгофа, и компонентные уравнения. Для описания графа электрической цепи и, соответственно, уравнений на основе законов Кирхгофа применяются топологические матрицы контуров и сечений. Переменные составляемой системы уравнений выбираются из напряжений и/или токов компонентов в результате анализа основной системы уравнений. При этом учитываются параметры компонентных уравнений и особенности топологических матриц, присущие конкретной цепи или классу цепей. В конечном счете из основной системы уравнений выделяется система уравнений, соответствующая выбранным переменным, и система уравнений связи, с помощью которых вычисляются все напряжения и токи компонент. Преобразованная таким образом основная система уравнений рассматривается как математическая модель электрической цепи. Рассмотрим этапы составления этой модели.

Вначале составляется эквивалентная схема замещения электрической цепи, определяются компонентные уравнения и граф цепи (рис. 1). Для модельного примера компонентные уравнения имеют вид (1). Составление топологических матриц контуров и сечений включает выбор дерева графа цепи и составление контуров для выбранного дерева. Дерево графа электрической цепи выбирается таким образом, чтобы все источники напряжения включались в дерево, а все источники тока в хорды. Контуры образуются присоединением хорд к дереву графа схемы. В этом случае топологическая матрица контуров имеет вид $\left|1 \ F^t\right|$, где 1 – единичная подматрица хорд, t – обозначает транспонирование матрицы, а топологическая матрица сечений вид $\left|1 \ -F\right|$, где 1 – единичная подматрица ветвей.

Проводимости, напряжения и токи компонентов цепи группируются в элементы, содержащие компоненты, которые входят в дерево (индекс д), то есть ветви и содержащие компоненты, не входящие в дерево, (индекс х) – хорды. Таким образом,

$$G = \begin{vmatrix} G_{\text{Д}} \\ G_{\text{X}} \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} \mathrm{U}_{\text{Д}} \\ \mathrm{U}_{\text{X}} \end{vmatrix}, \qquad I = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{\text{Д}} \\ \mathrm{I}_{\text{X}} \end{vmatrix} \ . \tag{6}$$

Уравнения электрической цепи, составленные на основе законов Кирхгофа, в матричном виде можно записать следующим образом:

$$U_{\text{X}} = -\mathrm{F}^t U_{Д}, \tag{7}$$

$$I_{\text{Д}} = \mathrm{F} I_{\text{X}} \ . \tag{8}$$

В [9] рассмотрены разные варианты выбора типа независимых переменных СЛАУ. В нашем случае ограничимся выбором напряжения ветвей дерева в качестве переменных.

Тогда из компонентных уравнений (1) и уравнений (6)–(8) выделяется следующая система уравнений, описывающая электрическую цепь:

$$\mathrm{G}_{Д} U_{\mathrm{Д}} - \mathrm{F}(G_{\mathrm{X}}(-\mathrm{F}^{\mathrm{t}} U_{\mathrm{Д}})) = 0. \tag{9}$$

Как следует из требований, предъявляемых к методу составления уравнений цепи, сформулированных в предыдущем параграфе, учёт особенностей конкретной электрической цепи учитывается следующим образом: в дерево обязательно включаются компоненты, имеющие максимальную проводимость, то есть в контуре, образованном присоединением хорды к дереву, компонента дерева должна иметь проводимость по величине больше, чем проводимость хорды. Учитывая сказанное, в случае модельного примера, в дерево графа цепи были выбраны компоненты E_1, G_2, G_3, G_6. На рис. 1 выбранные ветви дерева помечены штриховыми линиями. В этом случае векторы напряжений и токов компонент имеют вид

$$\mathrm{U}_{\mathrm{Д}} = \begin{vmatrix} E_1 \\ U_{G_2} \\ U_{G_3} \\ U_{G_6} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{U}_{\mathrm{X}} = \begin{vmatrix} U_{G_1} \\ U_{G_4} \\ U_{G_5} \end{vmatrix}, I_{\mathrm{Д}} = \begin{vmatrix} I_{E_1} \\ I_{G_2} \\ I_{G_3} \\ I_{G_6} \end{vmatrix}, \quad I_{\mathrm{X}} = \begin{vmatrix} I_{G_1} \\ I_{G_4} \\ I_{G_5} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

а топологические матрицы F^{t} и F

$$\mathrm{F}^{\mathrm{t}} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{F} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Учитывая (10), (11), после соответствующих преобразований система уравнений (9) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} G_5 + G_6 & G_5 & -G_5 \\ G_5 & G_3 + G_4 + G_5 & -(G_4 + G_5) \\ -G_5 & -(G_4 + G_5) & G_1 + G_2 + G_4 + G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 E_1 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Собственные числа матрицы $\lambda_1 = 1{,}57864376253, \lambda_2 = 5{,}0\mathrm{E}+14 + j5{,}0\mathrm{E}+14$, $\lambda_3 = 5{,}0\mathrm{E}+14 - j5{,}0\mathrm{E}+14$. Матрица плохо обусловленная (близка к вырождению).

Как и в случае метода узловых потенциалов, для вычисления компонентного напряжения U_{G_2} применим прямой ход метода Гаусса решения СЛАУ. После соответствующих преобразований система уравнений (12) примет следующий вид:

$$U_{G_6} = -\frac{G_5}{G_5 + G_6} U_{G_3} + \frac{G_5}{G_5 + G_6} U_{G_2}, \tag{13}$$

$$U_{G_3} = \frac{G_4 + G_5 - \dfrac{G_5^2}{G_5 + G_6}}{G_3 + G_4 + G_5 - \dfrac{G_5^2}{G_5 + G_6}} U_{G_2}, \tag{14}$$

$$U_{G_2} = \frac{G_1 E_1}{(G_1 + G_2 + G_4 + G_5) - \dfrac{G_5^2}{(G_5 + G_6)} + \dfrac{\left((G_4 + G_5) + \dfrac{G_5^2}{(G_5 + G_6)}\right)^2}{G_3 + G_4 + G_5 - \dfrac{G_5^2}{G_5 + G_6}}}. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что, в случае выбора $G_3 = 10^{15}$ критической компонентой, вычисление U_{G_2} по формуле (15) дает устойчивый результат $U_{G_2} \approx 2/7$ несмотря на большой диапазон изменения величины проводимостей (15 порядков). Нет жестких требований к конечной точности представления чисел как при составлении уравнений, так и при решении составленных уравнений. Для получения достоверного результата достаточно выполнить вычислительный процесс составления и решения СЛАУ с числом значащих цифр не менее двух. Это означает, что корректная постановка задачи моделирования электрических цепей, фактически, зависит не от обусловленности СЛАУ или близости матрицы к вырождению, а от целенаправленного выбора независимых переменных на этапе составления уравнений.

Приведенный результат существенным образом отличается от результата, полученного методом узловых потенциалов в первом варианте. Так, если в плохо обусловленной матрице, составленной методом узловых потенциалов, параметр критической компоненты G_3 расположен как в диагональных, так и в недиагональных элементах, а компонента есть хорда в графе электрической цепи, то устойчивость решения СЛАУ зависит от числа значащих цифр. В то время, как в предложенном методе решение СЛАУ с плохо обусловленной матрицей есть устойчивое.

Устойчивость решения обеспечил выбор переменных на этапе составления уравнений, учитывающий особенности конкретной электрической цепи. Таким образом, предложенный метод гарантированно обеспечивает корректное формулирование описания электрической цепи.

5. Заключение

В данной работе предложен новый подход к разработке методов решения некорректных задач. Предлагается корректно формулировать СЛАУ, которая описывает линейную электрическую цепь, даже если СЛАУ относится к классу плохо обусловленных, а не решать некорректную задачу. Корректное формулирование выполняется на этапе составления СЛАУ, который в современной литературе незаслуженно обойден вниманием.

На примере расчета электрической цепи показано, что плохая обусловленность матрицы СЛАУ зависит от особенностей конкретной электрической цепи, а именно, диапазона изменения величин параметров компонент электрической цепи, а общепринятый критерий определения некорректной задачи по плохой обусловленности матрицы или близости матрицы к вырождению есть необходимый, но недостаточный. Его нельзя использовать как признак неустойчивого решения (некорректности задачи).

Определено, что причиной некорректности задачи есть неудачный выбор переменных при составлении уравнений, описывающих электрическую цепь. Предложено в качестве переменных уравнений, описывающих электрическую цепь, использовать напряжения или токи компонент.

При составлении уравнений электрической цепи предложено учитывать особенности конкретной цепи и осуществлять целенаправленный выбор переменных. Расчёт модельного примера методом, в котором реализованы перечисленные выше рекомендации, подтвердил тот факт, что задача корректно сформулирована, а решение устойчивое даже в случае плохо обусловленной матрицы.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.
3. Корректные и некорректные задачи. URL: https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/064/938.htm.
4. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. Киев: Техника, 1970. 396 с.
5. Губарев В.Ф., Мельничук С.В. Алгоритмы гарантированного оценивания состояния линейных систем при наличии ограниченных помех. URL: http://www.irtc.org.ua/Статья ГубаревМельничук_ОК_10_03_15.дос.
6. Воеводин В.В. Вычислительные основы линенйной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
7. Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений. *Математическое моделирование*. 2011. Т. 23, № 2. С. 3–26.
8. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Изд-во физ-мат лит., 1963. 734 с.
9. Волобоев В.П. Составление уравнений цепи, содержащей зависимые двухполюсники и многополюсники. *Вопросы проектирования математических машин и устройств*. Киев: Научный совет по кибернетике АН УСАН УССР, 1972. С. 3–16.
10. Волобоев В.П. Составление уравнений цепи, содержащей зависимые двухполюсники и многополюсники. *Вопросы проектирования математических машин и устройств*. Киев: Научный совет по кибернетике АН УСАН УССР, 1972. С. 3–16.
11. Волобоев В.П. К учету сходимости численных методов при составлении уравнений цепи постоянного тока. *Вопросы проектирования математических машин и устройств*. Киев: Научный совет по кибернетике АН УСАН УССР, 1972. С. 17–26.
12. Волобоев В.П. О расширении класса схем, моделируемых методом напряжений ветвей дерева. *Проектирование технических средств ЭВМ и систем*: сб. научн. трудов. Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1982. С. 32–36.
13. Волобоев В.П., Клименко В.П. Об одном подходе к моделированию энергосистем. *Математичні машини і системи*. 2009. № 4. С. 106–118.
14. Волобоев В.П., Клименко В.П. Механика стержневых систем и теория графов *Математичні машини і системи*. 2012. № 2. С. 81–96.
15. Волобоев В.П., Клименко В.П. Метод конечных элементов и теория графов. *Математичні машини і системи*. 2013. № 4. С. 114–126.

Стаття надійшла до редакції 07.08.2019