УДК 519.718.2

С. В. Щербовських

ВИЗНАЧЕННЯ ДОВГОВІЧНОСТІ НЕРЕЗЕРВОВАНОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ АЦИКЛІЧНОЇ МАРКОВСЬКОЇ МОДЕЛІ

Reliability index determination method for non-redundancy system with component-wise repairs is offered. This method is based on *N*-dimension acyclic Markov reliability model which provides high adequacy for system that contains components with arbitrary failure models.

Keywords: *reliability (durability), Markov analysis, useful life (gamma-percentile lifetime).*

Для визначення показників довговічності нерезервованої системи з по-елементним ремонтуванням запропоновано метод, який ґрунтується на застосуванні багатовимірних ациклічних марковських моделей надійності, що забезпечує адекватний їхній опис у випадку наявності у складі елементів із довільними моделями відмов.

Ключові слова: *довговічність, марковський аналіз, гамма-процентний ресурс.*

Постановка проблеми. Забезпечення заданих показників довговічності для відновлюваної технічної системи є одним із аспектів, якому приділяють увагу як на етапі проектування, так і під час її експлуатування. Довговічність є властивістю системи виконувати усі потрібні функції до переходу у граничний стан при встановленій системі технічного обслуговування та ремонтування. Граничним станом системи вважаємо такий стан, за якого відновлення її працездатності недопустиме чи недоцільне. Тобто під час експлуатування система, внаслідок відмов та відновлень її елементів, переходить через задану кількість працездатних станів і опиняється у граничному непрацездатному стані. Довговічність характеризують ресурсом, який є сумарним напрацювання системи від початку її експлуатування до переходу у граничний стан.

Стаття присвячена проблемі визначення таких характеристик довговічності, як гамма-процентний ресурс, інтенсивність відмов та розподіл за відмовами для нерезервованої системи з по-елементною стратегією ремонтування, застосовуючи для цього багатовимірну ациклічну розширену марковську модель системи.

Практичний аспект розв’язання проблеми пов’язаний з підвищенням точності прогнозування показників довговічності нерезервованих систем, а теоретичний забезпечує подальший розвиток методів автоматизованої побудови марковських моделей надійності для опису процесів напрацювання та ремонтування, які протікають у технічних системах.

Аналіз останніх досліджень. У наукові літературі виділяємо такі основні підходи щодо визначення показників довговічності систем. У [1, 2] оцінку показників довговічності систем виконують аналогічно до оцінки показників безвідмовності. Цей підхід ґрунтується на застосуванні моделей ресурсу елементів системи, які апріорно поєднують моделі відмов та відновлення таких елементів. Основними недоліками підходу є складність синтезу моделей ресурсу елементів системи, жорстке прив’язування такої моделі до заданої стратегії технічного обслуговування, неможливість коректного врахування взаємного впливу елементів системи на характеристики надійності системи в цілому, неможливість визначення функції ймовірності розподілу за відмовами. У [3] показники довговічності пропонують оцінювати статистичними методами на основі аналізу попереднього періоду напрацювання. Недолік статистичного аналізу полягає в тому, що для отримання достовірних значень показників довговічності необхідні тривалі тестування з великим обсягом вибірки. Хоча це забезпечує високу достовірність результату, проте є економічно недоцільним.

Для визначення функції розподілу ймовірності за відмовами застосовують моделі на основі неоднорідного пуассонівського процесу (NHPP) [4] та на основі методу Монте–Карло [5]. Загальним недоліком обох підходів є відсутність теоретичної бази для визначення інших показників довговічності, а для NHPP додається, що не існує однозначного методу, щоб пов'язати між собою параметри моделі ресурсу та параметри моделей відмов та відновлення. Найперспективнішим підходом для визначення усього класу показників довговічності є застосування звичайних марковських моделей [6] та марковських моделях на основі розширення простору станів [7, 8]. Недоліком марковських моделей є відсутність математичного забезпечення для автоматизованої їх побудови та розрахунку.

Постановка завдань. Розробити у загальній формі метод побудови багатовимірної ациклічної марковської моделі системи застосовуючи циклічну марковську модель. Застосовуючи ациклічну марковську модель визначити гамма-процентний ресурс, інтенсивність відмов та розподіл за відмовами для нерезервованої системи із по-елементною стратегією ремонтування.

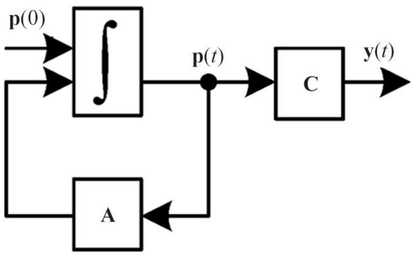

Рис. 1. Структурна схема векторно-матричної форми марковської моделі.

Викладення основного матеріалу. Марковською моделлю надійності є система диференціальних рівнянь Колмогорова, яку у векторно-матричній формі запису подають структурною схемою (рис. 1) або матричною системою рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{p}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{p}(t), \end{cases}$$

де t – напрацювання системи; $\mathbf{p}(t)$ – вектор-стовпець ймовірностей фаз; $\mathbf{A}$ – матриця інтенсивності переходів між фазами; $\mathbf{y}(t)$ – матриця досліджуваних характеристик системи; $\mathbf{C}$ – матриці перетворення.

Таку систему рівнянь необхідно доповнити вектор-рядком початкових ймовірностей фаз $\mathbf{p}(0)$. Вектор внутрішніх змінних інтегрування $\mathbf{p}(t)$, який містить функції ймовірності фаз, визначають шляхом інтегрування зворотного від'ємного сигналу з пропорційної матричної ланки із матричним параметром $\mathbf{A}$. Вихідний сигнал $\mathbf{y}(t)$, який містить характеристики надійності, визначають як пряме перетворення вектора $\mathbf{p}(t)$ пропорційною ланкою із матричним параметром $\mathbf{C}$. Формування макровської моделі зводиться до визначення матриці інтенсивності переходів $\mathbf{A}$, матриці перетворення $\mathbf{C}$, а також вектора початкових ймовірностей фаз $\mathbf{p}(0)$, які задають початковий стан матричного інтегратора. Також таку модель можна подати у графічній формі – діаграмою станів та переходів, яка однозначно зв'язана із $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ та $\mathbf{p}(0)$.

Якщо досліджують безвідмовність системи, то застосовують марковську модель, яка враховує вплив лише відмов. Якщо досліджують готовність системи, то застосовують марковську модель, яка враховує вплив, як відмов, так і відновлення. Така модель є циклічною і передбачає наявність нескінченої кількості взаємних переходів. Для дослідження довговічності системи марковська модель повинна врахувати обмежену кількість відновлень за кожним із її елементів. Для цього переходи, які відповідають відновленню, переводять систему не у вихідні фази, а у множину наступних, тому модель є ациклічною. Такий тип моделей є складнішим за попередні, адже поєднує, поряд із новими, усі попередні властивості. Навіть для простих випадків нерезервованих систем ациклічні моделі громіздкі і потребують застосування спеціалізованого математичного та програмного забезпечення для їх автоматизованої побудови та аналізу.

Під час дослідження показників довговічності систем прийнято для кожного із її елементів будувати свою ациклічну марковську модель у формі ланцюга. Виконані дослідження виявили, що такий підхід забезпечує коректний результат лише для одноелементних об'єктів [9]. Для адекватного моделювання систем, які містять елементи з довільними моделями відмов, необхідно застосовувати багатомірні ланцюги, зокрема, для системи із двох елементів – двовимірний ланцюг, як наведено на рис. 2, для системи із трьох елементів – тривимірний і т.д. Без обмеження загальності, подальші теоретичні викладки подано лише для двовимірного випадку.

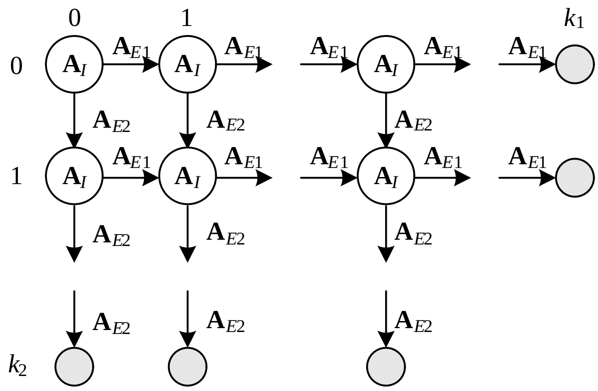

Рис. 2. Узагальнена ациклічна діаграма станів та переходів для системи із двох елементів.

Формально завдання математичного забезпечення полягає у визначенні невідомих матриць $\mathbf{A}_A$, $\mathbf{C}_A$, $\mathbf{p}_A(0)$ ациклічної моделі на основі заданих матриць циклічної – $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{p}(0)$ та кількості відмов за кожним із елементів k_1, k_2… Формування двовимірної ациклічної моделі здійснюємо у два етапи. На першому етапі створюємо одновимірну ациклічну марковську модель $\mathbf{A}_{A1}$, $\mathbf{C}_{A1}$, $\mathbf{p}_{A1}(0)$:

$$\mathbf{A}_{A1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_I & \mathbf{A}_Z & \dots & \mathbf{A}_Z\\ \mathbf{A}_{E1} & \mathbf{A}_I & \dots & \mathbf{A}_Z\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{A}_Z & \mathbf{A}_Z & \dots & \mathbf{A}_Z\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_{A1}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C}_Z\end{bmatrix},\quad \mathbf{p}_{A1}(0)=\begin{bmatrix}\mathbf{p}(0)\\ \mathbf{p}_Z\\ \dots\\ \mathbf{p}_Z\end{bmatrix}, \tag{1}$$

де $\mathbf{A}_I$ – матриця інтенсивності внутрішніх переходів; $\mathbf{A}_{E1}$ – матриця інтенсивності зовнішніх переходів для першого елемента; $\mathbf{A}_Z$ – нульова матриця, розмірність якої дорівнює розмірності матриці $\mathbf{A}$; $\mathbf{C}_Z$ – нульовий вектор-рядок, розмірність якого дорівнює $\mathbf{C}$, $\mathbf{p}_Z$ – нульовий вектор-стовпець, розмірність якого дорівнює $\mathbf{p}(0)$.

Розмірність моделі (1), зведена до розмірності циклічної, є $k_1 + 1$. Оскільки останній стан є граничним, тому $(k_1 + 1)$-й стовпець матриці $\mathbf{A}_{A1}$ та $(k_1 + 1)$-й елемент вектор-рядка $\mathbf{C}_{A1}$ містять лише нульові елементи. У початковий момент система перебуває у стані, який відповідає відсутності відмов, а тому усі елементи вектор-стовпця $\mathbf{p}_{A1}(0)$, крім першого, є нульовими.

Другий етап полягає у формуванні власне двовимірної ациклічної моделі $\mathbf{A}_A$, $\mathbf{C}_A$, $\mathbf{p}_A(0)$ на основі одновимірної моделі $\mathbf{A}_{A1}$, $\mathbf{C}_{A1}$, $\mathbf{p}_{A1}(0)$ (1):

$$\mathbf{A}_A=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{A1} & \mathbf{A}_{Z1} & \dots & \mathbf{A}_{Z1}\\ \mathbf{A}_{E2}^{*} & \mathbf{A}_{A1} & \dots & \mathbf{A}_{Z1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{A}_{Z1} & \mathbf{A}_{Z1} & \dots & \mathbf{A}_{Z1}\end{bmatrix},\ \mathbf{C}_A=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{A1} & \mathbf{C}_{A1} & \dots & \mathbf{C}_{Z1}\end{bmatrix},\ \mathbf{p}_A(0)=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_{A1}(0)\\ \mathbf{p}_{Z1}\\ \dots\\ \mathbf{p}_{Z1}\end{bmatrix}, \tag{2}$$

де $\mathbf{A}_{E2}^{*}$ – зведена матриця інтенсивності зовнішніх переходів для другого елемента; $\mathbf{A}_{Z1}$ – нульова матриця, розмірність якої дорівнює розмірності матриці $\mathbf{A}_{A1}$; $\mathbf{C}_{Z1}$ – нульовий вектор-рядок, розмірність якого дорівнює $\mathbf{C}_{A1}$, $\mathbf{p}_{A1}$ – нульовий вектор-стовпець, розмірність якого дорівнює $\mathbf{p}_{Z1}(0)$.

Розмірність моделі (2), зведена до розмірності моделі (1), є $k_2 + 1$. Модель (2) формуємо подібно до моделі (1), застосовуючи замість $\mathbf{A}_I$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{p}(0)$ визначені вище відповідно $\mathbf{A}_{A1}$, $\mathbf{C}_{A1}$, $\mathbf{p}_{A1}(0)$. Зведену матрицю $\mathbf{A}_{E2}^*$ формуємо шляхом розміщення у діагональних елементах матриць інтенсивності зовнішніх переходів $\mathbf{A}_{E2}$:

$$\mathbf{A}_{E2}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{E2} & \mathbf{A}_Z & \ldots & \mathbf{A}_Z \\ \mathbf{A}_Z & \mathbf{A}_{E2} & \ldots & \mathbf{A}_Z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{A}_Z & \mathbf{A}_Z & \ldots & \mathbf{A}_Z \end{bmatrix}.$$

У такій матриці останній діагональний елемент є нульовим, оскільки переходи між граничними станами неможливі. Зведення полягає у формуванні матриці розмірності, яка прийнятна до застосування у моделі (2). Зокрема, у цьому випадку розмірність $\mathbf{A}_{E2}^*$, зведена до розмірності циклічної моделі, дорівнює $k_1 + 1$. Якщо кількість елементів у системі є три та більше, то, застосовуючи вирази (1) і (2), формується тривимірна і більше ациклічні моделі. Згідно з наведеним методом автором розроблено математичне та програмне забезпечення, яке синтезує ациклічні марковські моделі для систем із довільною кількістю елементів. Матриці інтенсивності внутрішніх $\mathbf{A}_I$ та зовнішніх переходів $\mathbf{A}_{E1}$, $\mathbf{A}_{E2}\ldots$ є елементами розкладу матриці інтенсивності переходів циклічної моделі $\mathbf{A}$, тобто

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_I + (\mathbf{A}_{E1} + \mathbf{A}_{E2} + \ldots).$$

Такий розклад залежить від структури, алгоритму функціонування системи та характеристик, які необхідно дослідити.

Визначимо на основі наведеного методу показники довговічності нерезервованої системи з по-елементним ремонтуванням, яка функціонує за таким алгоритмом. У початковий момент часу система, що містить два елементи, перебуває у працездатному стані S (рис. 3), в якому обидва вони працездатні.

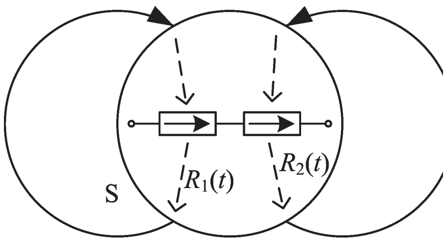

Рис. 3. Узагальнена діаграма станів та переходів нерезервованої системи.

Напрацювання першого елемента системи розподілено за моделлю відмов $R_1(t)$, а другого – моделі відмов $R_2(t)$. Внаслідок відмови одного із елементів, система покидає цей стан. Вважаємо, що засоби технічної діагностування та обслуговування ідеальні, а тому відмова елемента миттєво діагностується та усувається. Ремонт полягає у заміні непрацездатного елемента на новий. За поелементної стратегії ремонтування, якщо відмовляє один із елементів системи, то замінюється лише він, а інший працездатний елемент залишається функціонувати далі. Так система після покидання стану S миттєво повертається назад у нього, як це показано на діаграмі станів та переходів. Особливість стратегії в тому, що після повернення у працездатний стан S один із елементів є новий, а інший має вже певне напрацювання.

Для наведеної системи відома циклічна марковська модель $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{p}(0)$, діаграма станів та переходів якої наведена на рис. 4*а*. Така модель системи сформована із умови, що модель відмов першого елемента $R_1(t)$ зведена до канонічного фазового розподілу четвертого порядку, а модель відмов другого $R_2(t)$ – до третього порядку. Детальніше про формування моделей на основі розщеплення станів подано у [7], а про розподіли фазового типу – у [10].

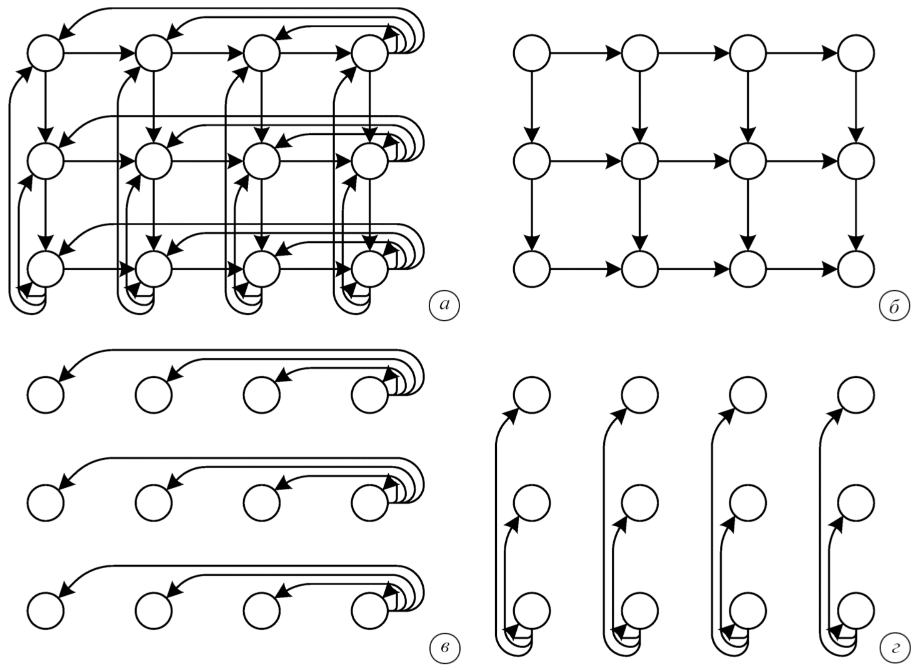

Рис. 4. Циклічна діаграма станів та переходів нерезервованої системи і її складові, що використовуються для побудови ациклічної моделі надійності.

Матрицю інтенсивності переходів **A** розкладаємо на такі складові. Переходи, які відповідають напрацюванням обох елементів системи (рис. 4*б*), утворюють матрицю інтенсивності внутрішніх переходів $\mathbf{A}_I$. Переходи, які відповідають відмові першого елемента (рис. 4*в*), утворюють першу матрицю інтенсивності зовнішніх переходів $\mathbf{A}_{E1}$, а переходи, що відповідають відмові другого елемента (рис. 4*г*), – другу $\mathbf{A}_{E2}$. Застосовуючи розроблене математичне та програмне забезпечення, сформовано ациклічну марковську модель нерезервованої системи для по-елементної стратегії ремонтування. У такій системі передбачено шість ремонтів для першого елемента та п’ять ремонтів для другого до переходу системи у граничний непрацездатний стан, а тому розмірність ациклічної моделі дорівнює $12 \cdot (6 + 1) \cdot (5 + 1) = 504$ фази. За отриманою моделлю, шляхом чисельного інтегрування штивним методом з адаптивним кроком, розраховано функції, які характеризують довговічність системи (рис. 5).

Зокрема, на рис. 5*а* та *б* наведені функція густити розподілу відмов $f(t)$ та функція ймовірності безвідмовної роботи $R(t)$ (суцільні криві *1*). Для перевірки достовірності результату за відповідною циклічною марковською моделлю визначено показники надійності системи за умови нескінченої кількості відновлень за кожним із елементів. На рис. 5*а* та *б*, для порівняння, наведені функція інтенсивності потоку відмов та функція готовності (штрихові криві *2*). На проміжку, що відповідає нормальній експлуатації нерезервованої системи, криві характеристик довговічності та готовності збігаються між собою, що підтверджує достовірність запропонованого методу автоматизованого синтезу багатовимірних ациклічних моделей. На рис. 5*в* зображена дискретна діаграма функції розподілу ймовірності за кількістю відмов $P(k_1, k_2)$ для заданого значення напрацювання, яку використовують для аналізу системи під час проектування. За моделлю Із $R(t)$ визначаємо, що гамма-процентний ресурс для $\gamma = 98\%$, становить 1,64 відн. од., а із $f(t)$ та $R(t)$ для напрацювання, рівному гамма-процентному ресурсу, інтенсивність відмов системи становить 2,90 відмов/відн. од.

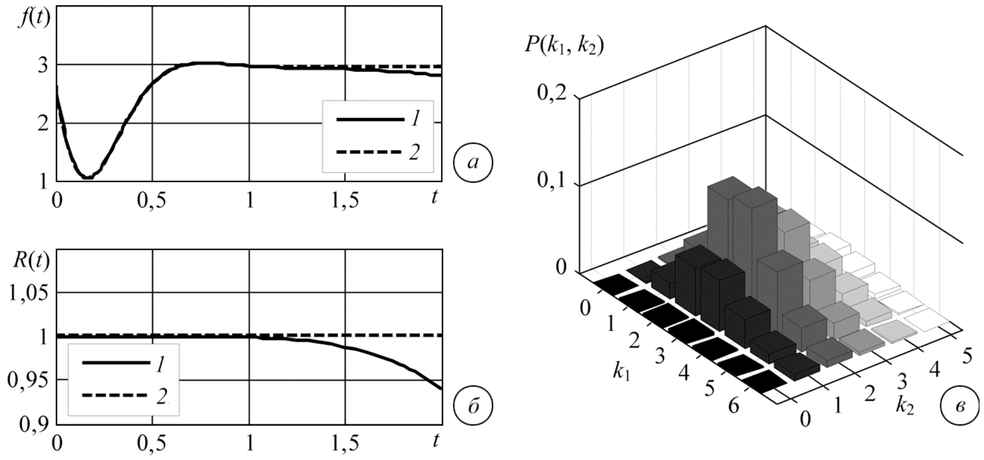

Рис. 5. Криві характеристик довговічності та діаграма розподілу за відмовами для нерезервованої системи з по-елементною стратегією ремонтування.

ВИСНОВКИ

Запропоновано для визначення показників довговічності нерезервованих систем метод, який ґрунтується на застосуванні багатовимірних ациклічних марковських моделей надійності, що забезпечує адекватний їх опис у випадку наявності у складі елементів із довільними моделями відмов. Розроблено математичне та програмне забезпечення, яке автоматизує побудову ациклічної марковської моделі, ґрунтуючись на розкладі вихідної циклічної марковської моделі. Застосовуючи таке забезпечення, визначені показники довговічності, а саме, гамма-процентний ресурс, інтенсивність відмов та розподіл ймовірності за відмовами для нерезервованої системи з по-елементним ремонтуванням.

Подальші дослідження спрямовані на вдосконалення запропонованого методу щодо визначення показників довговічності систем зі структурним резервуванням.

1. *Nader M. Okasha, Dan M. Frangopol* Redundancy of structural systems with and without maintenance: An approach based on lifetimenext term functions // Reliability Engineering & System Safety. – 2010. – **95**, № 5. – P. 520–533.
2. *Donald E. Hutto, Thomas Mazzuchi, Shahram Sarkani* Analysis of reliability using masked system life data // Int. J. Quality & Reliability Management. – 2009. – **26**, № 7. – P. 723–739.
3. *Буртаев Ю. Ф., Острейковский В. А.* Статистический анализ надежности объектов по ограниченной информации. – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 240 с.
4. *Krivtsov V.* Practical extensions to NHPP application in repairable system reliability analysis // Reliability Engineering and System Safety. – 2007. – **92**, № 5. – P. 560–562.
5. *Хенли Э. Дж., Кумамото Х.* Надежность технических систем и оценка риска: Пер. с англ. – М: Машиностроение, 1984. – 528 с.
6. *Волочій Б. Ю.* Технологія моделювання алгоритмів поведінки інформаційних систем. – Львів: Вид-во НУ “Львівська політехніка”, 2004. – 220 с.
7. *Лозинський О. Ю., Щербовських С. В.* Побудова моделей надійності ремонтованих електромеханічних об’єктів на основі розширення простору станів // Вісник НТУ “Харківський політехнічний інститут”. – 2005. – № 45. – С. 77–81.
8. *Ghasemi A., Yacout S., Ouali M.-S.* Evaluating the reliability function and the mean residual life for equipment with unobservable states // Reliability, IEEE Transactions on. – 2010. – **59**, № 1. – P. 45–54.
9. *Лозинський О. Ю., Щербовських С. В.* Розрахунок параметра потоку відмов відновлюваного об’єкта з урахуванням тривалості ремонтів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – № 9. – С. 92–99.
10. *Perez-Ocon R., Montoro-Cazorla D.* Transient analysis of a repairable system, using phase-type distributions and geometric processes // Reliability, IEEE Transactions on. – 2004. – **53**, № 2. – P. 185–192.

Національний університет “Львівська політехніка”

Одержано 03.09.2010