complete solution of the problem for an arbitrary number of vertices, is presented in the paper. In the study of the game set the winner, depending on the remainder, this gives the number of vertices when dividing by four.

The urgency of this topic is determined by an extremely wide spectrum of the theory of graphs in the modeling of various processes of entrepreneurial activity, etc. The combinatorial theory of games on graphs can be applied in clustering tasks, as well as in the simulation of conflict situations. The difference between combinatorial games from games, which are usually studied in the classical («economic») game theory, is that players play in turns in turn, and not simultaneously (the classical game theory is covered in a multitude of books, which include the words «theory games «or» research operations»).

Considerations of the combinatorial theory of games with full information have appeared, even in ancient times, for example, in Sun Tzu's book «The Art of War»: if one can calculate who will win, and not actually fight the war itself.

This article can be useful to anyone interested in the combinatorial theory of games, graph theory. The results of this study have different application applications. The topic is promising for further continuation of work in this direction.

Key words: *combinatorial game theory,graph theory,method of final graphs, combinatorial games on graphs*

Отримано: 23.11.2018

УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.105-112

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ГЛАДКІ РОЗВ’ЯЗКИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ЗА ШИЛОВИМ СИСТЕМ

Для широкого класу гіперболічних за Шиловим лінійних систем рівнянь із частинними похідними, який охоплює клас Петровського гіперболічних систем зі сталими коефіцієнтами і містить клас рівнянь Гордінга, розглядається питання знаходження гладких класичних розв’язків, які є стосовно просторової змінної фінітними або швидко спадними на нескінченності векторфункціями. Дослідження проводяться методом перетворення Фур’є у поєднанні з теорією просторів типу S і S' Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. основних і узагальнених функцій. Належність компонент фундаментального розв’язку задачі Коші для таких систем до простору розподілів Дірака, а також, їх згортковість у певних простoрорах типу S основних функцій дозволило тут установити в класичному розумінні коректну розв’язність задачі Коші в кожному такому просторі Гельфанда і Шилова. Тобто, довести існування, єдиність та неперервну залежність від початкових даних класичного розв’язку гіперболічної системи у зазначеному просторі типу S, за умови, що його граничне значення на початковій гіперплощині є елементом цього простору. При цьому, розв'язок прямує до початкової вектор-функції при наближенні часової змінної до нуля у сенсі топології цього простору. Цей результат, зокрема, дозволяє зробити важливий висновок про те, що еволюційні процеси з відсутнім зовнішнім впливом, які описуються гіперболічними за Шиловим системами, в рамках просторів типу S з плином часу, спроможні зберігати ті якісні характеристики стосовно просторової змінної, якими вони володіли на початковому етапі еволюції.

Ключові слова: *гіперболічні за Шиловим системи, задача Коші, основні та узагальнені функції.*

Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь p-го порядку вигляду

$$\partial_t u(t;x) = P(i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi := (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m)$, а $P(i\partial_x) = \left(P_{lj}(i\partial_x)\right)_{l,j=1}^m$ — матричний диференціальний вираз зі сталими коефіцієнтами. Вважатимемо, що система (1) гіперболічна за Шиловим на множині Π тобто така, що функція $\Lambda(s) := \max_j \mathrm{Re}\,\lambda_j(s), s \in \mathbb{C}^n$, де $\lambda_j(\cdot)$ — власні числа матричного символу $P(\cdot)$, задовольняє наступні умови [1]:

1) її степеневий порядок зростання у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ не більший за 1: $\Lambda(s) \le a\|s\| + b$;

2) при дійсних значеннях $s = \sigma \in \mathbb{R}^n$ ця функція обмежена: $\Lambda(\sigma) \le c$.

У [1] обґрунтовано, що кожна гіперболічна за Петровським система (1), гіперболічна за Шиловим і кожне гіперболічне за Гордінгом рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться до гіперболічної за Шиловим системи (1); також наведено приклади гіперболічних за Шиловим систем (1), які не є гіперболічними за Петровським.

Умови з означення гіперболічності системи не забезпечують необхідного спадання на нескінченності функції Гріна системи (1), тому класичний метод перетворення Фур'є розв'язування (1), який проявив себе достатньо ефективно у випадку параболічних систем, виявився недієвим для гіперболічних систем. У зв'язку з цим, різними дослідниками розроблялися інші методи дослідження гіперболічних рівнянь і систем, зокрема, метод характеристик і метод відокремлення змінних, які дозволили одержати ряд важливих результатів про коректну розв'язність задачі Коші та крайових задач у різних функціональних просторах, а також, дослідити властивості розв'язків [2–10].

Проте, з появою теорії узагальнених функцій метод перетворення Фур'є вдалось поширити і на випадок гіперболічних систем. У [1] трактуючи розв'язки системи (1) у слабкому розумінні встановлено, що простір S_0' розподілів Дірака є класом єдиності задачі Коші для гіперболічних за Шиловим систем (1), крім цього, поширено відомий результат І.Г. Петровського про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічних за Петровським систем [2] на випадок систем, гіперболічних за Шиловим: *задача Коші для гіперболічних систем (1), і лише для таких систем, коректно розв'язна з довільними достатньо гладкими початковими даними без будь-яких обмежень на їх зростання на нескінченності.* З огляду на цей результат, виникають природні питання про існування та знаходження класичних гладких розв'язків таких систем із певними властивостями, які так чи інакше прямують до свого граничного значення на початковій гіперплощині.

У роботі методом класичного перетворення Фур'є у поєднанні з теорією просторів типу S досліджується питання існування класичних нескінченно диференційовних за просторовою змінною x розв'язків гіперболічної системи (1), які є фінітними або швидко спадними на нескінченності вектор-функціями, і які «посилено» прямують до свого граничного значення при $t \to +0$.

1. Попередні відомості, постановка задачі. Нехай S — простір Л. Шварца спадних функцій на $\mathbb{R}^n$; для $\beta \geq 0$ покладемо [11]:

$$S_\beta := \left\{ \varphi(\cdot) \in S \mid \exists \delta > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_q > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \left| \partial^q \varphi(x) \right| \leq c_q e^{-\delta \|x\|^{1/\beta}} \right\};$$

$$S^\beta :=$$

$$= \left\{ \varphi(\cdot) \in S \mid \exists B > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c_k > 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \left| x^k \partial^q \varphi(x) \right| \leq c_k B^{|q|} q^{\beta q} \right\}.$$

З відповідними топологіями простори S_β і S^β є об'єднанням зліченнонормованих повних досконалих просторів, збіжність в яких характеризується наступним критерієм [11]: граничне співвідношення $\varphi_\nu(\cdot) \xrightarrow[\nu \to \infty]{\Phi} 0$ виконується тоді і лише тоді, коли:

I) $\forall K \subset \mathbb{R}^n \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n : \partial^q \varphi_\nu(x) \overset{x \in K}{\underset{\nu \to \infty}{\rightrightarrows}} 0$ (тут йдеться про рівномірну збіжність стосовно x на компакті K);

II) послідовність $\varphi_\nu(\cdot)$ обмежена в просторі Φ, де $\Phi \in \left\{ S_\beta, S^\beta \right\}$.

При $\beta = 0$ елементи простору S_0 є фінітними нескінченно диференційовними на $\mathbb{R}^n$ функціями; при $\beta < 1$ кожен елемент простору S^β допускає аналітичне продовження у простір $\mathbb{C}^n$ до цілої функції такої, що

$$\left|x^k\varphi(x+iy)\right|\le c_k e^{\delta\|y\|^{\frac{1}{1-\beta}}}\quad\left(\forall k\in\mathbb{Z}_+^n\right).$$

Оператор перетворення Фур'є F між просторами S_β і S^β встановлює взаємно однозначну і неперервну відповідність, при цьому виконується топологічна рівність $F\left[S_\beta\right]=S^\beta$.

Нехай Φ' — топологічно спряжений простір з Φ, а $F\left[\Phi\right]$ — простір Фур'є-образів елементів простору Φ. Перетворення Фур'є узагальненої функції $f\in\Phi'$ визначається так [11]:

$$\left\langle F[f],F[\varphi]\right\rangle=(2\pi)^n<f,\varphi>,\ \varphi\in\Phi;$$

$$\left\langle F^{-1}[g],F^{-1}[\varphi]\right\rangle=(2\pi)^{-n}<g,\varphi>,\ g\in F[\Phi'],\varphi\in F[\Phi].$$

Методом перетворення Фур'є узагальнених функцій у [1] побудовано функцію Гріна гіперболічної системи (1) у вигляді $G(t;\cdot)=F^{-1}[e^{tP(\xi)}](t;\cdot),\ t\in(0;T],$ досліджено її властивості, зокрема, обґрунтовано належність її компонент до простору S_0' та доведено, що ці компоненти є згортувачами у просторі S_0 основних функцій. При цьому, використовуючи умови з означення гіперболічності системи (1), застосовуючи послідовно твердження теорем $1',2'$ з [11, с. 256, 258], встановлено оцінку

$$\left|e^{tP(\xi+i\eta)}\right|\le c(1+\|\xi\|)^{p(m-1)}e^{\delta\|\eta\|},\quad \xi+i\eta\in\mathbb{C}^n,\ t\in(0;T],\tag{2}$$

в якій оціночні сталі c і δ не залежать від t при $t\in(0;1)$ (у цьому переконуємось шляхом аналізу доведення зазначених тверджень $1'$, $2'$).

Перейдемо до постановки задачі. Зафіксуємо довільно $\varphi(\cdot)$ із векторного простору $\mathbf{S}_\beta$, і для системи (1) задамо початкову умову

$$u\left(t;\cdot\right)\xrightarrow[t\to+0]{S_\beta}\varphi(\cdot).\tag{3}$$

Задача полягає у знаходженні класичних розв'язків системи (1) у просторі $\mathbf{S}_\beta$, $\beta\in[0;1)$, які задовольняють початкову умову (3) й неперервно залежать від початкових даних.

2. Основний результат. Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (1), які швидко спадають на нескінченності, то подіявши на (1) класичним перетворенням Фур'є, одержимо відповідну двоїсту систему

$$\partial_t v(t;\xi)=P(\xi)v(t;\xi),\ (t;\xi)\in\Pi,\tag{4}$$

у якій $v=F[u]\equiv\tilde{u}.$ Урахувавши зазначені властивості оператора F (*див.* п.1), приходимо до висновку, що питання про розв'язування системи (1) у просторі S_β, рівносильне питанню про розв'язування (4) у S^β.

Розв'язавши систему (4) методом відокремлення змінних, одержимо такий її загальний розв'язок: $v(t;\cdot)=e^{tP(\cdot)}c(\cdot), t\in(0;T]$. Звідси вже, згідно з твердженням класичної теореми Коші, знаходимо, що функція

$$v(t;\cdot)=e^{tP(\cdot)}\tilde{\varphi}(\cdot),\ t\in(0;T], \tag{5}$$

єдиний розв'язок системи (4), який задовольняє початкову умову $v\left(t;\cdot\right)|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\cdot)$. Урахувавши оцінку (2) й твердження теореми $3''$ з [11, с. 263], знаходимо, що $e^{tP(\cdot)}$ — мультиплікатор у просторі $\mathbf{S}^\beta$, $\beta\in[0;1)$. Тоді функція $v(t;\cdot)$, що визначена рівністю (5), при кожному фіксованому $t\in(0;T]$, є елементом простору S^β і ця функція, як розв'язок системи (4), неперервно залежить від початкових даних у S^β.

Обгрунтуємо тепер виконання граничного співвідношення

$$v\left(t;\cdot\right)\xrightarrow[t\to+0]{S^\beta}\tilde{\varphi}(\cdot),\ \beta\in[0;1). \tag{6}$$

Для цього, згідно з критерієм збіжності в просторі S^β, досить установити наступні твердження:

I) $$\forall K\subset\mathbb{R}^n\ \forall q\in\mathbb{Z}_+^n:\partial_\xi^q v(t;\xi)\underset{t\to+0}{\overset{\xi\in K}{\rightrightarrows}}\partial_\xi^q\tilde{\varphi}(\xi);$$

II) $$\begin{gathered}\exists B>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \exists c_k>0\ \forall q\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n\ \forall t\in(0;1):\\ \left|\xi^k\partial_\xi^q v(t;\xi)\right|\le c_k B^{|q|}q^{\beta q}\end{gathered}.$$

Скориставшись формулою Лейбніца диференціювання добутку, дістанемо

$$\partial_\xi^q v(t;\xi)=e^{tP(\xi)}\partial_\xi^q\tilde{\varphi}(\xi)+\sum_{k<q}C_q^k\partial_\xi^{q-k}e^{tP(\xi)}\partial_\xi^k\tilde{\varphi}(\xi).$$

Звідси, урахувавши очевидні співвідношення

$$e^{tP(\xi)}\underset{t\to+0}{\overset{\xi\in\mathrm{K}}{\rightrightarrows}}E,\qquad\sup_{t\in(0;1)\xi\in\mathrm{K}}\left\{t^{-1}\,|\,\partial_\xi^{q-k}e^{tP(\xi)}\partial_\xi^k\tilde{\varphi}(\xi)\,|\right\}<+\infty\ \text{при}\ k\ne q$$

(тут E — одинична матриця), приходимо до виконання твердження I).

Далі, оцінка (2) та належність $\tilde{\varphi}(\cdot)$ до простору S^β, $\beta\in[0;1)$, забезпечують існування додатної сталої δ_0 і, для кожного $k\in\mathbb{Z}_+^n$, сталої $\hat{c}_k>0$, з якими для всіх $z=\xi+i\eta\in\mathbb{C}^n$ і $t\in(0;1)$ виконується нерівність

$$|\xi^k v(t;z)| \le \hat{c}_k e^{\delta_0 \|\eta\|^\gamma}, \ \gamma := \frac{1}{1-\beta} \ge 1. \qquad (7)$$

Ця оцінка та незалежність оціночних величин від t при $t \in (0;1)$, у свою чергу, гарантують правильність твердження II). Доведемо цей факт при $n=1$ (загальний випадок реалізується аналогічно). Розглянемо допоміжну функцію $v_k(t;z) := z^k v(t;z), t \in (0;1), z \in \mathbb{C},$ для якої з (7) одержуємо

$$|v_k(t;z)| = |z^k v(t;z)| \le 2^k (|\xi|^k + |\eta|^k)|v(t;z)| \le$$

$$\le 2^k (\hat{c}_k + \hat{c}_0 |\eta|^k) e^{\delta_0 |\eta|^\gamma} \le c_k e^{\delta |\eta|^\gamma}, \ t \in (0;1), z \in \mathbb{C},$$

де $\delta := \delta_0 + \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Звідси, скориставшись інтегральною формулою Коші, знаходимо

$$|\partial_\xi^q v_k(t;\xi)| \le \frac{q!}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|v_k(t;z)|}{|z-\xi|^{q+1}} dz \le q! c_k \frac{e^{\delta |r|^\gamma}}{r^q}, \ t \in (0;1), \xi \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}_+$$

(тут Γ_r — коло радіуса r з центром у т. ξ). Поклавши тепер $r = \left(\frac{q}{\delta\gamma}\right)^{1/\gamma}$ — це значення, при якому величина $e^{\delta |r|^\gamma}/r^q$ досягає мінімуму, дістанемо оцінку

$$|\partial_\xi^q v_k(t;\xi)| \le c_k B^q q^{\beta q}, \ t \in (0;1), \xi \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}_+, \qquad (8)$$

у якій $B = (\delta e \gamma)^{1/\gamma}$. Однак

$$\partial_\xi^q v_k(t;\xi) = \partial_\xi^q (\xi^k v(t;\xi)) = \xi^k \partial_\xi^q v(t;\xi) + kq\xi^{k-q} \partial_\xi^{q-1} v(t;\xi) + \ldots,$$

тоді

$$\xi^k \partial_\xi^q v(t;\xi) = \partial_\xi^q v_k(t;\xi) - (kq\xi^{k-q} \partial_\xi^{q-1} v(t;\xi) + \ldots).$$

Виходячи із цього зображення, доведемо виконання оцінки з твердження II) методом математичної індукції. При $k=0$ ця оцінка збігається з одержаною нерівністю (8). У загальному випадку маємо:

$$|\xi^k \partial_\xi^q v(t;\xi)| \le |\partial_\xi^q v_k(t;\xi)| + kq |\xi^{k-1} \partial_\xi^{q-1} v(t;\xi)| +$$

$$+ \frac{k(k-1)q(q-1)}{2!} |\xi^{k-2} \partial_\xi^{q-2} v(t;\xi)| + \ldots \le c_k B^q q^{\beta q} + kq c_{k-1} B^{q-1} \times$$

$$\times (q-1)^{\beta(q-1)} + \frac{k(k-1)q(q-1)}{2!} c_{k-2} B^{q-2} (q-2)^{\beta(q-2)} +$$

$$+ \ldots \le c'_k B^q q^{\beta q} \left(1 + q \frac{(q-1)^{\beta(q-1)}}{q^{\beta q}} + \frac{1}{2!} q \frac{(q-1)^{\beta(q-1)}}{q^{\beta q}} \times \right.$$

$$\times(q-1)\frac{(q-2)^{\beta(q-2)}}{(q-1)^{\beta(q-1)}}+\ldots\Bigg)\le c_k' B^q q^{\beta q}\left(1+a_q+\frac{1}{2!}a_q a_{q-1}+\ldots\right)\le$$

$$\le c_k' B^q \left(e^{q^{1-\beta}}\right)^2 q^{\beta q}, \quad t\in(0;1),\ \xi\in\mathbb{R}.$$

Тут використано оцінку $1+a_q+\frac{1}{2!}a_q a_{q-1}+\ldots\le\left(e^{q^{1-\beta}}\right)^2$ із [11, с. 262], у якій $a_q := q\frac{(q-1)^{\beta(q-1)}}{q^{\beta q}}$.

Звідси, врахувавши, що $\left(e^{q^{1-\beta}}\right)^2=\left(e^{\frac{2}{q^{\beta}}}\right)^q\le e^{2q}$, $\beta\ge 0$, приходимо до твердження ІІ).

Отже, доведено коректну розв'язність задачі Коші (4), (6) у просторі $\mathbf{S}^{\beta}$, $\beta\in[0;1)$, а відтак, правильність наступного твердження.

Теорема. Нехай $\varphi(\cdot)\in\mathbf{S}_{\beta}$, $\beta\in[0;1)$, тоді відповідна задача Коші (1), (3) на множині Π коректно розв'язна. Її розв'язок u зображується формулою $u(t;x)=G(t;x)*\varphi(x)$, $(t;x)\in\Pi$, і при кожному фіксованому $t\in(0;T]$ є елементом простору $\mathbf{S}_{\beta}$.

Висновок. Розв'язки гіперболічних систем (1) у просторах $\mathbf{S}_{\beta}$, $\beta\in[0;1)$, стосовно просторової змінної зберігають властивості, які вони мали на початковій гіперплощині.

Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Москва : Физматгиз, 1958. — 274 с.
2. Петровский И. Г. О задаче Коши для уравнений в частных производных / И. Г. Петровский // Мат. сб. — 1937. — Т. 2, №5. — С. 815–870.
3. Leray J. Hyperbolic differential equations / J. Leray. — Princeton, 1952. — 238 p.
4. Ладыженская О. А. Смешанная задача Коши для гиперболических уравнений / О. А. Ладыженская. — Москва : Гостехиздат, 1953. — 279 с.
5. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. — Москва : ИЛ, 1961. — 122 с.
6. Лере Ж. Задача Коши / Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котаке. — Москва : Мир, 1967. — 152 с.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — Москва : Наука, 1988. — 333 с.
8. Каленюк П. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П. Каленюк, З. Нитребич. — Львів : Львівська політехніка, 2002. — 292 с.

9. Firman T. Mixed problem for countable hyperbolic system of linear equation / T. Firman, V. Kyrylych // Azerbaijan Jornal of Mathematics. — 2015. — Vol. 5. — № 2. — P. 47–60.
10. Derevianko T. O. Optimal control of quasihyperbolic system of linear equations of the first order with infinite planning horizon / T. O. Derevianko, V. M. Kyrylych // Ukrain. Mat. Journal. — 2015. — Vol. 67. — № 2. — P. 185–201.
11. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — Москва : Физматгиз, 1958. — 307 с.

SMOOTH SOLUTIONS TO HYPERBOLIC BY SHILOV SYSTEMS

We consider a wide class of linear partial differential equations hyperbolic by Shilov, which covers the class of hyperbolic by Petrovsky systems with constant coefficients, and also the class of Gording equations. For such systems, the problem of finding smooth classical solutions, which are vector functions with compact support or rapidly decreasing at infinity, is investigated. Studies are carried out by the Fourier transform method in combination with the theory of spaces of the type S and S' Gelfand I. M. and Shilov G.E. basic and generalized functions. The components of the fundamental solution of the Cauchy problem for such systems belong to the Dirac space of generalized functions, and also are convolvers in some spaces of the main Gelfand and Shilov functions. This made it possible to establish in the classical sense the correct solvability of the Cauchy problem in each such space of basic functions. That is, to prove the existence, uniqueness and continuous dependence on the initial data of the classical solution of a hyperbolic system in space of basic functions, provided that its boundary value on the initial hyperplane is an element of this space. At the same time, the solution tends to the initial vector of the function as the time variable approaches zero in the sense of the topology of this space. This result, in particular, makes it possible to draw the important conclusion that within the framework of a space of the S type, evolutionary processes with no external influence, which are described by Shilov hyperbolic system, may, over time, retain those qualitative characteristics that they owned at the initial stage of evolution.

Key words: *hyperbolic by Shilov systems, Cauchy problem, basic and generalized functions.*

Отримано: 15.11.2018