УДК 004.61
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.39-55

А. А. Верлань*, д-р философии,
О. А. Дячук **, канд. техн. наук,
Е. А. Палагина*,** канд. техн. наук,
В. В. Палагин*,** д-р техн. наук

* Норвежский университет науки и технологий, NTNU,
г. Йовик, Норвегия,
** Институт экономики и прогнозирования НАН Украины, г. Киев,
*** Черкасский государственный
технологический университет, г. Черкассы

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Развитие современных технических и информационных систем характеризуется повышенными требованиями к надежности функционирования и достоверности прогноза их динамических характеристик. Одним из условий такого прогнозирования является построение математических моделей, параметры которых отображают реальные факторы, влияющие на динамику системы. Построение достаточно точных моделей вызывает трудности при их реализации и взаимодействии рассматриваемых систем с внешней средой. Для преодоления этих трудностей разрабатываются методы упрощения (редукция) математических моделей.

При всем разнообразии используемых подходов к упрощению математических моделей исследуемых систем редукция сложной модели всегда основана на некоторой близости (эквивалентности) исходной и упрощенной модели. В связи с тем, что оценка эквивалентности моделей существенным образом определяется целями исследования системы и спецификой исходной модели, классификация методов упрощения по отношениям эквивалентности моделей представляется затруднительной. Анализ известных методов упрощения моделей показывает их основной недостаток, который заключается в сравнении полных и упрощенных моделей при номинальных значениях параметров систем. В большинстве методов при этом не ставится также и задача учета полной погрешности оценки показателей качества исследуемых систем.

В данной работе принято, что упрощенная модель эквивалентна исходной полной модели в отношении заданных показателей качества, если использование упрощенной модели вместо полной не требует ослабления заданных ограничений на точность оценок показателей качества исследуемой системы.

Предложен принцип упрощения моделей, заключающийся в пренебрежении параметрами, факторами или фрагментами модели, незначимыми для заданных показателей качества. На этом принципе разработан метод упрощения математических моделей, отличающийся от известных учетом дополнительного движения и согласованием точности исходных данных и возмущений параметров с требуемой точностью оценок показателей качества исследуемых систем.

Ключевые слова: *методы редукции математических моделей, оценивание точностных требований, динамические системы.*

Введение. Развитие науки и техники приводит к необходимости управления все более усложняющимися системами, в связи с чем возрастает роль надежного прогноза их движения. Необходимым условием такого прогноза является получение математической модели, параметры которой отображают реальные физические, конструктивные, технологические и другие факторы, влияющие на динамику системы. Однако построение ее достаточно точной модели часто невозможно из-за отсутствия адекватных моделей элементов и взаимосвязей системы с внешней средой [1]. Для преодоления этой трудности создаются моделирующие комплексы, содержащие в своем составе реальные элементы системы, модели которых сложны или неизвестны [2, 3]. Комплексами такого рода являются испытательные стенды для доводки и испытаний технических систем и различные тренажеры для обучения персонала, управляющего сложными объектами — тренажеры для подготовки операторов электростанций, экипажей судов, пилотов летательных аппаратов и т.п.

Следующим шагом в направлении приближения модели к оригиналу является использование натурных имитаторов [4] — натурных моделирующих комплексов, позволяющих моделировать движение исследуемых объектов в натурных условиях их эксплуатации. Применение натурных имитаторов с оператором в контуре управления дает возможность производить отработку элементов и технических систем, с которыми взаимодействует оператор, эффективно организовать профессиональный отбор, обучение и тренировку обслуживающего персонала в реальных условиях функционирования исследуемой эргатической системы.

Наиболее характерным примером таких систем являются имитаторы летательных аппаратов, задачи анализа, проектирования и создания которых в полной мере соответствуют назначению и сути методов редукции (упрощения) динамических моделей, рассматриваемых в данной работе [3, 5]. Естественно, существует большое количество классов других технических задач, относящихся к компьютерно-интегрированным системам, ориентируемых на применение методов редукции математических моделей.

Анализ методов упрощения математических моделей динамических систем показывает на применение двух основных подходов: построение упрощенной модели по критерию близости показателей качества исходной и упрощенной моделей в пространстве изображений и в пространстве состояния [6–10].

Необходимо отметить характерный недостаток известных методов упрощения моделей, заключающийся в сравнении полных и упрощенных моделей при номинальных значениях параметров систем. В большинстве методов при этом не ставится также и задача учета полной погрешности оценки показателей качества исследуемых систем.

Целью работы является разработка методов редукции математических моделей динамических систем с оценкой требований к параметрам элементов имитатора для обеспечения заданной точности динамического подобия.

Метод упрощения математических моделей в натурных имитаторах. В качестве задачи исследования рассматривается натурный имитатор для воспроизведения динамики исследуемого объекта. Принято, что на уровне организации всей вычислительной системы имитатора известны режимы его функционирования, ограничения на координаты и управления, компоненты $\Phi_i (i = 1, n_ф)$ вектора показателей качества имитатора и ограничения $\Phi_{t\Sigma}$ на них. Известными считаются структура и набор факторов в моделях движения моделируемого и базового объектов, оценки $\Delta\Phi_{0m}$ и $\Delta\Phi_{0b}$ неадекватности этих моделей, характеристики управляющих и возмущающих воздействий. Будем предполагать выполненной параметризацию управляющих и возмущающих воздействий с оценкой возмущений получаемых детерминированных и случайных параметров соответствующих базисных функций. Предполагается также заданной информация $\mu\left(\Delta P\right)$ о точности других параметров модели, в том числе коэффициентов эмпирических или регрессионных зависимостей, используемых в модели, конструктивно-технологических параметров системы и таких элементов имитатора, как преобразователи и датчики координат объекта и параметров внешней среды.

В принятых предположениях рассматриваемые модели динамики имеют вид системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_k}{dt} = f_k(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_m), \\ q_k(t_s) = q_{ks}, p_k = q_{ks}, \left(k = \overline{1, n}\right), \end{cases} \qquad (1)$$

в которой время t, переменные состояния q, номиналы параметров $\overline{P}$ и их возмущения ΔP изменяются в заданных областях:

$$t \in [t_s, t_f], \;\; q \in R_q, \;\; \overline{P}_j \in R_{pj}, \;\; \Delta P_j \in R_{\Delta pj}, \;\; \left(j = \overline{1,m}\right). \tag{2}$$

Отметим, что точки $\overline{P}^{\langle l \rangle} \in R_p$ однозначно определяют соответствующий номинальный, невозмущенный режим движения объекта.

Вектор P содержит детерминированные и случайные компоненты — P_{jd} и $P_{js}(jd \in J_d, js \in J_s)$. Примем, что кроме (2) задана минимальная информация о случайных параметрах P_s — математические ожидания $M[P_j] = \overline{P}_j + M[\Delta P_j]$ и центральные моменты

$$\mu_i^{k_i} j^{k_j} = M\left[\left(P_i - M[P_i]\right)^{k_i} \cdot \left(P_j - M[P_j]\right)^{k_j}\right], \;\; \left(i, j \in J_s\right).$$

Ввиду того, что в вычислительное устройство имитатора значения координат объекта и параметров внешней среды вводятся с погрешностями, равными сумме погрешностей датчиков и преобразователей (а каждая из них, в свою очередь, является суммой первичных погрешностей — методической, инструментальной, динамической и т.д.), примем, что в этом случае аддитивно возмущенных параметров P модели известны моментные характеристики $M[\Delta P_{ji}]$,

$$\mu_{ji}^{k_i} = M[\Delta^0 P_{ji}^{k_i}],$$

$$\mu_{j_1}^{k_1} \ldots j_{n_c}^{k_{n_c}} = M\left[\prod_{i=1}^{n_c}\left(\Delta P_{ji} - M[\Delta P_{ji}]\right)^{k_i}\right]$$

первичных компонент, ΔP_{ji} — возмущения $\Delta P_j = \Delta P_{j_1} + \ldots + \Delta P_{j_{n_c}}$.

В общем случае выходные координаты — это заданные функции переменных состояния: $Y = Y(q)$. При воспроизведении динамики исследуемых объектов выходными координатами натурного имитатора являются переменные состояния и скорости их изменения:

$$Y_k = q_k, \;\; Y_{n+k} = \frac{dq_k}{dt}, \;\; \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{3}$$

В задачах обеспечения точности моделирования для оценки отклонений

$$\Delta Y_k(t) = Y_k(t) - \overline{Y}_k(t), \;\; \left(k = 1, n_y; n_y = 2n\right) \tag{4}$$

выходных координат Y_k от некоторых опорных значений U_k используют приведенную максимальную погрешность

$$\varPhi_{1k} = \frac{\max\limits_{t \in [t_s, t_f]} \left|\Delta Y_k(t)\right|}{\max\limits_t \left|\overline{Y}_k(t)\right|} \tag{5}$$

либо приведенную среднеквадратическую погрешность

$$\Phi_{2k} = \frac{\int\limits_{t_s}^{t_f} \left|\Delta Y_k(t)\right|^2 dt}{\int\limits_{t_s}^{t_f} \overline{Y}_k^2(t) dt}. \tag{6}$$

При отсутствии детерминированных возмущений ΔP_d параметров системы (1) оценка $\max\limits_t \left|\Delta Y_k\right|$ случайного возмущения ΔY_k может быть заменена оценкой $n_\sigma \cdot \sigma_{Y_k}$ — окрестности опорной траектории $\overline{Y}_k$, которой с вероятностью $1 - \frac{1}{n_\sigma^2}$ накрывается область разброса координат Y_k. Показатель качества в этом случае принимает вид:

$$\Phi_{3k} = \frac{\max\limits_t \left(\left| M[\Delta Y_k] \right| + n_\sigma \cdot \sigma_{Y_k} \right)}{\max\limits_t \left| \overline{Y}_k(t) \right|}. \tag{7}$$

В предположенном общем случае детерминированных и случайных возмущений параметров усредненные по ансамблю ΔP_s числовые характеристики $M\left[Y(t)\right]$ и $D\left[Y(t)\right]$ координат системы являются функциями компонент P_d. По аналогии с (5), (7) показатель качества в этом случае можно определить оценкой

$$\Phi_{4k} = \max_{\Delta P_d \in R_{\Delta P}} \frac{\max\limits_t \left(\left| M[Y_k(t, P_d) - \overline{Y}_k(t, \overline{P})] \right| + n_\sigma \cdot \sigma_{Y_k}(t, P_d) \right)}{\max\limits_t \left| \overline{Y}_k(t, \overline{P}) \right|}, \left(k = 1, n_y\right). \tag{8}$$

В дальнейшем индекс k оцениваемого отклонения координаты Y_k будет опускаться всюду, где это не вызывает неоднозначного прочтения соответствующих выражений.

Ограничения $\Phi_{t\Sigma}$ на показатели качества имитатора представляют собой ограничения на допустимую разность координат моделируемого и базового объектов:

$$\Phi\left(\hat{Y}_m - \hat{Y}_b\right) \le \Phi_{t\Sigma}, \tag{9}$$

где Φ — функционал типа (5)–(8).

Будем использовать обозначения: $\Delta Y_0 = \hat{Y} - \overline{Y}_0(\overline{P})$ — для области неопределенности координат объекта вследствие неадекватности модели, $\Delta Y_{mb} = \overline{Y}_{0m}(\overline{P}) - \overline{Y}_{0b}(\overline{P})$ — для расчетной разности между координатами моделируемого и базового объектов, $\Delta Y_{cp} = Y(P) - \overline{Y}_0(\overline{P})$ — для суммарной области неопределенности координат модели из-за вычислительной погрешности оценки координат по невозмущенной модели и вследствие возмущений параметров, учтенных в модели. Если

$$Y_c(\overline{P}) = \overline{Y}_0(\overline{P}) + \Delta Y_c \tag{10}$$

— координаты, вычисленные при невозмущенных параметрах, и

$$Y(P) = Y_c(\overline{P}) + \Delta Y_P \tag{11}$$

— координаты возмущенной модели, то

$$Y_{cp} = \Delta Y_p + \Delta Y_c = \left(Y(P) - Y_c(\overline{P})\right) + \left(Y_c(\overline{P}) - \overline{Y}_0(\overline{P})\right). \tag{12}$$

Далее функционалом Φ будем обозначать оценку модуля максимальных отклонений ΔY координат, обусловленных соответствующим источником возмущения в текущей точке t_i интервала движения системы: $\Phi_p = \max\limits_{\Delta P}\left|\Delta Y_p\right|$, $\Phi_c = \max\left|\Delta Y_c\right|$, и т.д. (здесь индекс k опущен, с записью индекса k координаты Y_k эти покоординатные равенства примут вид: $\Phi_{kp} = \max\limits_{\Delta P}\left|\Delta Y_{kp}\right|$, $\Phi_{kc} = \max\left|\Delta Y_{kc}\right|$, и т.д.).

Так как Φ являются функционалами типа норм, то в силу полуаддитивности Φ требование (9) приводится к виду:

$$\Phi\left(\Delta Y_{cpm}\right) + \Phi\left(\Delta Y_{cpb}\right) \le \Phi_{tmb} = \Phi_{t\Sigma} - \Phi\left(\Delta Y_{0m}\right) - \Phi\left(\Delta Y_{0b}\right) - \Phi\left(\Delta Y_{mb}\right). \tag{13}$$

С использованием обозначений $\Phi_{ti} = \max\limits_{t}\Phi_{cpi}$, $\left(i \in \{m, b\}\right)$ и коэффициента $r_{bm} = \dfrac{L_b}{L_m}$, равного отношению затрат на оценки $\Phi\left(\Delta Y_{cpm}\right)$ и $\Phi\left(\Delta Y_{cpb}\right)$ областей неопределенности ΔY_{cpm} и ΔY_{cpb}, точностные требования (13) к математическим моделям динамики в имитаторе можно записать в виде:

$$\Phi_{tm} + \Phi_{tb} \le \Phi_{tmb}, \tag{14}$$

$$\Phi_{tm} = \frac{\Phi_{tmb}}{r_{bm} + 1}, \quad \Phi_{tb} = r_{bm} \cdot \Phi_{tm}. \tag{15}$$

Итак, можно считать заданными допуски Φ_{tm} и Φ_{tb} на оценку областей неопределенности выходных координат математических моделей моделируемого и базового объектов.

Принимаем, что упрощенная модель эквивалентна исходной полной модели в отношении заданных показателей качества, если использование упрощенной модели вместо полной не требует ослабления заданных ограничений на точность оценок показателей качества исследуемой системы. В соответствии с этим возможно упрощение любой модели путем пренебрежения параметрами, факторами или фрагментами модели, незначимыми для заданных показателей качества. Это положение и составляет используемый в работе принцип упрощения моделей.

При оценке отклонений координат от опорной траектории $\overline{Y}_0$ исходной модели (по предположению, более точной, чем упрощенная) сама возможность упрощения исходной модели при заданных возмущениях параметров определится условием $C_p > 1$ в выражении

$$\overline{Y}_0 \pm C_p\left(\overline{\Phi}_p + \Delta\overline{\Phi}_p + \overline{\Phi}_c\right) = Y_0 \pm \Phi(t), \tag{16}$$

которое определяет допустимую область координат упрощенной модели, согласованную с исходными данными о возмущениях параметров. В (16) чертой помечены величины, определяемые по исходной модели. В частности, $\Delta\overline{\Phi}_p$ — погрешность оценки $\overline{\Phi}_p$ дополнительного движения исходной модели.

Согласно сформулированному критерию эквивалентности, упрощенная модель будет по точности эквивалентна исходной, если определяемые по упрощенной модели выходные координаты не выходят из допустимой области. Для конкретизации этого условия рассмотрим разность $Y(P) - \overline{Y}(P)$ между координатами упрощенной модели

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y, P), \;\; Y(t_s) = Y_s \tag{17}$$

и полной модели

$$\frac{d\overline{Y}}{dt} = \overline{f}(t, \overline{Y}, P), \;\; \overline{Y}(t_s) = \overline{Y}_s. \tag{18}$$

Эта разность определяется соотношением

$$\begin{gathered}\frac{d(Y-\overline{Y})}{dt} = f(t,Y,P) - \overline{f}(t,\overline{Y},P) = \left(f(t,Y,P) - f(t,\overline{Y}_r,\overline{P})\right) - \\ -\left(\overline{f}(t,\overline{Y},P) - \overline{f}(t,\overline{Y}_0,P)\right) + \left(f(t,\overline{Y}_r,\overline{P}) - \overline{f}(t,\overline{Y}_0,\overline{P})\right), \\ \left(\left(Y-\overline{Y}\right)_{t=t_s} = Y_s - \overline{Y}_s\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Последняя группа слагаемых в правой части (19) определяет разницу $\Delta Y_{f\overline{f}} = \overline{Y}_r(\overline{P}) - \overline{Y}_0(\overline{P})$ между опорными (невозмущенными) траекториями упрощенной и полной моделей, так как

$$\frac{d(\overline{Y}_r - \overline{Y}_0)}{dt} = f(t, \overline{Y}_r, P) - \overline{f}(t, \overline{Y}_0, \overline{P}).$$

Первые две группы слагаемых в (19) определяют дополнительные движения упрощенной и полной моделей:

$$\frac{d\Delta Y_p}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y_p + \frac{\partial f}{\partial P}\Delta P, \quad \frac{d\Delta \overline{Y}_p}{dt} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{Y}}\Delta \overline{Y}_p + \frac{\partial \overline{f}}{\partial P}\Delta P.$$

С использованием функций чувствительности первого порядка

$$\frac{dY}{dP} = \frac{\partial \Delta Y_p}{\partial P} = S, \quad \frac{d\overline{Y}}{dP} = \frac{\partial \Delta \overline{Y}_p}{\partial P} = \overline{S}$$

дополнительные движения ΔY_p и $\Delta \overline{Y}_p$ записываются в виде

$$\Delta Y_p = Y - \overline{Y}_r \approx S\Delta P, \quad \Delta \overline{Y}_p = Y - \overline{Y}_0 \approx \overline{S}\Delta P. \qquad (20)$$

В этих обозначениях разность координат упрощенной и полной моделей с учетом вычислительных погрешностей ΔY_c и $\Delta \overline{Y}_c$ оценок опорных траекторий $\overline{Y}_r$ и $\overline{Y}_0$ представима в виде:

$$\begin{aligned} Y - \overline{Y} &= \overline{Y}_r + \Delta Y_c + \Delta Y - \left(\overline{Y}_0 + \Delta \overline{Y}_c + \Delta \overline{Y}_p\right) \approx \\ &\approx \Delta Y_{f\overline{f}} + S\Delta P + \Delta Y_c - \overline{S}\Delta P - \Delta Y_c. \end{aligned} \qquad (21)$$

Из последнего соотношения видно, что при упрощении моделей совершенно недостаточно оценивать «близость» упрощенной модели к исходной лишь той или иной мерой разности $\Delta Y_{f\overline{f}}$ их опорных траекторий. С этой точки зрения любые методы упрощения математических моделей не могут рассматриваться как корректные без оценки значимости дополнительного движения, которая требуется методологией теории чувствительности.

В соответствии с изложенным при оценке допустимой области неопределенности координат Φ_t — окрестностью опорной траектории исходной модели область неопределенности координат упрощенной модели (эквивалентной исходной по допуску Φ_t) определяется соотношением

$$\Phi\left(\left|\overline{Y}_r - \overline{Y}_0\right|\right) + \Phi_p + \Delta\Phi_p + \Phi_c + \overline{\Phi}_c \le \Phi_t. \qquad (22)$$

Здесь, аналогично (16), Φ_p, $\Delta\Phi_p$ — оценки дополнительного движения упрощенной модели и погрешность этой оценки.

Условие $\Phi\left(\Delta Y_{f\overline{f}}\right) \le \Phi_t$ обычно проводимого упрощения модели получается из (22) пренебрежением Φ_p, $\Delta\Phi_p$, Φ_c, $\overline{\Phi}_c$.

Слагаемые $\Phi\left(\Delta Y_{f\overline{f}}\right)$, Φ_p, $\overline{\Phi}_p$ и Φ_t в соотношениях (16), (22) зависят от опорных значений $\overline{P}$ вектора параметров, поэтому белее четкая запись условия упрощения модели имеет вид

$$\overline{Y}_0(\overline{P}) \pm C_p\left(\overline{\Phi}_p(\overline{P}) + \Delta\overline{\Phi}_p + \overline{\Phi}_c\right) = \overline{Y}_0(\overline{P}) \pm \Phi_t(\overline{P}), \quad C_p > 1, \qquad (23)$$

$$\Phi\left(\Delta Y_{f\bar{f}}(\bar{P})\right)+\Phi_p(\bar{P})+\Delta\Phi_p+\Phi_c+\bar{\Phi}_c\leq\Phi_t(\bar{P}). \qquad (24)$$

При детерминированных и случайных возмущениях параметров в качестве опорных траекторий исходной и упрощенной моделей естественно принять математические ожидания $\bar{Y}_0(P_d)=M\left[\bar{Y}(P)\right]$, $\bar{Y}_r(P_d)=M\left[Y(P)\right]$, оцениваемые с погрешностями $\bar{\Phi}_c=\Phi\left(\Delta M[\bar{Y}]\right)$, $\Phi_c=\Phi\left(\Delta M[Y]\right)$, соответственно. Области неопределенности выходных координат, обусловленные случайными компонентами ΔP_s, с вероятностью не меньше $1-\frac{1}{n_\sigma^2}$ накрывается интервалами

$$[\tilde{Y}_0-n_\sigma\left(\sigma_{\tilde{Y}}+\Delta\sigma_{\tilde{Y}}\right),\bar{Y}_0+n_\sigma\left(\sigma_{\tilde{Y}}+\Delta\sigma_{\tilde{Y}}\right)] \qquad (25)$$

при оценке $\tilde{\Phi}_{ps}=\Phi\left(\tilde{Y}(P)-\tilde{Y}_0(P_d)\right)$ (величины $\Delta\sigma_{\tilde{Y}}$ — погрешности оценки среднеквадратических отклонений $\sigma_{\tilde{Y}}=\sigma_{\tilde{Y}}(P_d)$ координат полной $\left(\tilde{Y}=\bar{Y},\tilde{Y}_0=\bar{Y}_0,\tilde{\Phi}_{ps}=\bar{\Phi}_{ps}\right)$ и упрощенной $\left(\tilde{Y}=Y,\tilde{Y}_0=\bar{Y}_r,\tilde{\Phi}_{ps}=\Phi_{ps}\right)$ моделей соответственно). Оценкой разности опорных траекторий в этом случае является величина $\left|\Delta Y_{f\bar{f}}(P_d)\right|=\left|\bar{Y}_r-\bar{Y}_0\right|$ и условия (23), (24) упрощения модели могут быть записаны в форме

$$M\left[\bar{Y}(t,P)\right]\pm C_p\left(\bar{\Phi}_c+n_\sigma\cdot\left(\sigma_{\bar{Y}}(P_d)+\Delta\sigma_{\bar{Y}}\right)\right)=\bar{Y}_0(P_d)\pm\Phi_t(P_d),\ \ C_p>1 \qquad (26)$$

$$\left|\bar{Y}_r-\bar{Y}_0\right|+\Phi_c+\Phi_c+n_\sigma\cdot(\sigma_Y(P_d)+\Delta\sigma_Y)\leq\Phi_t(P_d). \qquad (27)$$

Если в качестве опорных берутся траектории $Y_0(\bar{P})=M\left[Y(t,P)\right]-$ $-\Delta\bar{Y}_{pd}$ исходной модели и $\bar{Y}_r(\bar{P})=M\left[Y(t,P)\right]-\Delta Y_{pd}$ — упрощенной, то при $\sigma_{\bar{Y}}(P_d)\approx\sigma_{\bar{Y}}(\bar{P})$, $\sigma_Y(P_d)\approx\sigma_Y(\bar{P})$ условия упрощения (26), (27) записываются в виде:

$$\bar{Y}(t,\bar{P})\pm C\left(\bar{\Phi}_{pd}+\Delta\bar{\Phi}_{pd}+\bar{\Phi}_c+n_\sigma\cdot\left(\sigma_{\bar{Y}}(\bar{P})+\Delta\sigma_{\bar{Y}}\right)\right)=\bar{Y}_0(\bar{P})\pm\Phi_t, \qquad (28)$$

$$\left|\bar{Y}_r(\bar{P})-\bar{Y}_0(P)\right|+\Phi_{pd}+\Delta\Phi_{pd}+\Phi_c+\bar{\Phi}_c+n_\sigma\cdot(\sigma_Y(\bar{P})+\Delta\sigma_Y)\leq\Phi_t(\bar{P}) \qquad (29)$$

$$(c>1,\ \forall\bar{P}\in R_p).$$

В (28), (29) $\bar{\Phi}_{pd}$ и Φ_{pd} — оценки возмущений координат полной и упрощенной моделей, вызванных детерминированными компонентами возмущений параметров, $\Delta\bar{\Phi}_{pd}$ и $\Delta\Phi_{pd}$ — погрешности этих оценок.

Соотношения (26), (28) являются необходимыми условиями упрощения исходной модели и формой согласования требуемой точности модели и точности исходных данных. Соотношения (27), (29) определяют упрощенную модель, эквивалентную исходной по показателю.

Соотношения (28), (29) удовлетворяют таким требованиям комплексного подхода, как учет полной погрешности оценок требуемых характеристик моделируемого движения системы и согласование допуска на эти характеристики с точностью исходных данных и оценкой области неопределенности координат, вызываемой возмущениями параметров элементов системы.

Определение множества параметров исходной системы, при пренебрежении которыми выполняются необходимое условие упрощения (28) и соотношение эквивалентности (29) на интервале $\left[t_s, t_f\right]$ движения системы во всей области R_p изменения номиналов параметров составляет основу предлагаемой методики упрощения модели с обеспечением требуемых показателей точности.

Реализация точностной редукции математических моделей динамики. Полученные соотношения (28), (29) могут быть конструктивно использованы для реализации предложенного метода к упрощению математических моделей по критерию точности.

При заданном допуске Φ_t на точность модели, согласованном с характеристиками возмущений параметров, определяющих основную компоненту $\bar{\Phi}_p$ суммарной области неопределенности $\Phi_\Sigma = \bar{\Phi}_p + \Delta\bar{\Phi}_p + \bar{\Phi}_c$ исходной модели, резерв точности $\Phi_r = \Phi_t - \Phi_\sum > 0$ будем использовать для упрощения модели следующим образом. Ранжируем параметры по оценкам их вкладов в область неопределенности $\Delta\bar{Y}$ выходных координат исходной модели с учетом экономии времени вычисления выходных координат вследствие пренебрежения этими параметрами. Тогда максимальное число параметров с низкими рангами, суммарный вклад которых в область неопределенности $\Delta\bar{Y}$ не превышает резерва Φ_r, определяет множество L_{np} параметров, пренебрежение которыми дает самую простую модель. Редуцируем исходную модель обнулением незначимых параметров, мультипликативно не связанных со значимыми. Так как параметрическая чувствительность координат редуцированной модели отличается от исходной, требуется проверка точности полученной редуцированной модели. При выполнении соотношения (29) на всем интервале движения и во всей области R_p задание номиналов параметров редуцированная модель удовлетворяет заданным точностным требованиям.

Рассмотрим возможность удовлетворения точностных требований к модели в случае невыполнения условий (29) или при отсутствии резерва точности исходной модели ($\Phi_r < 0$) за счет уменьшения дисперсий σ_Y^2 случайных компонент возмущений координат Y. Пусть $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_u$, $\sigma_Y^2(\bar{P})_u$ — неуправляемые части дисперсий выходных координат, обусловленные группой существенных возмущений параметров, уменьшение которых связано со столь большими затратами, что является нерациональным или даже невозможным при разработке имитатора. Примерами возмущений этой группы являются технологические разбросы размеров, нарушения геометрии элементов конструкции и т.п. К группе неуправляемых возмущений относятся также изменения координат и параметров внешней среды в промежутках между дискретными моментами времени, определяемыми максимальной частотой опроса датчиков.

Вторую группу существенных возмущений параметров составляют погрешности, с которыми в вычислительное устройство имитатора вводятся значения координат объекта и параметров внешней среды. Так как эти погрешности определяются точностью датчиков и преобразователей в каналах измерения соответствующих величин, то ими можно управлять. Здесь кстати можно отметить, что обоснование выбора точности датчиков и преобразователей, являющееся основой метрологического обеспечения вычислительно-управляющей системы имитатора, нельзя осуществить без оценок дисперсий $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})$, $\sigma_Y^2(\bar{P})$ выходных координат, обусловленных возмущениями всех параметров системы.

Третья группа существенных возмущений параметров обусловлена погрешностями оценок коэффициентов эмпирических или регрессионных зависимостей, используемых в модели. В рассматриваемой конкретной модели динамики полета самолета возмущениями этой группы являются погрешности коэффициентов аэродинамических сил, моментов и погрешности аппроксимации тяги двигателей. Причина выделения этих погрешностей в отдельную группу следующая. Как известно, оценки коэффициентов регрессионных зависимостей в случае учета лишь аргументов остаются состоятельными (с увеличением лишь дисперсии оценок), в то время как построение функций регрессии при недостающих аргументах приводит к потере состоятельности оценок [10]. В связи с этим при отсутствии информации о достаточном учете всех факторов в используемой регрессионной зависимости следует оценить ее чувствительность к нулевым значениям факторов (аргументов), которые предположительно могли быть опущены. При большой чувствительности к ним есть серьезные основания перестроить регрессионную зависимость с учетом недостающих значимых аргументов. Ввиду сказанного, в общем случае в заданные эмпирические зависимости в модели (1) должны быть добавлены члены, соответствующие наборам аргументов, порядок которых превышает порядок учтенных аргументов (при полиномиальной регрессии). Значимость добавленных членов, обнаруженная в процессе упрощения усложненной таким образом модели, потребует уточнения коэффициентов эмпирических зависимостей. При этой дополнительной обработке экспериментальных данных есть возможность учесть параметрическую чувствительность координат для уменьшения влияния погрешностей коэффициентов получаемой эмпирической зависимости на дисперсии выходных координат.

Выбором характеристик σ_j^2 точности датчиков, преобразователей и коэффициентов эмпирических зависимостей имеется возможность управлять возмущениями $\Delta P_{js}\,(j \in J_{cp})$ двух последних групп.

Таким образом, при невыполнении условий (28), (29) с заданными возмущениями параметров должна решаться распределительная задача назначения допусков на погрешности перечисленных элементов. Сформулируем ограничения на выбор σ_j, вытекающие из условий (28), (29).

Допустимые дисперсии выходных координат $\bar{Y}$ и Y, согласно соотношениям (28), (29), определяются величинами:

$$\bar{\sigma}_t = \frac{\dfrac{\Phi_t}{C_p} - (\bar{\Phi}_{pd} + \Delta\bar{\Phi}_{pd} + \bar{\Phi}_c)}{n_\sigma} - \Delta\sigma_{\bar{Y}}, \tag{30}$$

$$\sigma_t = \frac{\Phi_t - (\Phi_{pd} + \Delta\Phi_{pd} + \Phi_c + \bar{\Phi}_c)}{n_\sigma} - \Delta\sigma_Y. \tag{31}$$

Поэтому ограничения на управляемые части $\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_c$, $\sigma_Y^2(\bar{P})_c$ дисперсий координат исходной и упрощенной моделей, обусловленные управляемыми возмущениями $\Delta P_{js}(\sigma_j^2 = D[\Delta P_j],\, j \in J_{cp})$, определяются соотношениями:

$$\sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_c \le \bar{\sigma}_t^2 - \sigma_{\bar{Y}}^2(\bar{P})_u, \tag{32}$$

$$\sigma_Y^2(\bar{P})_c \le \sigma_t^2 - \sigma_Y^2(\bar{P})_u. \tag{33}$$

Итак, в общем случае намеченная схема упрощения модели для ее реализации требует решения следующих задач:

1) оценки дополнительных движений $\Delta\bar{Y}_{pd} = \bar{Y}(t, P_d) - \bar{Y}(t, \bar{P})$ и $\Delta Y_{pd} = Y(t, P_d) - Y(t, \bar{P})$, обусловленных детерминированными возмущениями $\Delta P_p = P_d - \bar{P}_d$ параметров в исходной и упрощенной моделях;

2) оценки числовых вероятностных характеристик (математических ожиданий и дисперсий) выходных координат нелинейных систем при заданных моментных характеристиках случайных параметров;
3) распределения допусков на погрешности параметров элементов системы;
4) построения конечной Δ-сети точек $p^{\langle l\rangle} \in R_p$ с выполнением условий (28), (29) во всех окрестностях точек $p^{\langle l\rangle}$.

От полноты учета всех рассмотренных групп возмущений существенно зависит корректность вывода об удовлетворительной точности оценок исследуемой системы по ее модели. Отсюда вытекает методологическое требование выбирать в качестве исходной самую полную модель, расчет по которой можно реализовать с имеющимися в распоряжении исследователя вычислительными средствами. В этой полной модели должны содержаться все параметры, чувствительности координат к возмущению которых предполагается вычислять для оценки функционалов $\bar{\Phi}_{pd}$, Φ_{pd}, $M\left[\bar{Y}(P)\right]$, $\sigma_{\bar{Y}}(\bar{P})$, $M\left[Y(P)\right]$, $\sigma_Y(\bar{P})$ и для решения распределительной задачи выбора дисперсий σ_j^2 при ограничениях (32), (33).

Для решения распределительной задачи выбора дисперсий σ_j^2 управляемых возмущений необходима оценка чувствительности координат к возмущениям параметров, которую будем использовать и для оценки $\left|\bar{S}_{kj}P_j\right|$ $\left(S_{kj} = \dfrac{\partial\bar{Y}_k}{\partial P_j}, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\right)$ вкладов параметров в область неопределенности выходных координат $\bar{Y}_k$. Таким образом, теория чувствительности не только является идейной основой предлагаемого подхода к упрощению моделей, но ее алгоритмы могут быть непосредственно использованы для получения оценок компонент областей неопределенности координат при проверке точностных требований (29) к модели. В частности, оценки погрешностей $\left|\Delta\bar{Y}_c\right|$, $\left|\Delta Y_c\right|$ определения опорных траекторий $\bar{Y}_0$, $\bar{Y}_r$ могут быть получены не только методами двусторонних приближений или решением уравнений динамики в прямом и обратном времени, но и путем совместного решения системы уравнений состояния и чувствительности по начальным значениям.

Предположим, что выполнены этапы получения полной модели, оценки дополнительного движения, оценки чувствительности координат к возмущению параметров, решения распределительной задачи выбора дисперсий σ_j^2 при ограничениях (33) в произвольной точке $\overline{P}$ области R_p значений параметров. Пусть также для любой точки определено подмножество $\{P_n\}$ параметров, пренебрежение которыми предполагается возможным из-за наличия резерва $\Phi_r > 0$ области неопределенности полной модели, и выполнен этап проверки незначимости $\{P_n\}$, согласно соотношению (29).

Чувствительность показателей качества и параметрам может быть использована и при решении четвертой задачи — перехода от континуума точек R_p к конечной Δ-сети точек $\overline{P}^{\langle l \rangle} \in R_p$, построение которой должно обеспечить выполнение соотношения (29) в окрестностях точек $\overline{P}^{\langle l \rangle}$, и, тем самым, во всей области R_p. Это построение можно провести, используя в тех или иных комбинациях сочетания сплайн-аппроксимации чувствительностей $S(\overline{P})$, различных методов поиска подобластей в R_p, «жестких» по отношению к выбранным критериям, и многомерного зондирования области R_p для проверки соотношений (28), (29).

Заметим, что для различных подобластей $R_{pi} \subset R_p$ множества $\{P_n\}$ незначимых параметров в общем случае различны. Следовательно, решением задачи параметрической редукции исходной модели будет либо совокупность моделей M_i, либо более сложная по сравнению с ними модель M, полученная обнулением параметров

$$\{P_n\} = \prod_{k=1}^{n_i} \{P_n\}_k, \tag{34}$$

незначимых во всех n_i подобластях R_{pi}.

Рассмотрим с позиций описанного подхода упрощение модели путем пренебрежения фрагментами f_n модели, незначимыми для заданного показателя точности модели, и возможность замены сложных фрагментов f_r упрощенными фрагментами f_l. Эту задачу можно свести к задаче параметрической редукции, параметризируя исходные фрагменты f_n и f_r следующим образом:

$$f_n + f_r = P_n \cdot f_n + P_r \left(f_r - P_\iota \cdot f_\iota \right) + P_\iota \cdot f_\iota,$$
$$(P_n = 1 \cap P_r = 1 \cap P_\iota = 0) \cup (P_n = 0 \cap P_r = 0 \cap P_\iota = 1). \tag{35}$$

При незначимости параметров P_n, P_r фрагменты $f_n + f_r$ редуцируются до эквивалентного им относительно заданного показателя точности фрагмента f_l. Таким образом, можно говорить об общей задаче точностной редукции модели, понимая под точностной редукцией обнуление параметров и фрагментов модели, незначимых для рассматриваемого показателя точности. Представляется очевидным, что до идентификации модели только проведение точностной редукции полной модели с учетом возмущений всех ее параметров может служить обоснованием использования упрощенной модели при моделировании динамики системы с заданной точностью.

Реализация перечисленных выше этапов точностной редукции, обоснованные точностные требования к модели и датчикам координат базового объекта и параметров внешней среды, дает комплексное решение важной части задач программного и метрологического обеспечения точности воспроизведения динамики исследуемых объектов на подвижных натурных имитаторах.

Выводы. Сформулирован принятый принцип упрощения моделей, заключающийся в пренебрежении параметрами, факторами или фрагментами модели, незначимыми для заданных показателей качества. На этом принципе изложен метод упрощения математических моделей, отличающийся от известных учетом дополнительного движения и согласованием точности исходных данных и возмущений параметров с требуемой точностью оценок показателей качества исследуемых систем.

Проведен переход от общего требования к точности воспроизведения на подвижном имитаторе динамики исследуемого объекта к ограничениям на область неопределенности выходных координат упрощенной модели. Получено необходимое условие для обеспечения требуемой точности моделирования при использовании упрощенной модели с учетом полной вычислительной погрешности и возмущений координат вследствие детерминированных и случайных возмущений параметров системы.

Проведено обоснование необходимости полноты учета в упрощаемой модели параметров и факторов, влияющих на выходные координаты моделируемой системы. Намечены основные этапы реализации предложенного подхода к упрощению математических моделей. Предложено при разработке этих этапов в качестве отправного момента использовать оценку чувствительности выходных координат и показателей качества к возмущению параметров системы.

Список использованной литературы:

1. Benner P. Model reduction and approximation : theory and algorithms / P. Benner, A. Cohen, M. Ohlberger, K. Willcox. — Philadelphia : SIAM, 2017.
2. Allerton D. Principles of Flight Simulation / D. Allerton John. — Wiley & Sons, 2009.
3. Авиационные тренажеры модульной архитектуры : монография / под ред. Э. В. Лапшина, А. М. Данилова. — Пенза : ИИЦ ПГУ, 2005. — 146 с.

4. Спиридонов А. А. Имитатор космического аппарата для отработки наземного комплекса управления и бортового оборудования нано- и пикоспутников / А. А. Спиридонов, В. А. Саечников, И. А. Шалатонин. — Минск : Белорусский государственный университет, 2015. — Режим доступа: http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/52380/1/58-62.pdf.
5. Верлань А. Ф. Відтворення критичних режимів динаміки рухомих об'єктів натурними імітаторами / А. Ф. Верлань, В. М. Владимиров, О. А. Дячук // Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — К., 2006. — Вип. 36. — С. 115–121.
6. Васильев В. В. Моделирование динамических систем: Аспекты мониторинга и обработки сигналов / В. В. Васильев, Г. И. Грездов, Л. А. Симак и др. — К. : НАН Украины, 2002. — 344 с.
7. Верлань А. Ф. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей / А. Ф. Верлань, А. А. Верлань, С. А. Положаенко // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2017. — Т. 7, № 1–2. — С. 7–18.
8. Верлань А. Ф. Моделі динаміки електромеханічних систем / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук. — К. : Наук. думка, 2013. — 222 с.
9. Воронов Е. М. Алгоритм оценки границ области достижимости летательного аппарата с учетом тяги / Е. М. Воронов, А. А. Карпунин // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. — 2007. — № 4 (69). — С. 81–99.
10. Системный анализ: методология. Проблемы. Приложения / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. — 2-е изд., перераб. и доп. — К. : Наук. думка, 2007. — 726 с.

PARAMETRIC REDUCTION OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS

The development of modern technical and information systems is characterized by increased requirements for the reliability of operation and reliability of the forecast of their dynamic characteristics. One of the conditions for such prediction is the construction of mathematical models, the parameters of which reflect real factors affecting the dynamics of the system. The construction of sufficiently accurate models is characterized by difficulties in their implementation and interaction of these systems with the external environment. To overcome these difficulties, modeling complexes are created, the design of which is based on the use of simplified mathematical models.

With a variety of approaches used to simplify the mathematical models of the systems being studied, the simplification of a complex model is always based on some equivalence of the original and simplified model. Due to the fact that the estimation of equivalence of models is substantially determined by the objectives of the study system and the specificity of the original model, the classification of simplification methods according to equivalence models of models seems difficult. An analysis of known model simplification methods shows their main disadvantage, which is to compare full and simplified models with nominal values of system parameters. In the majority of methods, the task of accounting for the total error of estimating the quality indices of the systems under study is not included.

In this paper it is accepted that a simplified model is equivalent to the original complete model in relation to the given quality indicators. This condition is fulfilled if the use of a simplified model instead of a complete does not require the relaxation of the specified limits on the accuracy of estimates of the quality indices of the system being studied.

The principle of simplification of models is proposed, which consists in neglecting parameters, factors or fragments of the model, insignificant for the given indicators of quality. On this principle, a method for simplifying (reduction) of mathematical models is developed, differing from the known additional motion and the harmonization of the accuracy of the initial data and perturbations of the parameters with the required accuracy of estimates of the quality indices of the systems under study.

Key words: *reduction methods of mathematical models, estimation accuracy requirements, dynamic systems.*

Отримано: 16.11.2018

УДК 517.968.7
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.55-64

К. Г. Геселева, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Інтегро-функціональні рівняння мають широке застосування в різних областях науки та природознавства (зокрема, до таких рівнянь з відхиленням аргументу як нейтрального типу так і з запізненням).

У деяких випадках про розв'язки цих рівнянь буває відома додаткова інформація. Тому важливим є не тільки питання побудови розв'язку такого рівняння, а й встановлення умов сумісності відповідної задачі, тобто потрібно вияснити, чи узгоджується шуканий розв'язок задачі з додатковими умовами.

Встановленню умов сумісності задач такого типу стосовно різних видів операторних рівнянь та розробці методів побудови їх розв'язків присвячено низку наукових праць [1–4].

У статті розглядається один тип інтегро-функціонального рівняння з умовою та обмеженнями на шукану функцію, які носять інтегральний характер. Сформульовано умови сумісності вихідної задачі. Стосовно величин, що входять у задану задачу вимагається, що вони задовольняють ряд необхідних умов. Показано, що при виконанні цих умов вихідна задача буде рівносильною деякому інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором та додатковими умовами на шуканий розв'язок.