cal cases cannot be solved. Thus, an urgent task from a computational point of view is the development of approaches and methods that allow control of the computational process.

In this paper, we consider the possibility of controlling the error of numerical solution by using the methods of parametric identification, which are widely used in solving practical problems of identifying linear and nonlinear systems. At the same time, the accuracy of the control should not depend on the reasons causing the error of the decision. The control process itself consists of the following steps: the parameters of the equations for which the resulting numerical solution is accurate are restored with some accuracy. The estimated parameters (the coefficients are compared with the coefficients of the original equations; the difference of the coefficients is the information that is used to evaluate the behavior of the solution on the restoration site (the recovery section is the segment of the numerical solution that is used for parametric identification).

**Key words:** *identification methods, differential equations, control of numerical solution.*

Отримано: 21.11.2018

УДК 519.64
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.31-38

**А. Ф. Верлань,** д-р техн. наук, профессор,
**Ю. О. Фуртат,** канд. техн. наук

Институт проблем моделирования в энергетике
имени Г.Е. Пухова НАН Украины, Украина, г. Киев

# МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Интегральные уравнения Вольтерра второго рода являются универсальной математической моделью в задачах идентификации и компьютерного моделирования. При этом сингулярность этих уравнений значительно затрудняет решение данных задач. Для решения этой проблемы используются алгоритмы регуляризации некорректных задач. Параметр регуляризации при этом может быть определен различными способами, в частности, способом модельных примеров. В статье также показан способ решения полученного приближенного выражения из алгоритма регуляризации с применением квадратурных формул.

Также рассматривается задача определения погрешности решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода на основе метода квадратурных формул. Оценивание погрешности проводится путём доказательства соответствующей теоремы и следствий из неё. Одно из следствий из теоремы об ограниченности погрешности утверждает, что при бесконечно малом значении параметра регуляризации погрешность решения также стремится к нулю. Это утверждение также доказывается в статье с приведением выкладок и расчетов.

Приводится окончательное выражение для оценивания погрешности решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с использованием методов регуляризации и квадратурных формул, и делается вывод о том, что предложенные методы позволяют преодолеть проблему сингулярности в интегральных уравнениях Вольтерра второго рода.

**Ключевые слова:** *интегральное уравнение, сингулярность, регуляризирующий параметр, погрешность.*

**Постановка задачи.** Универсальной математической моделью в задачах идентификации и компьютерного моделирования широкого класса объектов с распределенными параметрами служат интегральные уравнения вида

$$y(t)-\lambda\int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha}ds = f(t),\ 0<\alpha<1, \tag{1}$$

где $y(t)$ — неизвестная, а $f(t)$ — известная функции, которые являются интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Численное моделирование рассматриваемого класса объектов приводит к определенным затруднениям в связи с сингулярностью уравнения (1).

**1. Выбор способа решения.** Для решения задачи численного моделирования интегральных уравнений вида (1) весьма целесообразным является применение устойчивых и эффективных алгоритмов [1], основанных на приемах регуляризации некорректных задач. В частности, один из способов решения состоит в замене исходного уравнения (1) следующим приближенным соотношением

$$\tilde{y}(t)-\lambda\int_0^t \frac{\tilde{y}(s)}{\beta+(t-s)^\alpha}ds = f(t),\ t\in[0,T], \tag{2}$$

где $\beta$ — малый регуляризирующий параметр (параметр «внутренней» регуляризации), определение которого может быть осуществлено способом модельных примеров [2].

Применение такого приема вызвано тем, что сингулярные интегральные уравнения не допускают, при численном решении непосредственного применения метода квадратурных формул, позволяют получить устойчивые и достаточно просто реализуемые на компьютере вычислительные алгоритмы.

Для применения квадратурных формул к уравнению (2) используется в общем случае выражение

$$\tilde{y}(t_i)-\lambda\int_0^{t_i}\frac{\tilde{y}(s)}{\beta+(t_i-s)^{\alpha}}ds=f(t_i). \qquad (3)$$

Используя для замены интеграла, например, формулу трапеции имеем следующую систему уравнений

$$\tilde{\tilde{y}}(t_i)=f(t_i)+\lambda h\sum_{j=0}^{i}A_j\frac{\tilde{\tilde{y}}(t_j)}{\beta+(t_i-t_j)^{\alpha}},$$

где $h=\frac{T}{n}$ — шаг квадратуры, $A_j$ — коэффициенты квадратурной формулы.

Окончательное расчетное выражение имеет следующий вид

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\tilde{y}}(0)=f(0)\\ \tilde{\tilde{y}}(t_i)=\dfrac{2\beta}{2\beta-\lambda h}\left[f(t_i)+\lambda h\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}A_j\frac{\tilde{\tilde{y}}(t_i)}{\beta+(t_i-t_j)^{\alpha}}\right]\end{array}\right\}, \qquad (4)$$

где

$$A_j=\begin{cases}0,5 & \text{при } j=1,\\ 1 & \text{при } j>1,\end{cases}$$

$$i=2,3,...;\ t_i=(i-1)h;\ h\neq\frac{2\beta}{\lambda}.$$

**2. Определение погрешности.** На вопрос о возможных погрешностях получаемого решения интегрального уравнения (2) на основе метода квадратурных формул отвечает следующая теорема.

**Теорема.** Пусть для любого $0\le\beta$ выполняется неравенство

$$|\lambda|T<\beta+(1-\alpha)T^{\alpha}.$$

Тогда для решения задачи (1) и (2) справедлива следующая оценка

$$y(t)-\tilde{y}(t)_{C[0,T]}\le\beta\frac{|\lambda|K\left[\beta+(1-\alpha)T^{\alpha}\right]|y|_{C[0,T]}}{\beta+(1+\alpha)T^{\alpha}-|\lambda|T}, \qquad (5)$$

где

$$K=\max_{0\le t\le T}\int_0^t\frac{ds}{(t-s)^{\alpha}(\beta+(t-s))^{\alpha}}.$$

**Доказательство.** Вычислим разность между $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$:

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right| = |\lambda|\left|\int_0^t \left[\frac{y(s)}{(t-s)^\alpha} - \frac{\tilde{y}(s)}{\beta+(t-s)^\alpha}\right]ds\right| =$$

$$= |\lambda|\left|\int_0^t \left[\frac{y(s)-\tilde{y}(s)}{\beta+(t-s)^\alpha} + \frac{\beta y(s)}{(t-s)^\alpha\left(\beta+(t-s)\right)^\alpha}\right]\right| ds \le$$

$$\le |\lambda|\int_0^t \frac{\left|y(s)-\tilde{y}(s)\right|}{\beta+(t-s)^\alpha}ds + |\lambda|\beta\int_0^t \frac{|y(s)|}{(t-s)^\alpha\left(\beta+(t-s)^\alpha\right)}ds,$$

откуда

$$\left|y-\tilde{y}\right|_{C[0,T]} \le |\lambda|\left|y-\tilde{y}\right|_{C[0,T]} \max_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{ds}{\beta+(t-s)^\alpha} + |\lambda|\beta|y|_{C[0,T]}K. \quad (6)$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (6)

$$I(\beta) = \max_{0\le t\le T}\int_0^t \frac{ds}{\beta+(t-s)^\alpha}.$$

Применяя следствие теоремы о среднем [3] получим

$$I(\beta) = \max_{0\le t\le T}\frac{t}{\beta+(t-\varepsilon t)^\alpha} = \max_{0\le t\le T}\frac{t}{\beta+(1-\varepsilon)^\alpha t^\alpha},$$

откуда, учитывая соотношение $0<\varepsilon<1$, следует, что

$$I(\beta) = \frac{T}{\beta+\delta T^\alpha} \quad I(0) = \frac{T}{\delta T^\alpha} = \frac{T^{1-\alpha}}{\delta}, \quad (7)$$

где $\delta = (1-\varepsilon)^\alpha$

Подставляя (7) в (6) получим

$$\left(1-\frac{|\lambda|T}{\beta+(1-\alpha)T^\alpha}\right)\left|y-\tilde{y}\right|_{C[0,T]} \le |\lambda|\beta|y|_{C[0,T]}K$$

или

$$\left(\frac{\beta+(1-\alpha)T^\alpha-|\lambda|T}{\beta+(1-\alpha)T^\alpha}\right)\left|y-\tilde{y}\right|_{C[0,T]} \le \beta|\lambda|K|y|_{C[0,T]} \quad (8)$$

Согласно условию теоремы, коэффициент при $\left|y-\tilde{y}\right|$ представляет собой положительное число.

Делением обеих частей неравенства (8) на

$$\frac{\beta+(1-\alpha)T^\alpha-|\lambda|T}{\beta+(1-\alpha)T^\alpha}$$

получим неравенство (5). **Теорема доказана.**

**Замечание 1.** Поскольку решение уравнения (1) ограничено в пространстве C[0,T], то первая часть неравенства (5) стремится к нулю при $\beta \to 0$.

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы и пусть также $f(t) \in C[0,T]$. Тогда для решения задачи (1) и (3) справедлива следующая оценка:

$$\left|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)\right| \le B_\beta, \tag{9}$$

где

$$B = \frac{|\lambda| K\left[\beta + (1-\alpha)T^\alpha\right]|y|}{\beta + (1-\alpha)T^\alpha - |\lambda| T},$$

$$\left|y(t_i) - \tilde{y}\right| = \underset{0<t<T}{SUP} \max_{t_i \in [0,T]} \left|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)\right|.$$

**Доказательство.** Справедливость неравенства (9) следует из неравенства (5) при $t = t_i$, если учесть соотношение между нормами

$$\left|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)\right| = |y - \tilde{y}| \le \left|y(t) - \tilde{y}(t)\right|_{C[0,T]}$$

**Замечание 2.** При $\beta \to 0$ первая часть неравенства (9) стремится к нулю и, следовательно

$$\left|y(t_i) - \tilde{y}(t_i)\right| \to 0$$

Переходим теперь к оценке величины $\left|\tilde{y}(t_i) - \tilde{\tilde{y}}(t_i)\right|$ при $\beta \to 0$.

Представив уравнение (3) в следующем виде

$$\tilde{y}(0) = f(0);\ i = \overline{1,n}$$

$$\tilde{y}(t_i) = f(t_i) + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{y(s)}{\beta + (t_i - s)^\alpha} ds$$

и применяя следствие из теоремы о среднем получим:

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = f(0), \\ \tilde{y}(t_i) = f(t_i) + \lambda h \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{\tilde{y}\left(t_j^*\right)}{\beta + \left(t_i - t_j^*\right)^\alpha}, \end{cases}$$

$$t_j^* \in \left[t_j, t_{j+1}\right].$$

Далее находим

$$\left|y(t_i)-\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right| \le \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \left| \frac{\tilde{y}\left(t_j^*\right)}{\beta+\left(t_i+t_j^*\right)^{\alpha}} - A_j \frac{\tilde{\tilde{y}}\left(t_i\right)}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}} \right| +$$

$$+\frac{\lambda h}{2\beta}\left|\tilde{y}^*(t_i)\right| \le \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\tilde{y}\left(t_j^*\right)-A_j\tilde{\tilde{y}}(t_i)}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}}+ \tag{10}$$

$$+\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}-\left(t_i-t_j^*\right)^{\alpha}\right]}{\left[\beta+\left(t_i-t_j^*\right)^{\alpha}\right]^2}\left|\tilde{y}\left(t_j^*\right)\right|+\frac{\lambda h}{2\beta}\left|\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right|.$$

Оценим первый член суммы в неравенстве (10):

$$\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left|\tilde{y}\left(t_i^*\right)-A_j\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right|}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}} \le \lambda h \frac{\left|\tilde{\tilde{y}}(0)\right|}{2\left(\beta+t_i^{\alpha}\right)}+\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left|\tilde{\tilde{y}}\left(t_i^*\right)-\tilde{\tilde{y}}\left(t_j\right)\right|}{\beta+\left(t_i+t_j\right)^{\alpha}} \le$$

$$\le \lambda h \frac{\left|f(0)\right|}{2\left(\beta+t_i^{\alpha}\right)}+\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left|\tilde{y}\left(t_i^*\right)-\tilde{\tilde{y}}\left(t_j^*\right)\right|}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}}+\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left|\tilde{\tilde{y}}\left(t_i^*\right)-\tilde{\tilde{y}}\left(t_j\right)\right|}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}}. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11) имеем

$$\left|\tilde{y}(t_i)-\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right| \le \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left|\tilde{y}\left(t_i^*\right)-\tilde{\tilde{y}}\left(t_j^*\right)\right|}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}}-\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left|\tilde{\tilde{y}}\left(t_i^*\right)-y\left(t_j\right)\right|}{\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}}+$$

$$+\frac{\lambda h\left|f(0)\right|}{2\left(\beta+t_i^{\alpha}\right)}+\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}-\left(t_i-t_j^*\right)^{\alpha}\right]}{\left[\beta+\left(t_i-t_j^*\right)^{\alpha}\right]^2}\left|\tilde{y}\left(t_j^*\right)\right|+\frac{\lambda h}{2\beta}\left|\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right| \ . \tag{12}$$

Переходя в обеих частях неравенства (12) к нормам и подставляя

$$\left|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right| = \underset{0<h<T}{SUP} \max_{0<t<T}\left|\tilde{y}(t_i)-\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right|, \quad t_i-t_j=t_{i=j}$$

в (12) и учитывая, что $\tilde{\tilde{y}}(t_i)$ является непрерывной функцией, получаем следующее соотношение

$$\left(1-\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\beta+t_{i-j}^{\alpha}}\right)\left\|\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}\right\| \le \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{P_j}{\beta+t_{i-j}^{\alpha}}+$$

$$+\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_{i-j}^{\alpha}-\left(t_{i-j}-\eta h\right)^{\alpha}}{\left(\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}\right)\left(\beta+\left(t_{j-i}-h\eta\right)^{\alpha}\right)}\left\|\tilde{y}\right\|+\frac{\lambda h\left|f(0)\right|}{2\left(\beta+t_i^{\alpha}\right)}+\frac{\lambda h}{2\beta}\left\|\tilde{\tilde{y}}\right\|, \tag{13}$$

где $P_i = \left\| \dfrac{\tilde{\tilde{y}}\left(t_j^*\right) - \tilde{\tilde{y}}\left(t_j\right)}{\eta h} \right\|$, $0 < \eta < 1$.

Теперь покажем, что коэффициент при $\left\| \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}} \right\|$ представляет собой положительное число:

$$\lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\beta + t_{i-j}^{\alpha}} - \lambda h \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\beta + t_j^{\alpha}} \le |\lambda| h \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta + t_j^{\alpha}} = |\lambda| S(\beta),$$

где $S(\beta) = h \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\beta + t_j^{\alpha}}$.

Функция $\varphi(t) = \dfrac{1}{\beta + t^{\alpha}}$ убывает на отрезке [0,T] следовательно,

$$\lambda h \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\beta + t_j^{\alpha}} \le |\lambda| S(\beta) < \frac{|\lambda| T}{\beta + (1-\alpha) T^{\alpha}}.$$

Итак, коэффициент при $\left\| \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}} \right\|$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$1 - \lambda h \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\beta + t_{i-j}^{\alpha}} > 1 - \frac{|\lambda| T}{\beta + (1-\alpha) T^{\alpha}} = \frac{\beta + (1-\alpha) T^{\alpha} - |\lambda| T}{\beta + (1-\alpha) T^{\alpha}}. \quad (14)$$

Согласно условию теоремы справедливо неравенство

$$\beta + (1-\alpha) T^{\alpha} - |\lambda| T > 0.$$

Отсюда следует, что коэффициент при $\left\| \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}} \right\|$ есть положительное число.

Неравенство (13) усиливается от подстановки вместо коэффициента $\left\| \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}} \right\|$ правой части неравенства (14).

**4. Оценка погрешности.** После подстановки (14) и (13) получим следующую оценку

$$\left| \tilde{y}(t_i) - \tilde{\tilde{y}}(t_i) \right| \le \left\| \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}} \right\| < \frac{|\lambda| h \left[ \beta + (1-\alpha) T^{\alpha} \right]}{\beta + (1-\alpha) T^{\alpha} - |\lambda| T} \times$$

$$\times \left\{ \eta h \sum_{j=0}^{i} \frac{P_j}{\beta + t_{i-j}^{\alpha}} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{t_{i-j}^{\alpha} - \left(t_{i-j} - \eta h\right)^{\alpha}}{\left[ \beta + \left(t_{i-j} - \eta h\right)^{\alpha} \right]^2} \left\| \tilde{\tilde{y}} \right\| + \frac{f(0)}{2\left(\beta + t_i^{\alpha}\right)} + \frac{1}{2\beta} \left\| \tilde{\tilde{y}} \right\| \right\} \quad (15)$$

Применяя неравенство треугольника относительно нормы [3] используя (9) и (15), получим следующую оценку

$$\left|y(t_i)-\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right|_{c[0,T]} \le \left|y(t_i)-\tilde{y}(t_i)\right|_{c[0,T]} + \left|\tilde{y}(t_i)-\tilde{\tilde{y}}(t_i)\right| \le B\beta + \\ +\frac{\lambda h\left[\beta+(1-\alpha)T^{\alpha}\right]}{\beta+(1-\alpha)T^{\alpha}-|\lambda|T}\left\{\eta h\sum_{j=0}^{i}\frac{P_j}{\beta+t_{i-j}^{\alpha}}+\right. \\ \left.+\sum_{j=0}^{i-1}\frac{t_{i-j}^{\alpha}-\left(t_{i-j}-\eta h\right)^{\alpha}}{\left(\beta+\left(t_i-t_j\right)^{\alpha}\right)\left(\beta+\left(t_{j-i}-h\eta\right)^{\alpha}\right)}\left\|\tilde{\tilde{y}}\right\|+\frac{|f(0)|}{2\left(\beta+t_i^{\alpha}\right)}+\frac{1}{2\beta}\left\|\tilde{\tilde{y}}\right\|\right\}, \tag{16}$$

где $B$ определяется из формулы (10).

**Выводы**. Предложенный метод расчета позволяет преодолеть проблемы, вызванные сингулярностью интегрального уравнения Вольтерра и получать решение с заданной точностью в зависимости от выбранного параметра регуляризации.

## Список использованной литературы:


1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 288 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
3. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Физматгиз, 1959. — 684 с.


## METHOD OF SOLVING A SINGULAR DYNAMIC PROBLEM IN THE INTEGRAL EQUATION FORM


Volterra integral equations of the second kind are a universal mathematical model used in problems of identification and computer simulation. At the same time, the singularity of these equations makes it difficult to solve these problems. To solve this problem, regularization algorithms for ill-posed problems are used. In this case, the regularization parameter can be determined in various ways, in particular, by the method of model examples. The article also shows how to solve the obtained approximate expression from the regularization algorithm using quadrature formulas.

The problem of determining the error of solving the second-kind Volterra integral equations based on the quadrature formula method is also considered. The evaluation of the error is carried out by proving the corresponding theorem and its consequences. One of the consequences of the theorem on limitness of error states that, for an infinitely small value of the regularization parameter, the error of the solution also tends to zero. This statement is also proved in the article with the demonstration of computations and calculations.

A final expression is given for evaluating the errors in solving the Volterra integral equations of the second kind using regularization methods and quadrature formulas, and it is concluded that the proposed methods allow one to overcome the problem of singularity in Volterra integral equations of the second kind.



**Key words:** *integral equation, singularity, regularizing parameter, error.*

Отримано: 12.11.2018