

### АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ МАЛИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Combination of the asymptotical approach and numerical solution of respective integral Fredholm equations of the second kind is applied for solving the electromagnetic field scattering problem by the set of small particles. Impedance boundary conditions are assumed on the boundaries of small particle. The results of numerical simulation show good agreement with the theory. They open a way to numerical implementation of the method for creating media with a desired refraction coefficient.

**Keywords:** *electromagnetic wave scattering, small particle, asymptotic approach, numerical modeling.*

Для розв'язання задачі розсіювання електромагнітного поля малими включеннями використано поєднання асимптотичного підходу і числового розв'язування відповідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. На поверхні малого включення задано граничні умови імпедансного типу. Результати числового моделювання збігаються із теоретичними положеннями, що відкриває можливість числової реалізації методу створення середовищ із заданим коефіцієнтом заломлення.

**Ключові слова:** *розсіювання електромагнітних хвиль, мале включення, асимптотичний підхід, числове моделювання.*

Задача розсіювання акустичних [5, 6] і електромагнітних [9, 10] полів об'єктами малих розмірів є актуальною з погляду використання середовищ з великою кількістю малих включень у багатьох задачах гідродинаміки, акустики, електромагнетизму та мікроелектромеханіки. Одним із можливих прикладів застосування результатів, отриманих під час розв'язування такого типу задач, є створення середовищ із заданим коефіцієнтом заломлення. Таке середовище можна створити на основі використання електромагнітного розсіювання певною областю, яка містить велику кількість малих сферичних об'єктів з імпедансними умовами на їх поверхні. Теорія електромагнітного розсіювання малими включеннями довільної форми була розвинута в роботах [11, 12]. Запропонований підхід дає змогу створювати матеріали із заданою просторовою дисперсією; зокрема, можна створювати матеріали з від'ємним заломленням. Такі матеріали використовують у багатьох технічних застосуваннях [7, 15–17].

Асимптотичний розв'язок задачі розсіювання у випадку багатьох включень був отриманий у [9] при допущеннях  $ka \ll 1$ ,  $d = O(a^{1/3})$ ,  $M = O(1/a)$ , де  $a$  – розмір включення;  $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число;  $d$  – відстань між сусідніми включеннями, а  $M$  – загальна кількість включень у деякій обмеженій області  $D \subset R^3$ . На границі  $S_m$   $m$ -го включення  $D_m$  задано імпедансні граничні умови. У [13] ці допущення були узагальнені так:  $\zeta_m = \frac{h(x_m)}{a^\kappa}$ ,  $d = O(a^{(2-\kappa)/3})$ ,  $M = O(\frac{1}{a^{2-\kappa}})$ ,  $\kappa \in (0,1)$ , де  $\zeta_m$  – поверхневий імпеданс,  $h_m = h(x_m)$ ,  $x_m \in D_m$ , а  $h(x) \in C(D)$  – довільна неперервна у  $\overline{D}$  функція,  $\text{Im } h \leq 0$ .

Компоненти електромагнітного поля визначають як розв'язки відповідної системи рівнянь Максвелла, у цьому разі розсіяне поле задовольняє умови випромінювання. У цій статті припускаємо, що параметр  $\kappa \in (0,1)$ , мале включення  $D_m$  – куля радіуса  $a$  з центром у точці  $x_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ .

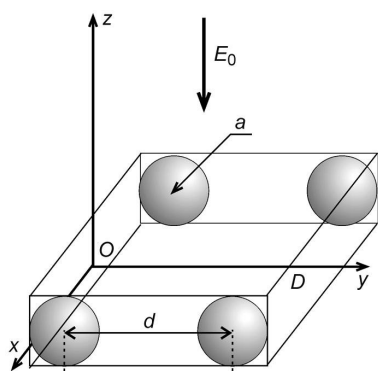


Рис. 1. Геометрія задачі у випадку 4-х включень.

**Задача електромагнітного розсіяння системою малих включень.** Нехай  $D$  – область, яка містить  $M$  включень малого радіуса  $a$ ,  $d$  – відстань між включеннями. З метою використання асимптотичного підходу задамося обмеженням  $ka \ll 1$ , де  $k$  – хвильове число. У випадку векторного характеру електромагнітного поля його компоненти  $E$  і  $H$  задовольняють такі рівняння:

$$\nabla \times E = i\omega\mu H,$$

$$\nabla \times H = -i\omega\varepsilon'(x)E \text{ у } \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

де  $\omega > 0$  – частота електромагнітного поля,  $\mu = \mu_0 = \text{const}$  – магнітна проникність; діелектрична

проникність  $\varepsilon$  задається так:  $\varepsilon'(x) = \varepsilon_0 = \text{const} > 0$  в  $D' = \mathbb{R}^3 \setminus D$ ,  $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x) + i \frac{\sigma(x)}{\omega}$ ;  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $\varepsilon'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\varepsilon'(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$  – двічі неперервно-диференційована функція,  $\sigma(x) = 0$  у  $D'$ ,  $\sigma(x)$  – провідність.

Система (1) може бути зведена до такої [1, 12]:

$$\nabla \times \nabla \times E = K^2(x)E, \quad H = \frac{\nabla \times E}{i\omega\mu}, \quad (2)$$

де  $K^2(x) = \omega^2\varepsilon'(x)\mu$ .

Розв'язок першого рівняння системи (2)

$$\nabla \times \nabla \times E = K^2(x)E \quad (3)$$

шукатимемо у вигляді

$$E(x) = E_0(x) + v, \quad (4)$$

де  $E_0(x)$  – падаюча плоска хвиля

$$E_0(x) = \ell e^{ik\alpha \cdot x}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (5)$$

$c = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  – хвильова швидкість в  $D'$ ,  $\alpha \in S^2$  – напрямок падаючої плоскої хвилі,  $S^2$  – одинична сфера в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\ell \cdot \alpha = 0$ ,  $\ell$  – постійний вектор, а розсіяне поле  $v$  задовольняє умову випромінювання

$$\frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty \quad (6)$$

однорідно по напрямках  $\beta = x/r$ . Якщо  $E$  знайдено, то пара  $\{E, H\}$ , де  $H$  визначається другою формулою у (2), є розв'язком задачі розсіяння. У роботі [12] було встановлено, що задача розсіяння для системи (1) еквівалентна задачі розв'язування такого інтегрального рівняння:

$$E(x) = E_0(x) + \int_D g(x, y)(p(y)E(y) + \nabla_y(q(y) \cdot E(y)))dy, \quad (7)$$

де  $p(x) = K^2(x) - k^2$ ,  $p(x) = 0$  in  $D'$ ,  $q(y) = \frac{\nabla K^2(x)}{K^2(x)}$ ,  $q(x) = 0$  в  $D'$ , а функція

Гріна має форму  $g(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ .

На підставі припущень щодо функцій  $p$  і  $q$  рівняння (7) можна записати так:

$$E(x) = E_0(x) + \int_D g(x, y)(p(y)E(y))dy + \nabla_x \int_D g(x, y)q(y) \cdot E(y)dy . \quad (8)$$

Асимптотичний розв'язок (8) можна записати у вигляді [13]

$$E(x) = E_0(x) + \sum_{m=1}^M [g(x, x_m)V_m + \nabla_x g(x, x_m)v_m] \quad (9)$$

в області  $\min_{1 \leq m \leq M} |x - x_m| := d \ll a$ . У цьому разі необхідно розв'язувати взаємозалежну систему алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів  $V_m$  і  $v_m$ . Ця система для векторів  $V_j$  має вигляд

$$V_j = V_{0j} + \sum_{m=1}^M (a_{jm}V_m + B_{jm}v_m), 1 \leq j \leq M , \quad (10)$$

де

$$V_{0j} := \int_{D_j} p(x)E_0(x)dx , \quad (11)$$

$$a_{jm} := \int_{D_j} p(x)g(x, x_m)dx , \quad (12)$$

$$B_{jm} := \int_{D_j} p(x)\nabla_x g(x, x_m)dx , \quad (13)$$

а для скалярних величин  $v_j$

$$v_j = v_{0j} + \sum_{m=1}^M (C_{jm}V_m + d_{jm}v_m), 1 \leq j \leq M , \quad (14)$$

де

$$v_{0j} := \int_{D_j} q(x) \cdot E_0(x)dx , \quad (15)$$

$$C_{jm} := \int_{D_j} q(x)g(x, x_m)dx , \quad (16)$$

$$d_{jm} := \int_{D_j} q(x) \cdot \nabla_x g(x, x_m)dx . \quad (17)$$

Розв'язавши системи (10), (14), матимемо набори  $V_m$  і  $v_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ . Ця система має єдиний розв'язок за умови  $ka \ll 1$  і  $a \ll d$ . Елементи  $B_{jm}$  і  $C_{jm}$  – вектори, а  $a_{jm}$ ,  $d_{jm}$  – скалярні величини. Зрозуміло, що для числового розв'язання систем (10), (14) необхідно використовувати ітераційний метод. Необхідна умова збіжності цього методу така:

$$\max_{1 \leq j \leq M} \sum_{m=1}^M (|a_{jm}| + |d_{jm}| + \|B_{jm}\| + \|C_{jm}\|) < 1 . \quad (18)$$

У (18),  $\|B_{jm}\|$  і  $\|C_{jm}\|$  – довжини відповідних векторів. Умова (18) виконується, якщо  $a \ll 1$  і  $M$  не сильно зростає, якщо  $a \rightarrow 0$  не швидше, ніж  $O(a^{-3})$ .

У випадку багатьох включень у процесі числового моделювання необхідно

дослідити чисельно розв'язки систем (10), (14) і перевірити умову (18) для різних значень геометричних параметрів задачі.

**Оцінка меж застосування асимптотичного підходу.** Запишемо лінійну систему рівнянь, яка відповідає (8), у вигляді [14]

$$E_j = E_{0j} + \sum_{n=1}^N g(x_j, x_n) p(x_n) E(x_n) + \nabla_x \sum_{n=1}^N g(x_j, x_n) q(x_n) \cdot E(x_n), \quad (19)$$

$$j = 1, 2, \dots, N, x_j, x_n \in D.$$

Тут  $E_j = E(x_j)$ . Маючи розв'язок системи (19), значення функції  $E(x)$  в  $R^3$  можна обчислити за формулою

$$E(x) = E_0(x) + \int_D g(x, y) (p(y) E(y) dy + \nabla_x \int_D g(x, y) q(y) \cdot E(y) dy). \quad (20)$$

У формулі (20) значення  $E(y)$  відповідають множині  $\{E(y_n), n=1, \dots, N\}$ , визначеній у (19), де  $N$  – кількість точок колокації. У процесі числових розрахунків інтегрування по області  $D$  замінюється обчисленням відповідного Ріманового інтегралу [8], а похідна  $\nabla_x$  замінюється розділеною різницею. Таким чином можна порівнювати числові розв'язки системи (19) з асимптотичними розв'язками, отриманими за допомогою формули (9).

Припустимо, що  $\alpha = e_3$ , де  $e_3$  – одиничний вектор вздовж осі  $z$ , тоді із умови  $E \cdot \alpha = 0$  випливає, що вектор  $E$  розміщений в площині  $xOy$ , тобто має лише дві компоненти  $E_x$  і  $E_y$ .

Розглянемо спочатку результати для випадку одного включення, отримані із використанням асимптотичної формули (9) і розв'язуванням системи лінійних рівнянь (19) із подальшим застосуванням подання (20). Досліджували відхилення амплітуд поля  $E_x$  і  $E_y$ , отриманих з допомогою двох підходів залежно від радіуса включення  $a$ . Числові результати наведено для двох типів падаючого поля  $E_0(x)$ : у першому з них амплітудний розподіл поля має синусоподібну форму вздовж осей  $x$  та  $y$  з максимумом посередині віддаленої зони; у другому випадку амплітуда  $E_{0x}$  постійна, а  $E_{0y}$  має синусоподібну форму. На рис. 2а ці результати представлено для області в середній зоні включень ( $d=5$ ), а на рис. 2б – для області в дальній зоні ( $d=15$ ). Товсті лінії відповідають першому типу  $E_0(x)$ , а тонкі – другому. В області середньої зони розв'язки відрізняються в межах 20% і більше при малих  $ka$ . Слід також зазначити, що зі збільшенням  $ka$  ця різниця починає збільшуватися. Для дальньої зони цілком підтверджуються теоретичні висновки: асимптотичний розв'язок прямує до точного, якщо  $a \rightarrow 0$ . Максимальне відхилення компонент  $E_x$  і  $E_y$ , якщо  $ka = 0,05$ , становить 5%, а зі збільшенням  $ka$  воно відповідно збільшується.

Отже, значення відхилення для компонент  $E_x$  і  $E_y$  залежить як від величини параметра  $ka$ , так і від відстані  $d$  між центром області  $D$  і точкою в дальній зоні. Розв'язок системи рівнянь (19) з  $N=100$  точками колокації у цьому разі можна розглядати як "точний", оскільки відносна похибка при цьому  $N$  не перевищує 1% [3].

На рис. 3 показано залежність максимального відхилення амплітуд поля для малих значень  $ka$ . Порівнюючи ці значення з даними рис. 2, можна бачити, що при малих  $ka$  (для великих  $d$ ) відхилення значно менше, що цілком узгоджується з теоретичними положеннями. На рис. 4 зображено залежність амплітуди компоненти  $E_x$  від значень  $ka$ . Видно, що зі зменшенням  $ka$  зменшується відхилення амплітуд, а також поліпшується наближення до "точного" значення за формою.

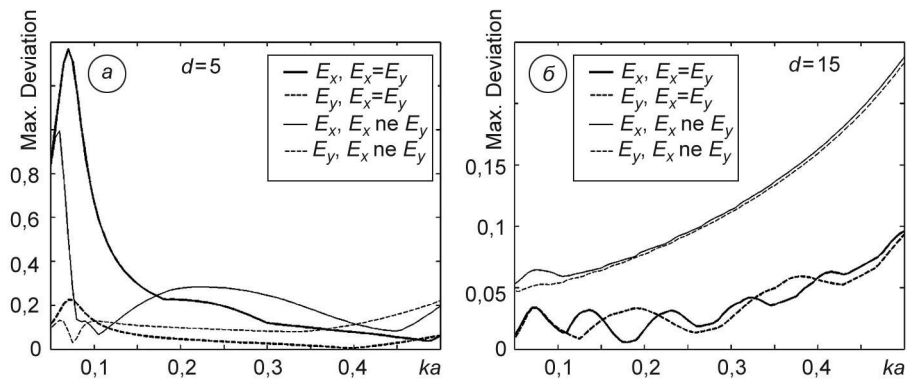


Рис. 2. Залежність максимального відхилення амплітуди компонент поля від величини  $ka$ .

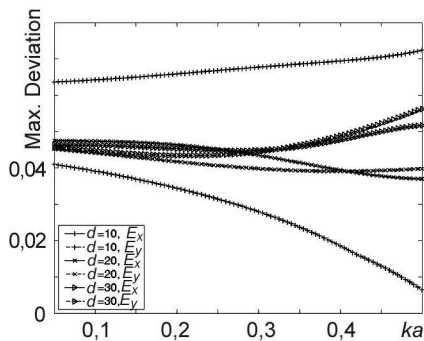


Рис. 3. Максимальне відхилення амплітуд компонент поля для малих  $ka$ .

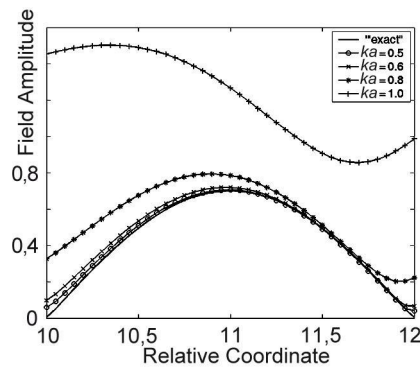


Рис. 4. Залежність амплітуди компоненти  $E_x$  від  $ka$ .

Для випадку багатьох включень проводили дослідження збіжності ітераційного процесу розв'язування системи лінійних рівнянь (10), (14). Ця процедура здійснюється аналогічно випадку одного включення [2]. Перевірка виконання умови (18) вимагає додаткових обчислень, тому простіше дослідити область збіжності ітераційного процесу шляхом зміни геометричних параметрів задачі (таких як кількість включень  $M$ , їхній радіус  $a$ , і відстань  $d$  між ними) і таким чином визначити межі застосування асимптотичної формули (9). Числові розрахунки наведені для двох значень  $d$ :  $d = 0,2$  (рис. 5а) і  $d = 0,5$  (рис. 5б) для різних значень  $ka$ ,  $M = 4$ . Систему (10), (14) розв'язували так: на першому кроці задавали початкове наближення  $v_m^{(0)}$ , на другому кроці визначали величини  $V_j^{(0)}$  шляхом розв'язання системи (14), третій крок полягав у знаходженні  $v_m^{(1)}$  при відомих  $V_j^{(0)}$ , і так далі. З рисунків видно, що збіжність ітераційного процесу суттєво залежить від величини  $a$ . Точність на 20-й ітерації дорівнює 1,887; 0,2546; 0,0030 і 0,0022 для  $a = 0,01$ ; 0,005; 0,002; 0,001, якщо  $d = 0,2$ , і вона дорівнює 0,1429; 0,0037; 0,0025 і 0,0008 для тих самих значень  $a$ , якщо  $d = 0,5$ . Ці значення наведено для величин  $v_m^{(s)}$ , де  $s$  – номер ітерації. Досягнута точність для величин  $V_m^{(s)}$  має такий же порядок.

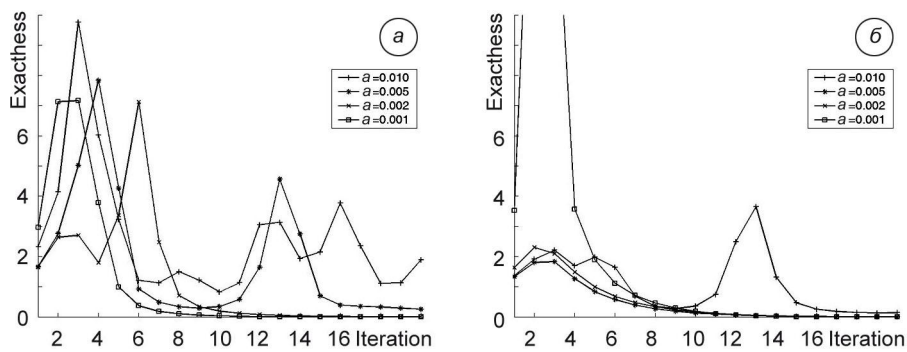


Рис. 5. Характер збіжності ітераційного процесу для системи (10), (14) за величинами  $v_m^{(s)}$ .

Компоненти загального поля  $E(x)$  у дальній зоні можуть бути легко обчислені за формулою (9). Прирости  $x$ - та  $y$ -компонент (другий доданок у (9)) зображено на рис. 6. Значення  $a = 0,05$ ;  $d = 0,4$ ;  $M = 6$ . Включення розміщені рівномірно в площині  $xOy$ , розмір  $kl$  області  $D$  вздовж осей  $x$  та  $y$  дорівнює 1,21, амплітудний розподіл для  $E_{0x}$  і  $E_{0y}$  вздовж осі  $Ox$  постійний, а вздовж осі  $Oy$  має синусоподібну форму.

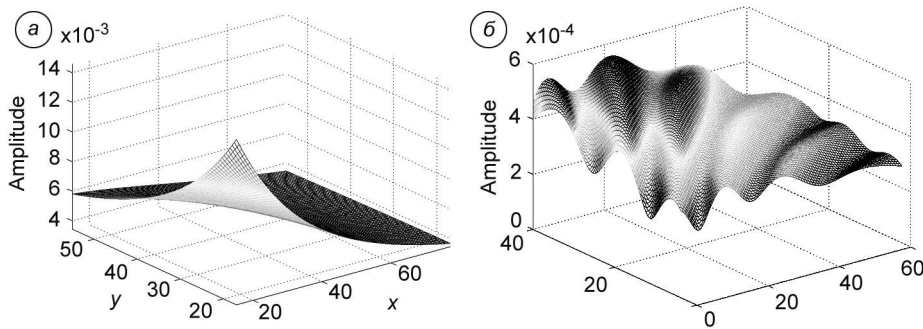


Рис. 6. Прирости амплітуд для  $E_x$ -компонент (а) і  $E_y$ -компонент (б).

Результуючі нормовані компоненти  $E_x$  і  $E_y$  зображено на рис. 7. Обидві компоненти досить близькі (початкові компоненти  $E_{0x}$  і  $E_{0y}$  однакові). Максимальний приріст амплітуди не перевищує 1,2%, і він досягається для компоненти  $E_x$  поля. Числові результати свідчать, що цей приріст зменшується зі зменшенням характерного розміру  $kl$  області  $D$  або зі збільшенням відстані до дальньої зони при одному і тому ж значенні  $kl$ .

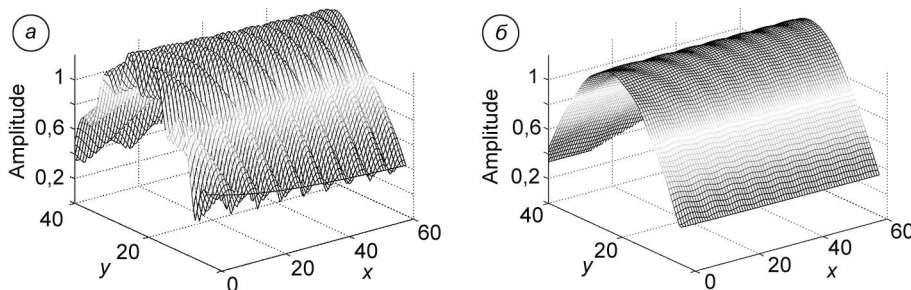


Рис. 7. а –  $E_x$ - і б –  $E_y$ -компоненти загального поля.

Амплітуди сумарного поля компонент  $E_x$  і  $E_y$  на рис. 7 (відповідно і їхні прирости на рис. 6), відрізняються внаслідок неоднакової кількості включень вздовж

осей  $Ox$  і  $Oy$  (відповідно 2 і 3). Якщо змінити орієнтацію області  $D$  (повернути її на  $90^\circ$  у площині  $xOy$ , то значення  $E_x$  і  $E_y$  поміняються місцями, що є також додатковою ознакою коректності проведення числових розрахунків.

### ВИСНОВКИ

Числові результати, отримані на підставі асимптотичного підходу розв'язування задачі розсіяння електромагнітного поля сукупністю включень малого радіуса, дали змогу визначити межі застосування такого підходу залежно від геометричних параметрів області включень. Отримані результати свідчать про можливість застосування запропонованої методики до розв'язання задачі формування середовища із заданим коефіцієнтом заломлення аналогічно до процедури формування такого середовища для випадку скалярної задачі (акустичного поля) [4].

На основі розробленого програмного забезпечення може бути створено прикладний програмний продукт для числового моделювання середовищ із заданими електромагнітними властивостями, зокрема заданим коефіцієнтом заломлення.

1. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
2. *Andriychuk M. I.* Asymptotic solution of EM field scattering problem by small bodies: single body case // Proc. of 13<sup>th</sup> Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Sept. 6-8, 2010, Kyiv, Ukraine. – 3 p.
3. *Andriychuk M. I., Ramm A. G.* Numerical Modeling in Wave Scattering Problem for Small Particles // Proc. of 18<sup>th</sup> Int. Conf. MIKON-2010. Vilnius, Lithuania: Geozondas. – 2010. – Vol. 1. – P. 224–227.
4. *Andriychuk M. I. and Ramm A. G.* Scattering by many small particles and creating materials with a desired refraction coefficient // Int. J. Computing Science and Mathematics. – 2010. – **3**, № 1/2. – P. 102–121.
5. *Gaunaurd G. C., Huang H., and Strifors H.C.* Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Am. – 1995. – **98**. – P. 495–507.
6. *Kapodistrias G., Dahl P. H.* Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – **107**, № 6. – P. 3006–3017.
7. *Leighton T. G., Ramble D. G., and Phelps A. D.* The detection of tethered and rising bubbles using multiple acoustic techniques // J. Acoust. Soc. Am. – 1997. – **101**. – P. 2626–2635.
8. *Nazarchuk Z. T.* Singular Integral Equations in Diffraction Theory. – Lviv: PMI, 1994. – 210 p.
9. *Ramm A. G.* Many Body Wave Scattering by Small Bodies and Applications // J. Math. Phys. – 2007. – **48**, № 10. – P. 103511.
10. *Ramm A. G.* Creating materials with a desired refraction coefficient: numerical experiments // International // J. Comp. Sci. and Math. (IJCSM). – 2010. – **3**, № 1/2. – P. 76–101.
11. *Ramm A. G.* Wave Scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes. – Singapore: World Sci. Publisher, 2005.
12. *Ramm A. G.* Electromagnetic wave scattering by small bodies // Phys. Lett. A. – 2008. – 372/23. – P. 4298–4306.
13. *Ramm A. G.* Wave scattering by many small particles embedded in a medium // Phys. Lett. A. – 2008. – 372/17. – P. 3064–3070.
14. *Ramm A. G.* A Collocation Method for Solving Integral Equations // Int. J. of Comput. Sci. and Mathem. – 2009. – **3**, № 2. – P. 122–128.
15. *Large pure refractive nonlinearity of nanostructure silica aerogel* / J. T. Seo, Q. Yang, S. Creekmore, et al. // Applied Physics Letters. – 2003. – **82**, № 6. – P. 4444–4446.
16. *Negative refraction in a Si-polymer photonic crystal membrane* / E. Shonbrun, M. Tinker, Park Wounjhang, Jeong-Bong Lee // IEEE Photonics Technology Letters. – 2005. – **17**, № 7. – P. 1196–1198.
17. *Experimental verification of apparent negative refraction in low-epsilon material in the microwave regime* / von Rhein A., Pergande D., Greulich-Weber S., Wehrspohn R. B. // J. of Applied Physics. – 2007. – **101/8**, № 4. – P. 086103–086103-3.