the three reference nodes, based on these corners and at the positions of the reference nodes (which form the triangle), calculates its own position using simple trigonometric relationships.

Key words: *wireless sensor network, node, anchor, error, localization, zigbee.*

Отримано: 16.07.2018

УДК 519.64

А. А. Дячук*, канд. техн. наук,
Н. Л. Костьян,** канд. техн. наук

* НУ «Институт экономики и прогнозирования НАН Украины», г. Киев,
**Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы

КОЛЛОКАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ

Несмотря на широкое использование метода коллокации для решения интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, до сих пор мало внимания уделялось реализации данного метода применительно к интегральным уравнениям с переменными пределами. В данной статье рассматриваются задачи решения интегральных уравнений Вольтерры 1 и 2 рода. Приближенное решение определяется в виде кусочно-гладкого полинома, составленного из полиномов по участкам области определения переменной интегрирования. Алгоритм метода представляет собой итерационный процесс. Задача сводится к решению систем в общем случае нелинейных уравнений относительно коэффициентов соответствующих полиномов. На каждом шаге итерации определяется аналитическое выражение для очередного полинома, что позволяет найти решение в любой точке заданного интервала. Особенностью коллокационного алгоритма для уравнений Вольтерры 2 рода является замена квадратурными формулами интегралов, которые входят в систему уравнений относительно приближенных значений коэффициентов. Выбор коэффициентов квадратурных формул зависит от принятого количества узлов на участке. В работе рассмотрен частный случай системы для трех узлов. При этом была произведена замена подынтегрального выражения решаемого уравнения интерполяционным многочленом в форме Ньютона. Результаты решения тестовых примеров подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов и свидетельствуют о высокой точности расчетов. Метод коллокации позволяет получать решения уравнений Вольтерры по участкам промежутка интегрирования, выбирая их длину и применяя на каждом из них аппроксимирующее выражение с небольшим числом координатных функций. Данный метод может быть использован при идентификации динамических объектов и систем, а также при решении задач восстановления входных сигналов.

Ключевые слова: *интегральные уравнения Вольтерры, метод коллокации, квадратурные формулы.*

Введение. При решении многих проблем физики и техники возникает необходимость в решении обратных задач динамики на основе применения моделей в форме интегральных уравнений Вольтерры. Для решения данного класса уравнений применяются аналитические, операционные, квадратурные, итерационные и другие методы [1, 2]. Прямое применение аналитических и итерационных методов решения интегральных уравнений может быть связано с определенными трудностями при создании высокопроизводительных алгоритмов и структур специализированных средств вычислительной техники, предназначенных для реализации интегральных моделей динамических систем. Особенности задачи решения уравнений Вольтерры 1 рода приводят к существенным ограничениям возможностей непосредственного применения метода квадратур. На практике трудно воспользоваться квадратурными формулами, более точными, чем формула трапеций. В связи с этим в случае необходимости возможен выбор какого-либо другого метода. Перспективными в этом отношении являются алгоритмы, основанные на идее метода коллокации [3], Хорошо известно применение метода коллокации для решения интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования [4–8]. В этом случае эффективность метода может оказаться невысокой из-за того, что промежуток интегрирования фиксирован. Если он оказывается большим, то повышение точности результатов достигается только за счет увеличения количества координатных (базисных) функций, совокупность которых аппроксимирует искомое решение.

В случае уравнений типа Вольтерры имеется возможность получать решение по участкам, выбирая их длину и применяя на каждом из них аппроксимирующее выражение с небольшим числом координатных функций. Целью работы является рассмотрение метода коллокации применительно к уравнениям типа Вольтерры.

Изложение основного материала. *Решение уравнения Вольтерры 1-го рода.* Рассмотрим уравнение Вольтерры 1 рода в общем виде

$$\int_a^x K[x,s,y(s)]ds = f(x), x \in [a,b]. \tag{1}$$

Метод коллокации, применительно к решению уравнения (1), состоит в следующем. Промежуток $[a, b]$ разбивается на N участков, на каждом из которых искомое решение представляется и виде функции определенного вида

$$\tilde{y}(x) = \Phi(x, c_1, c_2, \cdots, c_m) \tag{2}$$

зависящей от свободных параметров $c_i, i = \overline{1, m}$.

Решаемое уравнение на каждом (k + 1)-м участке $x_k \le x \le x_{k+1}$, $k = \overline{1, N-1}$ представляется в виде

$$\int_{x_k}^{x} K[x, s, \tilde{y}(s)]ds = f(x) - \psi_k(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \tag{3}$$

где функция $\psi_k(x)$ представляет собой интеграл

$$\psi_k(x) = \int_{a}^{x_k} K[x, s, \tilde{y}(s)]ds, \quad s \in [a, x_k], \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \tag{4}$$

который всегда может быть вычислен по известному на промежутке $a \le x \le x_k$ приближенному решению $\tilde{y}(x)$, полученному предварительно для k – 1 предшествующих участков. Начальное значение $y(a)$ искомого решения находится каким-либо вспомогательным способом или считается заданным.

Для решения уравнения (3) используется представление (2) а свободные параметры c_i, $i = \overline{1, m}$ определяются из условия обращения в нуль невязок

$$\varepsilon(c_i, x_{k,j}) = \int_{x_k}^{x_{k,j}} K[x_{k,j}, s, \Phi(s, c_1, c_2, \cdots, c_m) - f(x_{k,j}) + \psi_k, \tag{5}$$

где $x_{k,j}$ (j = 1, 2, … , m) — узлы, соответствующие разбиению отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ на m частей (подотрезков). Выражение (5) представляет собой систему m уравнений относительно $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$.

Исходя из удобств вычислений, искомое решение на участке целесообразно представлять в виде многочлена вида

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x), \tag{6}$$

где $\varphi_i(x)$ — линейно независимые координатные фикции.

Рассмотрим вариант метода коллокации, основанный на применении кусочно-гладких полиномов, применительно к решению уравнения (1).

В промежутке интегрирования $[a, b]$ выделим узлы

$$x_{k,j} = a + (km + j)h, \quad j = \overline{0, m}, \quad k = \overline{0, \ N-1},$$

где индекс k соответствует k + 1-му участку (отрезку $x_k \le x \le x_{k+1}$) а индекс j — подотрезку $x_{k,j} \le x \le x_{k,j+1}$ внутри участка; $m \ge 1$ — количество подотрезков; при этом $x_{k,m} = x_{k+1,0}$; $x_{0,0} = a$.

Решение будем искать в виде кусочно-гладкого полинома $\tilde{y}(x)=P(x)$ составленного по участкам из полиномов вида

$$P_k(x)=P_k(x_{k,0})+\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{k,j}}{j!}(x-x_{k,0})^j,\quad k=\overline{0,\ N-1}\,. \tag{7}$$

Полагая $P(x)\in c[a,b]$, имеем $P_k(x_{k,0})=P_{k-1}(x_{k-1},m)$.

Будем считать известим значение $P_0(x_{0,0})=y_0$ $(y_0=y(a))$. Тогда на первом участке приближенное решение уравнения (1) имеет вид

$$P_0(x)=P_0(x_{0,0})+\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{0,j}}{j!}(x-x_{0,0})^j\,. \tag{8}$$

Подставив (8) в решаемое уравнение (1) для фиксированных значений $x_{0,j}\,(j=1,m)$, подучим систему

$$\int_a^{x_{0,j}} K(x_{0,j},s,P_0(s))ds=f(x_{0,j}),\quad j=\overline{1,m}\,, \tag{9}$$

которая после вычисления интегралов представляет собой систему в общем случае нелинейных уравнений относительно коэффициентов $c_{0,1},\ \dots,\ c_{0,m}$, нахождение которых позволяет получить $P_0(x)$.

Приближенное решение на втором участке ищется в виде

$$P_1(x)=P_1(x_{1,0})+\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{1,j}}{j!}(x-x_{1,0})^j\,, \tag{10}$$

где значение $P_1(x_{1,\,0})$ известно из вычислений на предыдущем шаге и равно

$$P_1(x_{1.0})=P_0(x_{0,m})=P_0(x_{0,0})+\sum_{j=1}^{m}\frac{c_{0,j}}{j!}(x_{0,m}-x_{0,0})^j\,.$$

После подстановки (10) в решаемое уравнение, представленное в виде (3), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{1,0}}^{x_{1,1}} K[x_{1,1},s,P_1(s)]ds=f(x_{1,1})-\int_a^{x_{1,0}} K[x_{1,1},s,P_0(s)]ds,\\
&\int_{x_{1,0}}^{x_{1,2}} K[x_{1,2},s,P_1(s)]ds=f(x_{1,2})-\int_a^{x_{1,0}} K[x_{1,2},s,P_0(s)]ds,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int_{x_{1,0}}^{x_{1,m}} K[x_{1,m},s,P_1(s)]ds=f(x_{1,m})-\int_a^{x_{1,0}} K[x_{1,m},s,P_0(s)]ds,
\end{aligned} \tag{11}$$

которая позволяет найти значения $c_{1,1},\ c_{1,2},\ \cdots,\ c_{1,m}$.

Далее подобным образом определяются полиномы $P_2(s)$, $P_3(s)$, …, $P_{N-1}(s)$. Для нахождения коэффициентов $c_{k,1}, c_{k,2}, \cdots, c_{k,m}$ $(k = \overline{1, N-1})$ в общем случае используются выражения

$$\int_{x_{k,0}}^{x_{k,j}} K[x_{k,j}, s, P_k(s)]ds = f(x_{k,j}) - \psi_k(x_{k,j}),$$

где

$$\psi_k(x_{k,j}) = \int_a^{x_{1,0}} K[x_{k,j}, s, P_0(s)]ds + \int_{x_{1,0}}^{x_{2,0}} K[x_{k,j}, s, P_1(s)]ds +$$
$$+ \dots + \int_{x_{k-1,0}}^{x_{k,0}} K[x_{k,j}, s, P_{k-1}(s)]ds, \quad k = \overline{1, \ N-1}, \quad j = \overline{1, \ m}. \qquad (12)$$

Решение уравнения Вольтерры 2-го рода. Рассмотрен метод коллокации применительно к уравнению Вольттерры 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K[x, s, y(s)]ds, s, x \in [a, b]. \qquad (13)$$

Уравнение (13) можно представить в виде

$$y(x) = f(x) + \int_{x_{k-1}}^x K[x, s, y(s)]ds + \psi_k(x), \quad s, x \in [x_{k-1}, x], \qquad (14)$$

где

$$\psi_k(x) = \int_a^{x_{k-1}} K[x, s, y(s)]ds, \quad s \in [a, x_{k-1}], \quad x \in (x_{k-1}, x_k). \qquad (15)$$

Для построения приближенного решения уравнения (13) разобьем каждый из N участков промежутка $[a, b]$ на m частей длиной h и, таким образом, весь промежуток интегрирования будет представлять собой сетку с шагом h, а длина каждого участка равна mh. Решение ищем в виде кусочно-гладкой функции $P(x)$, представляющую собой следующие друг за другом с шагом mh полиномы степени m, т.е. на каждом k-м участке $P(x)$ является полиномом вида

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^m c_{k,i}[x - (k-1)mh]^i, \quad (k-1)mh < x < kmh,$$
$$P_k(kmh) = P_{k+1}(kmh), \quad k = \overline{1, N}. \qquad (16)$$

Согласно методу коллокации [7] потребуем, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнению (13) в точках

$$x = x_j = jh, \quad j = \overline{0, \ (N-1)m}$$

(точках коллокации). Для этого подставим выражение (16) в уравнение (13) и запишем его для значения $x = x_j$, что позволяет для каждого участка $(k-1)mh < x < kmh$ получать систему уравнений

$$P_k[(k-1)mh+ih] = \int_a^{(k-1)mh+ih} K[(k-1)mh+ih, s, P(s)]ds + f[(k-1)mh+ih], \quad i=\overline{1,\ m}. \tag{17}$$

Если систему (17) представить в виде (14) и заменить интегралы квадратурами, то можно перейти к явному виду системы конечных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_{k,j}$ нахождение которых позволяет получить конкретное приближенное решение в форме кусочно-гладкого полинома.

Разделяя в (17) интеграл на две части согласно (14), имеем

$$P_k[(k-1)mh+ih] = \int_{(k-1)mh}^{(k-1)mh+ih} K[(k-1)mh+ih, s, P_k(s)]ds + \int_a^{(k-1)mh} K[(k-1)mh+ih, s, P(s)]ds + f[(k-1)mh+ih], \tag{18}$$

где $i=\overline{1,\ m}$ и функция $P(x)$ представляет собой решение, полученное предварительно для предыдущих $k-1$ участков на промежутке $[0, (k-1)mh]$.

Квадратурные формулы, применяемые для замены в (18) интегралов, целесообразно выбирать, исходя из наличия $m-1$-го задействованного узла на каждом k-м участке, что соответствует точности порядка $O(h^{m+2})$. Следует также учитывать, что из решения системы (18) на предыдущем $k-1$-м участке известно значение

$$c_{k,0} = P_k[(k-1)mh] = P_{k-1}[(k-1)mh].$$

Таким образом, замена в (18) интегралов квадратурными формулами приводит к следующей системе относительно приближения значений $c_{k,i}\,(i=\overline{1,m})$ коэффициентов полиномов (16):

$$\sum_{n=0}^{m}(ih)^n c_{k,n} = \sum_{j=0}^{m} A_{ij} K[(k-1)mh+ih, (k-1)mh+jh, \sum_{n=0}^{m}(jh)^n c_{k,n}]h + \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{m} A_{mj} K[(k-1)mh+ih, (l-1)mh+jh, \sum_{n=0}^{m}(jh)^n c_{l,n}]h + f[(k-1)mh+ih]; i=\overline{1,m}, \tag{19}$$

где A_{ij} — коэффициенты квадратурных формул, набор которых зависит от принятого количества узлов m на участке.

Рассмотрим подробнее систему (19) для m = 3. Полином (16) при этом принимает вид

$$P_k(x) = c_{k,0} + xc_{k+1} + x^2 c_{k,2} + x^3 c_{k,3},$$

а значения узлов равны $x_i = 3(k-1)h + ih,\ k = \overline{1,\ N},\ i = \overline{1,\ 3}$.

Применительно к подынтегральному выражению решаемого уравнения введем обозначения

$$\tilde{K}_i(s) = K(x_i, s, P_k(s)),\ \ \tilde{K}_{ij} = K(x_i, x_j, P_k(x_j)) .$$

Заменяя $\tilde{K}_i(s)$ интерполяционным многочленом в форме Ньютона, имеем

$$\begin{aligned} K(x_i, s, P_k(s)) = \tilde{K}_{i,0} + (s - x_0)\frac{\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}}{h} + \\ +(s-x_0)(s-x_1)\frac{\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,j} + \tilde{K}_{i,0}}{2h^2} + \\ +(s-x_0)(s-x_1)(s-x_2)\frac{\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}}{6h^3} + O(h^4). \end{aligned} \qquad (20)$$

Интегрируя (20) в соответствующих пределах, получим для первого участка

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} K(x_i, s, p_k(s))ds = \tilde{K}_{i,0}h + (\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0})\frac{h}{2} - \left(\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,0}\right)\frac{h}{12} + \\ +\left(\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}\right)\frac{h}{24} + O\left(h^5\right) = \\ = (9\tilde{K}_{i,0} + 19\tilde{K}_{i,1} - 5\tilde{K}_{i,3} + \tilde{K}_{i,3})\frac{h}{24} + O\left(h^3\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} K\left(x_i, s, P_k\left(s\right)\right)ds = \tilde{K}_{i,0}\cdot 2h + \left(\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}\right)\cdot 2h + \left(\tilde{K}_{i,2} - 2\cancel{\tilde{K}}_{i,1} + \tilde{K}_{i,0}\right)\cdot\frac{h}{3} + \\ +\left(\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}\right)\cdot O = \left(\tilde{K}_{i,0} + 4\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,2}\right)\cdot\frac{h}{3} + O\left(h^5\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} K\left(x_i, s, P_k\left(s\right)\right)ds = \tilde{K}_{i,0}\cdot 3h + \left(\tilde{K}_{i,1} - K_{i,0}\right)\cdot\frac{9h}{2} + \\ +\left(\tilde{K}_{i,2} - 2\tilde{K}_{i,1} + \tilde{K}_{i,0}\right)\cdot\frac{9h}{4} + \left(\tilde{K}_{i,3} - 3\tilde{K}_{i,2} + 3\tilde{K}_{i,1} - \tilde{K}_{i,0}\right)\cdot\frac{3h}{8} = \\ = \left(\tilde{K}_{i,0} + 3\tilde{K}_{i,1} + 3K_{i,2} + K_{i,3}\right)\cdot\frac{3h}{8} + O\left(h^5\right). \end{aligned}$$

Полученные весовые коэффициенты не изменяются от участка к участку. В частности, весовые коэффициенты последней формулы сохраняются для интегралов от функции $K\left[x_i, s, P_l(s)\right]$ с пределами $3(l-1)h$, $3lh$, где $l=\overline{1,\ k-1}$.

Пренебрегая остаточными членами квадратурных формул, имеющими порядок $O(h^5)$, и подставляя полученные выражения в (19) имеем

$$\begin{cases} c_{k,1}h + c_{k,2}h^2 + c_{k,3}h^3 = \left[9\tilde{K}_{1,0} + 19\tilde{K}_{1,1} - 5\tilde{K}_{1,2} + \tilde{K}_{1,3}\right]\dfrac{h}{24} + F_1, \\ c_{k,1}h + 4c_{k,2}h^2 + 8c_{k,3}h^3 = \left[\tilde{K}_{2,0} + 4\tilde{K}_{2,1} + K_{2,2}\right]\dfrac{h}{3} + F_2, \\ 3c_{k,1}h + 9c_{k,2}h^2 + 27c_{k,3}h^3 = \left[\tilde{K}_{3,0} + 3\tilde{K}_{3,1} + 3K_{3,2} + \tilde{K}_{3,3}\right]\dfrac{3h}{8} + F_3, \end{cases} \tag{21}$$

$$F_i =$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{3} A_{j,3}\cdot K\left[3(k-1)h + ih,\ 3(l-1)h + jh,\ \sum_{n=0}^{3} c_{l,n}\,(jh)^n\right]\cdot h +$$

$$+ f\left[3(k-1`)h + ih\right] - c_{k,0},$$

где $A_{0,3} = A_{3,3} = \dfrac{3}{8}$, $A_{1,3} = A_{2,3} = \dfrac{9}{8}$, а выражения для $\tilde{K}_{ij}\,(i, j = \overline{1,3})$ зависят от $c_{k,j}$.

Легко видеть, что при $m = 1$ имеем $A_{0,1} = \dfrac{1}{2}$, $A_{1,1} = \dfrac{1}{2}$ т.е. приходим к формуле трапеций, а при $m = 2$ подучаем

$$\begin{array}{c} A_{0,1} = \dfrac{5}{12},\ A_{1,1} = \dfrac{2}{3},\ A_{2,1} = -\dfrac{1}{2}, \\ A_{0,2} = \dfrac{1}{3},\ A_{1,2} = \dfrac{4}{3},\ A_{2,2} = \dfrac{1}{3} \end{array}.$$

Для численного решения системы (21) наиболее подходят итерационные методы, а в качестве начальных приближений для k-го участка можно принять значения

$$c_{k,0} = P_{k-1}\left[(k-1)mh\right],\ c_{k,i} = c_{k-1,i},\ i = \overline{1,m},\ k \ge 2$$

(для первого участка можно положить $P_1(x) \equiv f(a)$).

Система (21) всегда может быть приведена к виду, необходимому для применения итерационных методов. В частности, путем составления линейных комбинаций получаем систему (22) в форме, удобной для применения метода простой итерации.

$$\begin{cases} c_{k,1} = \dfrac{1}{h}((9\tilde{K}_{1,0} + 19\tilde{K}_{1,1} - 5\tilde{K}_{1,2} + \tilde{K}_{1,3} - 4\tilde{K}_{2,0} - 16\tilde{K}_{2,1} - \\ -4\tilde{K}_{2,2} + \tilde{K}_{3,0} + 3\tilde{K}_{3,1} + 3\tilde{K}_{3,2} + \tilde{K}_{3,3}) \cdot \dfrac{h}{8} + 3F_1 - \dfrac{3}{2}F_2 + \dfrac{1}{3}F_3), \\ c_{k,2} = \dfrac{1}{h^2}((-45\tilde{K}_{1,0} - 95\tilde{K}_{1,1} + 25\tilde{K}_{1,2} - 5\tilde{K}_{1,3} + 32\tilde{K}_{2,0} + 128\tilde{K}_{2,1} + \\ +32\tilde{K}_{2,2} - 9\tilde{K}_{3,0} - 27\tilde{K}_{3,1} - 27\tilde{K}_{3,2} - 9\tilde{K}_{3,3}) \cdot \dfrac{h}{48} - \dfrac{5}{2}F_1 + 2F_2 - \dfrac{1}{2}F_3), \\ c_{k,3} = \dfrac{1}{h^3}((9\tilde{K}_{1,0} + 19\tilde{K}_{1,1} - 5\tilde{K}_{1,2} + \tilde{K}_{1,3} - 16\tilde{K}_{2,0} - 64\tilde{K}_{2,1} - \\ -16\tilde{K}_{2,2} + 3\tilde{K}_{3,0} + 9\tilde{K}_{3,1} + 9K_{3,2} + 3K_{3,3}] \cdot \dfrac{h}{48} + \dfrac{1}{2}F_1 - \dfrac{1}{2}F_2 + \dfrac{1}{6}F_3). \end{cases} \quad (22)$$

Чтобы убедиться в эффективности метода коллокации при решении уравнений Вольтерры 1 и 2 рода, рассмотрим следующие тестовые примеры.

Пример 1. Задано уравнение Вольтерры 1 рода

$$\int_0^x (x+s)y(s)ds = 2x\sin x + \cos x - 1, \quad y(0) = 1.$$

Следуя рассмотренному методу, найдем приближенное решение на 1-м участке, принимая $h = \dfrac{\pi}{60}$, $m = 2$. Значения узлов, разделяющих участки:

$$x_{0,0} = 0; \ x_{1,0} = \frac{\pi}{30}; \ x_{2,0} = \frac{\pi}{15}; \ \ldots$$

Первый участок (как и остальные), разбивается на две части, которые ограничены точками коллокации:

$$x_{0,0} = 0; \ x_{0,1} = \frac{\pi}{60}; \ x_{0,2} = x_{1,0} = \frac{\pi}{30}.$$

На 1-м участке искомое решение представляем выражением

$$\tilde{y}(x) \cong P_0(x) =$$

$$= P_0(x_{0,0}) + c_{0,1}(x - x_{0,0}) + \frac{1}{2}c_{0,2}(x - x_{0,0})^2,$$

где $P_0(x_{0,0}) = y(0)$ и подстановка которого в исходное уравнение при $x = x_{0,1}$ и $x = x_{0,2}$ приводит к системе

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{60}} (\frac{\pi}{60}+s)(1+c_{0,1}s+\frac{1}{2}c_{0,2}s^2)ds = 2\frac{\pi}{60}\sin\frac{\pi}{60}+\cos\frac{\pi}{60}-1, \\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{30}} (\frac{\pi}{30}+s)(1+c_{0,1}s+\frac{1}{2}c_{0,2}s^2)ds = 2\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{30}+\cos\frac{\pi}{30}-1. \end{cases}$$

После вычисления интегралов система принимает вид

$$\begin{cases} 0,000120\cdot c_{0,1}+0,000007\cdot c_{0,2}=-0,0000026, \\ 0,000958\cdot c_{0,1}+0,000035\cdot c_{0,2}=-0,000036, \end{cases}$$

а ее решение $c_{0,1}=-0,008318;\ c_{0,2}=-0,8008757$. Тогда

$$P_0(x)=1-0,008318x-0,8008757\frac{x^2}{2}.$$

Вычислив значение $\tilde{y}(\frac{\pi}{30})=P_0(\frac{\pi}{30})=0,990339$, можно сравнить его с точным $y(\frac{\pi}{30})=0,994517$ (точное решение $y(x) = \cos x$).

Пример 2. Уравнение Вольтерры 2 рода

$$y(x)=2+\int\limits_0^x\left[\frac{y(s)}{s+1}-\frac{s+1}{y(s)}\right]ds$$

(точное решение $y(x)=(x+1)\sqrt{4-2\ln(x+1)}$) решалось на интервале [0; 6,375] при $h = 0,025$, $m = 3$.

Ввиду того, что ядро решаемого уравнения не зависит от x, система (22) имеет более простой вид. Для этого случая

$$\tilde{K}_{1,0}=\tilde{K}_{2,0}=\tilde{K}_{3,0}=K_0;\ \ \tilde{K}_{1,1}=\tilde{K}_{2,1}=\tilde{K}_{3,1}=K_1;$$

$$\tilde{K}_{1,2}=\tilde{K}_{2,2}=\tilde{K}_{3,2}=\tilde{K}_2;\ \ \tilde{K}_{1,3}=\tilde{K}_{2,3}=\tilde{K}_{3,3}=K_3.$$

Учитывая выполнение уравнения (13) в точке $x = 3(k - 1)h$, легко видеть, что $F_i=0,\ i=\overline{1,3}$.

Таким образом, согласно (22) для k-го участка получаем систему

$$\begin{cases} c_{k,1}=\frac{1}{4}(3K_0+3K_1-3K_2+K_3), \\ c_{k,2}=\frac{1}{24h}(-11K_0+3K_1+15K_2-7K_3), \\ c_{k,3}=\frac{1}{12h^2}(K_0-K_1-K_2+K_3), \end{cases}$$

где

$$K_0 = \frac{y_0}{x_0+1} - \frac{x_0+1}{y_0},$$

$$K_1 = \frac{y_0 + c_{k,1}h + c_{k,2}h^2 + c_{k,3}h^3}{x_0+h+1} - \frac{x_0+h+1}{y_0 + c_{k,1}h + c_{k,2}h^2 + c_{k,3}h^3},$$

$$K_2 = \frac{y_0 + 2c_{k,1}h + 4c_{k,2}h^2 + 8c_{k,3}h^3}{x_0+2h+1} - \frac{x_0+2h+1}{y_0 + 2c_{k,1}h + 4c_{k,2}h^2 + 8c_{k,3}h^3},$$

$$K_3 = \frac{y_0 + 3c_{k,1}h + 9c_{k,2}h^2 + 27c_{k,3}h^3}{x_0+3h+1} - \frac{x_0+3h+1}{y_0 + 3c_{k,1}h + 9c_{k,2}h^2 + 27c_{k,3}h^3},$$

$$x_0 = 3(k-1)h,\ \ y_0 = P_{k-1}\big(3(x-1)h\big).$$

Полученная система уравнений решалась методом простых итераций, а в качестве начальных приближений выбирались значения $c_{k,0} = y_0 = 2,\ c_{k,1} = c_{k,2} = c_{k,3} = 0$ для $k = 1$ и $c_{k,i} = c_{k-1,i},\ i = \overline{1,3}$ для $k \ge 2$.

Полученный вид решаемой системы непосредственно использовался в качестве итерационного выражения и обеспечил сходимость процесса. При других формах итерационных выражений процесс последовательных приближений может оказаться расходящимся.

Результаты итерационного процесса для коэффициентов $c_{1,i}$ и $c_{2,i}$ приведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно. В табл.3 для ряда значений аргумента приведены результаты приближенного решения $\tilde{y}(x)$, точного решения $\bar{y}(x_j)$ и ошибка.

Таблица 1

Значения коэффициента $c_{1,i}$

Номер итерации	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
0	0	0	0
1	1,4999595	–1,2469478	0,5978266
2	1,5000319	–0,3149309	-0,2673441
3	1,4999887	–0,3116330	0,0476275
4	1,4999968	–0,3122627	0,0625618
5	1,4999972	–0,3122876	0,0629694
6	1,4999972	–0,3122882	0,0629775

Таблица 2

Значения коэффициента $c_{2,i}$

Номер итерации	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$
0	1,4999972	–0,3122882	0,0629775
1	1,4542129	–0,2714302	0,0365664
2	1,4542105	–0,2980747	0,0635452

Продолжение таблицы 2

3	1,4542117	–0,2981652	0,0551428
4	1,4542115	–0,2981493	0,0547663
5	1,4542115	–0,2981487	0,0547567

Таблица 3

Результаты решения тестового примера 2

x_j	$\tilde{y}(x_j)$	$\overline{y}(x_j)$	$\Delta y(x_j)$
0	2,000000000	2,000000000	0
0,075	2,110769735	2,110769734	0,000000001
0,15	2,218181613	2,218181612	0,000000001
0,6	2,798853594	2,798853590	0,000000004
1,2	3,424577755	3,424577748	0,000000007
1,8	3,900713732	3,900713722	0,000000011
2,4	4,236308787	4,236308773	0,000000014
3,0	4,431543818	4,431543799	0,000000019
3,6	4,478537424	4,478537399	0,000000024
4,2	4,358961092	4,358961061	0,00000003I
4,8	4,036250689	4,036250650	0,000000039
5,4	3,431044869	3,431044831	0,000000038
6,0	2,302347325	2,302347800	-0,000000475

Пример 3. Было взято уравнение Вольтерры 2 рода с тем же точным решением, что и в примере 2, но с ядром общего вида.

$$y(x) = x + 2 + \int_0^x \left[\frac{y(s)}{2(s+1)} - \frac{(x+s+2)}{y(s)} \right] ds,$$

точное решение $y(x) = (x+1)\sqrt{4 - 2\ln(x+1)}$. Уравнение решалось на интервале [0; 6,375] с шагом h = 0,0125, m = 3 (для $x > \exp(2) - 1 \approx 6.4$ решение не существует).

В табл. 4 приведено решение $\tilde{y}(x)$, точное решение $\overline{y}(x)$ и ошибка для этого уравнения.

Таблица 4

Результаты решения тестового примера 3

x_j	$\tilde{y}(x_j)$	$\overline{y}(x_j)$	$\Delta y(x_j)$
0	2,0000000000	2,0000000000	0
0,6	2,7988535896	2,7988535900	$-4\ 10^{-10}$
1,2	3,4245777471	3,4245777478	$-8\ 10^{-10}$
1,8	3,9007137204	3,9007137217	$-1{,}3\ 10^{-9}$
2,4	4,2363087713	4,2363087731	$-1{,}8\ 10^{-3}$
3,0	4,4315437967	4,4315437993	$-2{,}5\ 10^{-9}$

Продолжение таблицы 4

3,6	4,4785373958	4,4785373992	$-3{,}4\ 10^{-9}$
4,2	4,3589610561	4,3589610606	$-4{,}5\ 10^{-9}$
4,8	4,0362506434	4,0362506497	$-6{,}3\ 10^{-9}$
5,4	3,4310448204	3,4310448306	$-1{,}01\ 10^{-8}$
6,4	2,302477494	2,3023478001	$-5{,}07\ 10^{-8}$

Резкое возрастание погрешности вблизи точки x = 6,4 объясняется тем, что в этой точке все производные решения обращаются в ∞ и для $x > 6.4$ решения уравнения не существует.

Выводы. В работе изложен метод коллокации для интегральных уравнений Вольтерры 1 и 2 рода. Приближенное решение уравнений представляется в форме кусочно-гладкого полинома, что позволяет найти решение в любой точке заданного интервала. Результаты расчетов тестовых примеров 1–3 подтверждают работоспособность алгоритмов, реализующих данный метод. Алгоритм решения уравнений Вольтерры 1 рода прост в реализации. Алгоритм коллокационного метода для уравнений Вольтерры 2 рода предусматривает использование квадратурных формул. Максимальная абсолютная погрешность результата при решении уравнения Вольтерры 2 рода с ядром общего вида составила $5{,}07 \cdot 10^{-8}$. Метод может быть использован при рассмотрении задач восстановления входных воздействий и идентификации динамических объектов и систем.

Список использованной литературы:

1. Довгий С. А. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения / С. А. Довгий, И. К. Лифанов. — К. : Наукова думка, 2002. — 342 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. — 2-е изд., испр. — М. : ОНИКС 21 век, 2005. — 400 с.
3. Габдулхаев Б. Г. Прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода : учебное пособие / Б. Г. Габдулхаев. — Казань : Казанский государственный университет, 2006. — 137 с.
4. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений : монография / И. В. Бойков. — Пенза : Пензенский государственный университет, 2004. — 297 с.
5. Имомов А. И. Организация приближённого решения интегральных уравнений в MathCAD / А. И. Имомов // Молодой ученый. — 2014. — № 14 (73). — С. 6–15.
6. Карчевский Е. М. Численные методы решения интегральных уравнений и комплекс программ на языке Matlab : учебное пособие / Е. М. Карчевский. — Казань : Казанский федеральный университет, 2017. — 61 с.
7. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал Пресс, 2000. — 384 с.
8. Спиридонов А. О. Метод коллокации решения нелинейных спектральных задач для граничных интегральных уравнений Мюллера / А. О. Спиридо-

нов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 2 (34). — С. 32-45.

Despite the extensive use of the collocation method for solving integral equations with constant integration limits, little attention has been paid so far to the implementation of this method with respect to integral equations with variable limits. In this article tasks of solving Volterra integral equations of 1 and 2 kinds were considered. An approximate solution is defined as a piecewise-smooth polynomial composed of polynomials over sections of the domain of definition of the variable of integration. The algorithm of the method is an iterative process. The problem is reduced to solving systems in the general case of non-linear equations with respect to the coefficients of the corresponding polynomials. At each step of the iteration, an analytic expression for the next polynomial is determined, which allows finding a solution at any point of the given interval. A special feature of the collocation algorithm for Volterra equations of the 2nd kind is the replacement of integrals by quadrature formulas, which are comprised into the system of equations with respect to the approximate values of the coefficients. The choice of the coefficients of quadrature formulas depends on the accepted number of nodes in the section. A special case of a system for three nodes is considered in the article. In doing so, the integrand of the solved equation was replaced by an interpolation polynomial in the Newton form. The results of the solution of the test cases confirm the efficiency of the proposed algorithms and indicate the high accuracy of the calculations. The collocation method allows to obtain solutions of the Volterra equations for the segments of the integration interval, choosing their length and applying on each of them an approximating expression with a small number of coordinate functions. This method can be used in identifying of the dynamic objects and systems, as well as in solving problems of reduction input signals.

Keywords: *Volterra integral equations, collocation method, quadrature formulas.*

Отримано: 15.05.2018