УДК 004.932

Р. А. Воробель

КОНСТРУЮВАННЯ АЛГЕБР ЛОГАРИФМІЧНОГО ТИПУ

Method for construction of logarithmic type algebras is presented. Theorems, which are a base for receiving explicit of expression for addition and multiplication by real scalar operations, are proved. As basic element for construction of proposed algebras is function generator of analytic form. Examples for new logarithmic type algebras are shown.

Key words: *algebra, triangular norm, uninorm.*

Описано спосіб конструювання алгебр логарифмічного типу. Доведено теореми, які є основою отримання явного виразу операцій додавання та множення на дійсний скаляр. Базовим елементом конструювання розглянутих алгебр є задана аналітично функція-генератор. Наведено приклади нових алгебр логарифмічного типу.

Ключові слова: *алгебра, трикутна норма, унінорма.*

Останніми роками набули широкого поширення методи логарифмічної обробки зображень [14, 33, 34] як розвиток ідей Жорлін та Пінолі, що були закладені в публікації [23] та подальшими роботами у цьому напрямку [24–26, 33–37]. Характерною рисою підходу Жорлін та Пінолі є конструювання спеціальної алгебри, в якій операції додавання та множення відображають властивості інвертованої логарифмічної функції. Теоретичною основою їхнього підходу, з одного боку, послужив закон Бугера–Ламберта [12], який описує властивості проходження світла через частково поглинаюче середовище. З іншого, психофізичний закон Вебера–Фехнера [15, 39] сприйняття світла людиною засвідчує, що реакція зорової системи людини пропорційна логарифмові світлового подразнення. Жорлін та Пінолі довели, що операція віднімання описується так само, як функція визначення відносного контрасту елементів зображення. Алгебраїчна структура (алгебра), описана у роботах [23–26], використовує додавання та множення тільки додатних чисел на додатне число, що обмежує її функціональні можливості. Водночас слід зазначити, що 1965 р. Оппенгейм [31] сформулював проблему конструювання алгебраїчних моделей систем опрацювання сигналів та представив один з її розв'язків [32] гомоморфною фільтрацією. Для аналізу нелінійної (гомоморфної) системи він використав принцип суперпозиції та узагальненого додавання. Проте залишився осторонь розгляду і є невідомим сьогодні спосіб побудови алгебр, які задовольняли б сформульовані Оппенгеймом вимоги. Тому метою роботи є розв'язання задачі конструювання алгебр, зокрема знаходження способу побудови такої алгебри, арифметичні операції якої відображають властивості наперед заданої нелінійної функції логарифмічного типу. Для множини $E = (-M, M)$, де $M > 0$, будемо будувати універсальну алгебру з двома бінарними операціями типу $\langle 2, 2\rangle$ [4], чи як її ще називають алгебраїчну структуру [5] дійсного векторного простору [6,7] з означеними в ньому додаванням $\langle + \rangle$ та множенням на дійсний скаляр $\langle \times \rangle$. Для цього на початку подамо стислий огляд робіт, в яких використовуються алгебри зазначеного типу, далі розглянемо побудований спосіб конструювання таких алгебр та подамо ряд прикладів, які ілюструють використання запропонованого методу для знаходження аналітичних виразів, які описують арифметичні операції відповідних алгебр.

1. Базові алгебри логарифмічного типу. Будемо виходити з того, що сконструйована алгебра повинна оперувати з дійсними числами з проміжку $(-M, M)$, а операція множення на скаляр має реалізовуватися для дійсних значень скаляра, а не тільки додатних. У роботах [1, 2] ми описали універсальну алгебру, яка узагальнює алгебру Жорлін та Пінолі [23, 24]. Вона використовує операції додавання $\forall u,\, v \in E = (-M, M)$

$$u \langle + \rangle_1 v = sign\,(u+v) \cdot M \cdot (1 - ((1 - \frac{|u|}{M})^{\,sign(u)} \cdot (1 - \frac{|v|}{M})^{\,sign(v)})^{\,sign(u+v)}), \tag{1}$$

де
$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{ÿêù î } x < 0, \\ 0, & \text{ÿêù î } x = 0, \\ 1, & \text{ÿêù î } x > 0, \end{cases}$$

і множення $\forall \alpha \in R$

$$\alpha \langle \times \rangle_1 u = sign\,(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{|u|}{M} \right)^{|\alpha|} \right) \tag{2}$$

та характеризується ізоморфізмом

$$\varphi_1 : u \to \varphi_1(u) = -M \cdot \ln\left(\left(1 - \frac{|u|}{M} \right)^{sign(u)} \right). \tag{3}$$

У роботі [33] описана алгебра Патраску. Вона використовує операцію додавання $\forall u,\, v \in E$ на основі суми Ейнштейна

$$u \langle + \rangle_2 v = \frac{u+v}{1 + u \cdot v / M^2}, \tag{4}$$

та операцію множення вектора на скаляр $\forall \alpha \in R$

$$\alpha \langle \times \rangle_2 u = M \cdot \frac{(M+u)^{\alpha} - (M-u)^{\alpha}}{(M+u)^{\alpha} + (M-u)^{\alpha}}. \tag{5}$$

Така векторна структура $(E; \langle + \rangle_2, \langle \times \rangle_2)$ (4)–(5) характеризується ізоморфізмом

$$\varphi_2 : u \to \varphi_2(u) = -\frac{M}{2} \cdot \ln(\frac{M+u}{M-u}) \quad \forall u \in E. \tag{6}$$

Алгебри $(E; \langle + \rangle_1, \langle \times \rangle_1)$ та $(E; \langle + \rangle_2, \langle \times \rangle_2)$ ми узагальнили в роботі [3] параметричною алгеброю $(E; \langle + \rangle_p, \langle \times \rangle_p)$, де $p > 0$, з операціями додавання: $\forall u,\, v \in E$

$$u \langle + \rangle_p v = sign\,(u+v) \cdot \frac{|u+v| + (1-k) \cdot (p-2) \cdot u \cdot v / M}{1 + (p-1) \cdot u \cdot v / M^2 + k \cdot (p-2) \cdot \min(|u|, |v|) / M}, \tag{7}$$

де
$$k = \begin{cases} 0, & \text{ÿêù î } sign(u) = sign(v), \\ 1, & \text{ÿêù î } sign(u) = -sign(v), \end{cases}$$

та операцією множення: $\forall \alpha \in R$

$$\alpha \langle \times \rangle_p u = sign\,(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (p-1) \cdot |u|)^{|\alpha|} - (M - |u|)^{|\alpha|}}{(M + (p-1) \cdot |u|)^{|\alpha|} + (p-1) \cdot (M - |u|)^{|\alpha|}}, \tag{8}$$

яка використовує ізоморфізм

$$\varphi_p : u \to \varphi_p(u) = -sign(u) \cdot \frac{M}{p} \cdot \ln\left(\frac{M - |u|}{M + (p-1) \cdot |u|} \right). \tag{9}$$

При цьому за значення $p=1$ отримуємо алгебру (1)–(2), за значення $p=2$ відтворюємо алгебру Патраску (4)–(5). Зазначимо, що алгебра (1)–(2) [1, 2] узагальнює алгебру Жорлін та Пінолі [23, 24] з операцією додавання

$$\forall u,\ v \in (0, M)$$

$$u \oplus v = u + v - \frac{u \cdot v}{M}, \tag{10}$$

операцією множення на скаляр $\forall \alpha > 0$

$$\alpha \otimes u = M - M \cdot (1 - \frac{u}{M})^{\alpha}, \tag{11}$$

яка характеризується ізоморфізмом

$$\varphi:\ u \to \varphi(u) = -M \cdot \ln\left(1 - \frac{u}{M}\right). \tag{12}$$

З порівняння виразів ізоморфізму (3), (6), (9) і (12) випливає, що всі вони є функціями логарифмічного типу. Тому вважатимемо що і відповідні алгебри є теж логарифмічного типу. Проте залишається невідомим метод конструювання таких алгебр. Для вирішення цього завдання виокремимо дві задачі, які необхідно розв'язати. Оскільки описані вище алгебри (1)–(2), (4)–(5) і (7)–(8) є структурами векторного простору над полем дійсних чисел, то першою задачею є побудова методу конструювання адитивної абелевої групи $G(E;\langle+\rangle)$, а другою задачею – побудова методу конструювання аналітичного виразу операції множення вектора на скаляр. Обидві операції додавання та множення повинні відображати властивості наперед заданої нелінійної функції *f*. На початку опишемо розв'язок першої задачі, а потім другої.

2. Конструювання операції додавання. Для конструювання функціонально залежної операції додавання, де кожен доданок є певним значенням наперед заданої функції, звернемося до подання асоціативних функцій у роботі [29]. Тут, продовжуючи дослідження Серпінського [38] і Колмогорова [28], Лінг довела, що існує одномісна функція *f*, така, що для кожної симетричної двомісної функції *F* існує одномісна функція g, така, що

$$F(x, y) = g(f(x) + f(y)). \tag{13}$$

Водночас, коли F є асоціативною і неперервною функцією, то ще Абель 1826 р. [8] показав, що, додатково накладаючи вимоги симетрії, неперервності, строгої монотонності та диференційованості на функцію *F*, можемо подати її як

$$F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y)), \tag{14}$$

де f^{-1} є оберненою до *f*. У 1948 р. Ацел [9, 10] довів, що якщо A є відкритий чи напіввідкритий інтервал, та $S: A \times A \to A$ є двомісною асоціативною функцією, тобто такою, що відповідає функціональному рівнянню

$$S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z)), \tag{15}$$

і є неперервною та зростаючою у кожній точці, то тоді існує така неперервна і строго монотонна функція $f: A \to R$, що S подається у формі (14). Водночас 1942 р. Менгер у роботі [30] описав спеціальні асоціативні функції, які він назвав трикутними нормами, бо використовував їх для доведення нерівностей трикутника під час визначення відстані між статистичними розподілами. Ця назва – трикутні норми – закріпилася за широким класом асоціативних функцій до сьогодні. За означенням, поданим у роботах [11, 27], для архімедових строгих трикутних

s-норм, які є строго зростаючими функціями, s-норма S – це двомісна дійсна функція S: $[0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, яка задовольняє таким умовам:

а) $S(0,\ 0) = 0$, $S(x,\ 0) = x$, $S(x,\ 1) = 1$ (крайова умова);

б) $S(x,\ y) \le S(u,\ v)$, коли $x \le u$, $y \le v$ (монотонність);

в) $S(x,\ y) = S(y,\ x)$ (симетричність, чи, як її ще називають, комутативність);

г) $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$ (асоціативність).

Трикутну s-норму S називають архімедовою, якщо для кожного $x \in (0,\ 1)$ $S(x, x) > x$. Підмножина неперервних архімедових s-норм є важливою тому, що вони можуть бути подані через однозначну функцію, яку називають адитивним генератором s-норми. У роботах [11, 27, 29] описано, що для кожної неперервної архімедової s-норми S існує неперервна строго зростаюча функція f така, що

$$S(x_1, \ldots, x_n) = f^{-1}(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)) \tag{16}$$

з $f:\ [0,1] \to [0, +\infty]$, що задовольняє умові $f(0) = 0$ і f^{-1} є оберненою до f, та яка для випадку двох змінних x та y набуває вигляду (14) $S(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$. Зазначимо, що в теорії асоціативних функцій та трикутних норм так означену функцію f прийнято називати адитивним генератором трикутної s-норми. Саме описане вище подання відображає операцію додавання двох функціонально залежних величин x та y. Тому, використовуючи цю властивість s-норм, доведемо таку теорему.

Теорема 1. Множина $E = (-M, M)$, де $M > 0$, з операцією додавання $\langle + \rangle_{\tilde{f}}$:

$$\forall u,\ v \in E$$

$$u \langle + \rangle_{\tilde{f}}\, v \overset{def}{=} \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)), \tag{17}$$

(де $\tilde{f}(u) = sign(u) \cdot f(|u|/M)$ є строго зростаючою неперервною бієкцією, а $\tilde{f}^{-1}$ – обернена до $\tilde{f}$ функція, причому $f[0,1] \to [0, +\infty]$ з $f(0) = 0$) утворює адитивну абелеву групу $G_{\tilde{f}} = (E; \langle + \rangle_{\tilde{f}})$.

Доведення. Для адитивної абелевої групи мають справджуватися такі аксіоми:

– додавання комутативне;

– додавання асоціативне;

– в множині E існує однозначний нульовий елемент e;

– кожному елементу u множини E відповідає однозначно визначений протилежний елемент $\bar{u}$.

Для доведення цього твердження на початку дослідимо функцію $\tilde{f}(u)$ детальніше. З означення функції $\tilde{f}(u)$ випливає така її властивість:

$$\tilde{f}(-u) = -\tilde{f}(u). \tag{18}$$

Розглянемо випадок $u \ge 0$. Тоді $\tilde{f}(u) = f(u/M)$. Позначимо $y = \tilde{f}(x) = f(x/M)$, де $x \ge 0$. Проаналізуємо функцію $y = f(x/M)$. Взявши обернену до f функцію, від обох частин цієї рівності отримуємо $\tilde{f}^{-1}(y) = f^{-1}(f(x/M))$, звідки $f^{-1}(y) = x/M$, або ж $M \cdot f^{-1}(y) = x$. Враховуючи, що для рівності $y = \tilde{f}(x)$ за аналогією маємо $\tilde{f}^{-1}(y)=x$, то в цілому, для лівих частин розглянутих вище рівностей, отримуємо

$$\tilde{f}^{-1}(y)=M\cdot f^{-1}(y).$$

А якщо $u<0$, то $\tilde{f}(u)=-f(|u|/M)$ і для $y<0$ $\tilde{f}^{-1}(y)=-M\cdot f^{-1}(|y|)$, або ж, в цілому,

$$\tilde{f}^{-1}(y)=sign\,(y)\cdot M\cdot f^{-1}(|\,y\,|). \qquad (19)$$

Знаючи властивості функції $\tilde{f}$ та оберненої до неї функції $\tilde{f}^{-1}$ покажемо, що для операції додавання $u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v$ (17) справджуються зазначені вище аксіоми.

2.1. Додавання комутативне:

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v=v\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,u. \qquad (20)$$

На основі виразів (17)–(20) можемо записати:

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)+\tilde{f}(v))=\tilde{f}^{-1}(sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M})+sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M}))=$$

$$=sign\,(sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M})+sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M})+$$

$$+sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M})\,|)=sign\,(sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M})+$$

$$+sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M})+sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M})\,|)=$$

$$=\tilde{f}^{-1}(sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M})+sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M}))=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(v)+\tilde{f}(u))=v\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,u.$$

Отже, властивість (20) справджується. ■

2.2. Додавання асоціативне:

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}(v\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,w)=(u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v)\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,w. \qquad (21)$$

Формула (17) з врахуванням виразу (19) набуває вигляду

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)+\tilde{f}(v))=sign\,(\tilde{f}(u)+\tilde{f}(v))\cdot M\cdot f^{-1}(\left|\tilde{f}(u)+\tilde{f}(v)\right|)=$$

$$=sign\,(sign\,(u)\cdot f(\frac{|\,u\,|}{M})+sign\,(v)\cdot f(\frac{|\,v\,|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(u)\cdot f(\frac{u}{M})+ \qquad (22)$$

$$+sign\,(v)\cdot f(\frac{v}{M})\,|)\;.$$

Тоді праву частину рівності (21), з врахуванням виразу (22), можемо записати так:

$$(u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v)\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,w=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v)+\tilde{f}(w))=\tilde{f}^{-1}(sign\,(u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v)\cdot f(\frac{|\,u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v\,|}{M})+$$

$$+sign\,(w)\cdot f(\frac{|\,w\,|}{M}))=\tilde{f}^{-1}(sign\,(u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v)\cdot f(\frac{1}{M}\cdot M\cdot\left|f^{-1}(\left|sign\,(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,sign\,(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})\right|\right|)+sign\,(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))=\tilde{f}^{-1}(sign\,(u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v)\cdot\left|sign\,(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+\right.$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})\Big|+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))=sign(sign(u\langle+\rangle_{\tilde f}v)\cdot\Big|sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})\Big|+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(\Big|sign(u\langle+\rangle_{\tilde f}v)\cdot\Big|sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})\Big|+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\,|)=sign(sign(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M}))\cdot\Big|sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})\Big|+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))\times$$

$$\times M\cdot f^{-1}(sign(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M}))\cdot\Big|sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})\Big|+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))=sign(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(\Big|sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\Big|)\,. \qquad (23)$$

Тепер розглянемо суму $v\langle+\rangle_{\tilde f}w$. Для неї, за аналогією, виходячи з виразу (17), можемо записати

$$v\langle+\rangle_{\tilde f}w=\tilde f^{-1}(\tilde f(v)+\tilde f(w))=sign(\tilde f(v)+\tilde f(w))\cdot M\cdot f^{-1}(\Big|\tilde f(v)+\tilde f(w)\Big|)=$$

$$=sign(sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+$$

$$+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\,|)\,.$$

Підставляючи отримані вирази в ліву частину рівності (19), матимемо

$$u\langle+\rangle_{\tilde f}(v\langle+\rangle_{\tilde f}w)=\tilde f^{-1}(\tilde f(u)+\tilde f(v\langle+\rangle_{\tilde f}w))=\tilde f^{-1}(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v\langle+\rangle_{\tilde f}w)\cdot f(\frac{|v\langle+\rangle_{\tilde f}w|}{M}))=\tilde f^{-1}(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v\langle+\rangle_{\tilde f}w)\cdot f(\frac{1}{M}\cdot M\cdot\left|f^{-1}(\left|sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\right|)\right|))=$$

$$=\tilde f^{-1}(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(v\langle+\rangle_{\tilde f}w)\cdot\Big|sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\Big|)=$$

$$=sign(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(v\langle+\rangle_{\tilde f}w)\cdot\Big|sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\Big|)\cdot M\times$$

$$\times f^{-1}(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(v\langle+\rangle_{\tilde f}w)\cdot\Big|sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\Big|)=$$

$$=sign(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))\cdot\Big|sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+$$

$$+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\Big|)\cdot M\cdot f^{-1}(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+sign(sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\times$$

$$\times f(\frac{|w|}{M}))\cdot \left|sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\right|) = sign(sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+$$

$$+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M}))\cdot M\cdot f^{-1}(\left|sign(u)\cdot f(\frac{|u|}{M})+\right. \quad (24)$$

$$\left.+sign(v)\cdot f(\frac{|v|}{M})+sign(w)\cdot f(\frac{|w|}{M})\right|).$$

З порівняння отриманих виразів (23) і (24) випливає їх рівність, а значить і справедливість властивості (21). ■

2.3. У множині E існує однозначно визначений нульовий елемент e, такий, що $u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\, e=u$ для кожного елемента u.

Таким елементом є $e=0$. Для нього отримуємо

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\, e=u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\, 0=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)+\tilde{f}(0))=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u))=u\,.\ ■$$

2.4. Кожному елементу u в множині E відповідає однозначно визначений протилежний елемент $\overline{u}$, такий, що $u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,\overline{u}=e$, де $e=0$. Таким елементом є $\overline{u}=-u$. Для нього, враховуючи властивість (18), отримуємо

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,\overline{u}=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)+\tilde{f}(\overline{u}))=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)+\tilde{f}(-u))=$$

$$=\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u)-\tilde{f}(u))=\tilde{f}^{-1}(0)=0=e\,.\ ■$$

Отже, $G_{\tilde{f}}=(E;\langle+\rangle_{f})$ є адитивною абелевою групою. ■

Зазначимо, що функція додавання (17), якщо $M=1$, може використовуватися як основа конструювання балансних норм [20–21] та уніnorm [11, 16, 27], а також функції агрегації у біполярному масштабі [17–19, 22].

Враховуючи описану вище теорему, перейдемо до конструювання методу отримання явного виразу операції множення вектора на скаляр.

3. Конструювання операції множення вектора на скаляр. Для відшукання явного виразу операції множення вектора на скаляр, яка би відображала властивості наперед заданої нелінійні функції, звернемося до рівняння Коші 1821 р. [13]:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,. \quad (25)$$

З нього за індукцією маємо [9]

$$f(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$$

для усіх додатних $x_1, x_2, ..., x_n$ та для усіх натуральних n. Тоді, покладаючи $x_1=x_2=...=x_n=x$, отримуємо

$$f(n\cdot x)=n\cdot f(x)\,,$$

звідки

$$n\cdot x=f^{-1}(n\cdot f(x))\,. \quad (26)$$

До аналогічного рівняння (26) можна прийти і з аналізу виразу (16). Отриманий вираз (26) є основою конструювання явного виразу операції множення вектора на скаляр. Доведемо таку теорему.

Теорема 2. Нехай задане поле дійсних чисел $(R;+,\cdot)$ та адитивна абелева група $G_{\tilde{f}}=(E;\langle+\rangle_{\tilde{f}})$ з $E=(-M,M)$, $M>0$, і операцією додавання $\langle+\rangle_{\tilde{f}}$ (17).

Тоді операція відображення $R\langle\times\rangle_{\tilde{f}} E \to E : (\alpha, u) \to \alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u$ для довільного $\alpha \in R$ і для довільного $u \in E$, яка описується виразом

$$\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u \overset{def}{=} \tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot \tilde{f}(u)), \qquad (27)$$

(де $\tilde{f}(u) = sign(u) \cdot f(|u|/M)$ є строго зростаючою неперервною бієкцією, а $\tilde{f}^{-1}$ – обернена до $\tilde{f}$ функція, причому $f[0,1] \to [0,+\infty]$ з $f(0)=0$), є операцією множення вектора на скаляр, а множина E безпосередньо є векторним простором над полем дійсних чисел R з ізоморфізмом

$$\varphi_{\tilde{f}}(u) = M \cdot \tilde{f}(u). \qquad (28)$$

Доведення. Оскільки кожній парі α, u, де α – скаляр, а u – елемент множини E (вектор), має відповідати елемент $\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u$, який називається добутком скаляра α на вектор u (27), то покажемо, що ця операція множення вектора на скаляр для довільних елементів u та v з множини E і для довільних дійсних чисел $\alpha, \beta \in R$ задовольняє таким аксіомам:

– множення на скаляр дистрибутивне відносно додавання векторів;
– множення на скаляри дистрибутивне відносно додавання скалярів;
– множення на скаляри асоціативне;
– $1\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u = u$.

3.1. Множення векторів на скаляр дистрибутивне відносно додавання векторів:

$$\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} (u\langle+\rangle_{\tilde{f}} v) = (\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u)\langle+\rangle_{\tilde{f}} (\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} v). \qquad (29)$$

Розглянемо виконання операції $\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} (u\langle+\rangle_{\tilde{f}} v)$. Враховуючи вирази (27) та (17), можемо записати

$$\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} (u\langle+\rangle_{\tilde{f}} v) = \tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)))) = \tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot (\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))) =$$
$$= sign(\alpha \cdot (\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))) \cdot M \cdot f^{-1}(|\alpha \cdot (\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))|) =$$
$$= sign(\alpha \cdot (sign(u) \cdot f(|u|) + sign(v) \cdot f(|v|))) \cdot M \times$$
$$\times f^{-1}(|\alpha \cdot (sign(u) \cdot f(|u|) + sign(v) \cdot f(|v|))|). \qquad (30)$$

З другого боку

$$(\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u)\langle+\rangle_{\tilde{f}} (\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} v) = (\tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot \tilde{f}(u)))\langle+\rangle_{\tilde{f}} (\tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot \tilde{f}(v))) =$$
$$= \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot f(u))) + \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot f(v)))) = \tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot (\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))) =$$
$$= sign(\alpha \cdot (sign(u) \cdot f(|u|) + sign(v) \cdot f(|v|))) \cdot M \times$$
$$\times f^{-1}(|\alpha \cdot (sign(u) \cdot f(|u|) + sign(v) \cdot f(|v|))|). \qquad (31)$$

З порівняння виразів (30) та (31) випливає їх рівність. Отже, властивість (29) справджується. ■

3.2. Множення вектора на скаляри дистрибутивне відносно додавання скалярів:

$$(\alpha + \beta)\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u = (\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u)\langle+\rangle_{\tilde{f}} (\beta\langle\times\rangle_{\tilde{f}} u). \qquad (32)$$

З виразу (27) отримуємо

$$(\alpha+\beta)\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u = \tilde f^{-1}((\alpha+\beta)\cdot \tilde f(u)) = sign\,((\alpha+\beta)\cdot \tilde f(u))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,(\alpha+\beta)\cdot \tilde f(u)\,|) =$$

$$= sign\,((\alpha+\beta)\cdot sign(u)\cdot f(|\,u\,|/M))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,(\alpha+\beta)\cdot sign(u)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) =$$

$$= sign\,((\alpha+\beta)\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\,(\alpha+\beta)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|)\,. \qquad (33)$$

Нехай

$$u_\alpha = \alpha\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u = \tilde f^{-1}(\alpha\cdot \tilde f(u)) = \tilde f^{-1}(\alpha\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)) =$$

$$= sign\,(\alpha\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,\alpha\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) =$$

$$= sign\,(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\,\alpha\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,, \qquad (34)$$

$$u_\beta = \beta\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u = \tilde f^{-1}(\beta\cdot \tilde f(u)) = \tilde f^{-1}(\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)) =$$

$$= sign\,(\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) =$$

$$= sign\,(\beta\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,, \qquad (35)$$

Тоді, підставляючи вирази (34) і (35) в праву частину рівності (32), маємо

$$(\alpha\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u)\langle+\rangle(\beta\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u) = u_\alpha\langle+\rangle_{\tilde f}\, u_\beta = \tilde f^{-1}(\tilde f(u_\alpha)+\tilde f(u_\beta)) = \tilde f^{-1}(sign\,(u_\alpha)\times$$

$$\times f(|\,u_\alpha\,|/M) + sign\,(u_\beta)\cdot f(|\,u_\beta\,|/M)) = sign\,(sign\,(u_\alpha)\cdot f(|\,u_\alpha\,|/M)+$$

$$+sign\,(u_\beta)\cdot f(|\,u_\beta\,|/M))\times M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(u_\alpha)\cdot f(|\,u_\alpha\,|/M)+$$

$$+sign\,(u_\beta)\cdot f(|\,u_\beta\,|/M)\,|) = sign\,(\,sign\,(\alpha\cdot u)\cdot f(|\,M\times$$

$$\times f^{-1}(|\,\alpha\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|/M) + sign\,(\beta\cdot u)\cdot f(|\,M\cdot f^{-1}(|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|/M))\times$$

$$\times M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(\alpha\cdot u)\cdot f(|\,M\cdot f^{-1}(|\,\alpha\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|/M) + sign\,(\beta\cdot u)\times$$

$$\times f(|\,M\cdot f^{-1}(|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|/M)\,|) = sign\,(\,sign\,(\alpha\cdot u)\cdot f(|\,f^{-1}(|\,\alpha\,|\times$$

$$\times f(|\,u\,|/M))\,|) + sign\,(\beta\cdot u)\cdot f(|\,f^{-1}(|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|))\times$$

$$\times M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(\alpha\cdot u)\cdot f(|\,f^{-1}(|\,\alpha\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|) + sign\,(\beta\cdot u)\times$$

$$\times f(|\,f^{-1}(|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\,|)\,|) = sign\,(\,sign\,(\alpha\cdot u)\cdot|\,\alpha\,|\cdot f(|\,u\,|/M)+$$

$$+sign\,(\beta\cdot u)\cdot|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,sign\,(\alpha\cdot u)\cdot|\,\alpha\,|\cdot f(|\,u\,|/M)+$$

$$+sign\,(\beta\cdot u)\cdot|\,\beta\,|\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) = sign\,(\,(\alpha+\beta)\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M))\cdot M\times$$

$$\times f^{-1}(|\,\alpha\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M) + \beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) =$$

$$= sign\,(\,(\alpha+\beta)\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\,(\alpha+\beta)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|)\,. \qquad (36)$$

З порівняння виразів (33) та (36) випливає їх рівність. Отже, властивість (32) справджується. ■

3.3. Множення вектора на скаляри асоціативне:

$$(\alpha\cdot\beta)\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u = \alpha\langle\times\rangle_{\tilde f}\,(\beta\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u)\,. \qquad (37)$$

З виразу (27) отримуємо

$$(\alpha\cdot\beta)\langle\times\rangle_{\tilde f}\, u = \tilde f^{-1}(\alpha\cdot\beta\cdot \tilde f(u)) = \tilde f^{-1}(\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)) =$$

$$= sign\,(\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M))\cdot M\cdot f^{-1}(|\,\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) =$$

$$= sign\,(\alpha\cdot\beta\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\,\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|\,u\,|/M)\,|) =$$

$$= sign\,(\alpha\cdot\beta\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\alpha\cdot\beta|\cdot f(|u|/M))\,. \qquad (38)$$

Для правої частини формули (37) можемо записати

$$\alpha\langle\times\rangle_{\tilde f}(\beta\langle\times\rangle_{\tilde f}u)=\alpha\langle\times\rangle_{\tilde f}u_\beta=\tilde f^{-1}(\alpha\cdot\tilde f(\tilde f^{-1}(\beta\cdot\tilde f(u))))=$$

$$=\tilde f^{-1}(\alpha\cdot\beta\cdot\tilde f(u))=\tilde f^{-1}(\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|u|/M))=$$

$$= sign\,(\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|u|/M))\cdot M\cdot f^{-1}(|\alpha\cdot\beta\cdot sign\,(u)\cdot f(|u|/M)|)=$$

$$= sign\,(\alpha\cdot\beta\cdot u)\cdot M\cdot f^{-1}(|\alpha\cdot\beta|\cdot f(|u|/M))\,. \qquad (39)$$

З порівняння виразів (38) та (39) випливає їх рівність. Отже, властивість (37) справджується. ■

3.4. $1\langle\times\rangle_{\tilde f}u=u$.

$$1\langle\times\rangle_{\tilde f}u=\tilde f^{-1}(1\cdot\tilde f(u))=\tilde f^{-1}(\tilde f(u))=u\,. \ ■$$

З виразу (27) випливає також, що результат множення скаляра α на вектор u завжди належить множині E , незалежно від знаків α та u .

Отже, властивості абелевої групи $G_{\tilde f}=(E;\langle+\rangle_f)$ з операцією додавання векторів $\langle+\rangle_f$ (17), а також операцією множення вектора на скаляр $\langle\times\rangle_f$ (27) підтверджують, що множина елементів (векторів) E над полем скалярів R утворює дійсний векторний простір. ■

3.5. Фундаментальний ізоморфізм. Побудованій векторній структурі властивий ізоморфізм (28), який однозначно відображає елементи простору E у простір дійсних чисел R через нелінійну функцію $\varphi_{\tilde f}:E\to R$:

$$\varphi_{\tilde f}:u\to\varphi_{\tilde f}(u)=M\cdot\tilde f(u)\,. \qquad (40)$$

Ізоморфізм $\varphi_{\tilde f}$ (40) верифікується такими властивостями:

а) $\forall u,\ v\in E$

$$\varphi_{\tilde f}(u\langle\times\rangle_{\tilde f}v)=\varphi_{\tilde f}(u)+\varphi_{\tilde f}(v)\,. \qquad (41)$$

Розглянемо праву частину виразу (41). З врахуванням формули (28) вона набуде такого вигляду:

$$\varphi_{\tilde f}(u)+\varphi_{\tilde f}(v)=M\cdot\tilde f(u)+M\cdot\tilde f(v)=$$

$$=M\cdot(\tilde f(u)+\tilde f(v))=M\cdot(sign\,(u)\cdot f(|u|/M)+sign\,(v)\cdot f(|v|/M))\,. \qquad (42)$$

Розглянемо тепер ліву частину виразу (41). З врахуванням формули (17) вона набуде вигляду

$$\varphi_{\tilde f}(u\langle\times\rangle_{\tilde f}v)=M\cdot\tilde f(\tilde f^{-1}(\tilde f(u)+\tilde f(v)))=$$

$$=M\cdot(\tilde f(u)+\tilde f(v))=M\cdot(sign\,(u)\cdot f(|u|/M)+sign\,(v)\cdot f(|v|/M))\,. \qquad (43)$$

З порівняння виразів (42) та (43) випливає їх рівність. Отже, властивість (41) справджується. ■

б) $\forall u\in E$ і $\lambda\in R$

$$\varphi_{\tilde f}(\lambda\langle\times\rangle_{\tilde f}u)=\lambda\cdot\varphi_{\tilde f}(u)\,. \qquad (44)$$

Для правої частини виразу (44) з врахуванням формули (28) можемо записати

$$\lambda \cdot \varphi_{\tilde{f}}(u) = \lambda \cdot M \cdot \tilde{f}(u) = \lambda \cdot M \cdot sign(u) \cdot f(|u|/M). \qquad (45)$$

Враховуючи, що $\lambda\langle\times\rangle_{\tilde{f}}(u) = \tilde{f}^{-1}(\lambda \cdot \tilde{f}(u))$, можемо подати ліву частину виразу (44) так:

$$\varphi_{\tilde{f}}(\lambda\langle\times\rangle_{\tilde{f}}u) = M \cdot \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(\lambda \cdot \tilde{f}(u))) = \lambda \cdot M \cdot \tilde{f}(u) = \lambda \cdot M \cdot sign(u) \cdot f(|u|/M). \qquad (46)$$

Оскільки отримані вирази (45) та (46) однакові, то властивість (44) справджується. ■

Отже, всі чотири аксіоми додавання та чотири аксіоми множення справджуються. В цілому доведені теореми засвідчують можливість конструювання алгебр за запропонованим підходом. Використовуючи наперед задану нелінійну функцію *f*, вимоги до якої викладені у доведених вище теоремах, можемо конструювати алгебру з двома бінарними операціями додавання та множення на скаляр, явний вираз яких задається формулами (17) та (27). Розглянемо побудовані за запропонованим підходом алгебри.

4. Деякі алгебри логарифмічного типу. Для конструювання алгебр розглянемо їх побудову, виходячи із задання адитивного генератора $\tilde{f}(u)$ через різні функції.

4.1. Розглянемо за адитивний генератор функцію $\tilde{f}(u) = -sign\,(u) \cdot \ln(1 - |u|/M)$. Тоді $\forall u, v \in E$, де $E = (-M, M)$ і $M > 0$, після підставлення виразу для $\tilde{f}$ та оберненої до неї функції $\tilde{f}^{-1}$ у формулу (17) отримаємо вираз для операції додавання $u\langle+\rangle_1 v$, який відповідає формулі (1). Аналогічно після того, як підставити $\tilde{f}$ та $\tilde{f}^{-1}$ у вираз (27), отримаємо явний вираз операції множення вектора на скаляр $\alpha\langle\times\rangle_1 u$, який відповідає формулі (2).

4.2. Розглянемо за адитивний генератор функцію $\tilde{f}(u) = sign\,(u) \cdot (-\ln(1 - |u|/M))^{\eta}$, де $\eta > 0$. Тоді з формули (17) отримуємо такий вираз для операції додавання:

$$u\langle+\rangle_f v = sign\,(u+v) \cdot ((1-k) \cdot M \cdot (1 - \exp(-((-\ln(1-|u|/M))^{\eta} +$$
$$+(-\ln(1-|v|/M))^{\eta})^{1/\eta})) + k \cdot M \cdot (1 - \exp(-\Big|(-\ln(1-|u|/M))^{\eta} -$$
$$-(-\ln(1-|v|/M))^{\eta}\Big|^{1/\eta}))),$$

де $k = 0{,}5 \cdot |sign\,(u) - sign\,(v)| \cdot sign\,(u \cdot v)$ (аналогічно до параметра k формули (7)), а з формули (27) – такий вираз для операції множення: $\forall \alpha \in R$

$$\alpha\langle\times\rangle_f u = sign(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot (1 - (1-|u|/M)^{|\alpha|^{1/\eta}}).$$

4.3. Розглянемо за адитивний генератор функцію $\tilde{f}(u) = -sign\,(u) \cdot \frac{1}{2}\ln(\frac{M+|u|}{M-|u|})$.

Для цього генератора з виразів (17) та (27) отримаємо формули $u\langle+\rangle_2 v$ (4) та $\alpha\langle\times\rangle_2 u$ (5) операцій алгебри Патраску. Зазначимо, що для виразу (5), який позначимо як $q(\alpha, u)$, справджується така властивість:

$$q(\alpha, u) = sign\,(\alpha \cdot u) \cdot q(|\alpha|, |u|).$$

4.4. Розглянемо за адитивний генератор функцію $\tilde{f}(u) = -sign\,(u) \times$

$\times\frac{1}{p}\ln(\frac{M-|u|}{M+(p-1)\cdot|u|})$. Для цього генератора з виразів (17) та (27) отримуємо формули $u\langle+\rangle_p v$ (7) та $\alpha\langle\times\rangle_p u$ (8) операцій узагальненої параметричної алгебри [3].

4.5. Розглянемо за адитивний генератор функцію $\tilde{f}(u)=sign\,(u)\cdot((1-$ $-\ln(1-|u|/M))^{\mu}-1)$, де $\mu>0$. Тоді з формули (17) отримуємо такий вираз для операції додавання:

$$u\langle+\rangle_{\tilde{f}}\,v = sign\,(u+v)\times$$
$$\times((1-k)\cdot M\cdot(1-\exp(-((1-\ln(1-|u|/M))^{\mu}+(1-\ln(1-|v|/M))^{\mu}-1)^{1/\mu}))+$$
$$+k\cdot M\cdot(1-\exp(1-(1+\left|(1-\ln(1-|u|/M))^{\mu}-(1-\ln(1-|v|/M))^{\mu}\right|)^{1/\mu}))),$$

а з формули (27) такий вираз для операції множення: $\forall\alpha\in R$

$$\alpha\langle\times\rangle_{\tilde{f}}\,u = sign\,(\alpha\cdot u)\cdot M\cdot(1-\exp(1-(1+|\alpha|\cdot((1-\ln(1-|u|/M))^{\eta}-1))^{|\alpha|^{1/\mu}})).$$

Наведені приклади побудованих алгебр мають спільною рисою те, що в основі їх генераторів виступають функції логарифмічного типу з інверсним аргументом.

ВИСНОВКИ

Використання адитивного генератора трикутних норм як складової більш загальної функції-генератора, аргумент та значення якої є не тільки додатними, але і від'ємними, дало змогу побудувати метод конструювання алгебр з двома бінарними операціями типу $\langle 2,2\rangle$ та знайти явні вирази операцій додавання і множення на скаляр. Так побудована алгебраїчна структура є водночас структурою векторного простору над полем дійсних чисел і має завдяки цьому ширші функціональні можливості через оперування як з додатними, так і від'ємними числами для елементів (векторів) множини E та для значень скаляра, які належать до дійсних чисел. Використання різних функцій логарифмічного типу з інверсним аргументом для побудови генератора $\tilde{f}(u)$ дає можливість отримати новий математичний апарат для моделювання середовищ та систем з різними властивостями.

Автор висловлює вдячність канд. техн. наук К. В. Сущику та канд. техн. наук О. Р. Берегуляк за цінні дискусії та зауваження.

1. *Воробель Р. А.* Алгебраїчна модель логарифмічної обробки зображень // Пр. XVI Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". – Львів: Вид. ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. – С. 58–59.
2. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. Ч. 1: Базова модель // Відбір і обробка інформації. – 2009. – 31(107). – С. 26–35.
3. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. Ч. 2: Узагальнена модель // Відбір і обробка інформації. – 2009. – 31(107). – С. 36–46.
4. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука. – 1970. – 392 с.
5. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер. 2004. – 302 с.
6. *Райков Д. А.* Векторные пространства. – М.: Физматлит. – 1962. – 212 с.
7. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. – М.: Физматлит, 1963. – 264 с.
8. *Abel N. H.* Untersuchungen der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen *x* und *y* wie *f*(*x*,*y*), welche die Eigenschaft haben, daß *f* (*z*, *f* (*x*,*y*)) eine symmetrische Function von *x*, *y* und *z* ist. // J. Reine Angew. Math., 1 (1826), 11–15 (Oeuvres completes de N.H. Abel, v. 1, Christiania (1881), 61–65).
9. *Aczél J.* On Applications and Theory of Functional Equations. – Birkhäuser Verlag. Basel, 1969, 64 p.
10. *Aczél J.* Sur les opérations définis pour nombres réels.– France: Bull. Soc. Math., 1949. – **76**. – P. 59–64.

11. *Alsina C., Frank M. J., Schweizer B.* Associative Functions. Triangular Norms and Copulas // World Scientific Publishing Co. – New Jersey, London, Singapore, 2006. – 237 p.
12. *Bouger P.* Traite d'Optique sur la Gradation de la Lumière // I'Abbé de Lacaille. – Paris, 1760.
13. *Cauchy A. L.* Cours d'analyse de I'École Polytechnique, Vol. 1. Analyse algébrique. Chap. V. Paris 1821 (Œuvres, Ser. 2, Vol. 3, Paris 1897, pp. 98-113, 220).
14. *Courbebaisse G., Trunde F., Jourlin M*. Wavelet transform and LIP model // Image Analysis and Stereology. – 2002. – **21**. – P. 121–125.
15. *Fechner G. T*. Elemente der Psychophysik. – 1. Leipzig, 1860.
16. *Fodor J. C., Yager R., Rybalov A.* Structure of uninorms. International Journal of Uncertainty // Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 1997. – **5**. – P. 411–427.
17. *Grabisch M*. Aggregation on bipolar scales / Eds. Harrie C.M. de Swart, Ewa Orlowska, Gunther Schmidt, Marc Roubens // Theory and Application of Relational Structures as Knowledge Instruments II. – Springer, 2006. – P. 355–371.
18. *Grabisch M., De Baets B., Fodor J.* The Quest for Ring on Bipolar Scales // Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. – 2004. – **12**. – P. 499–512.
19. *Grabisch M., Marichal J.-L., Mesiar R., Pap E.* Aggregation Functions. Cambridge. – Cambridge University Press, 2009. – 460 p.
20. *Homenda W.* Triangular norms, uni- and nullnorms, balanced norms: the cases of the hierarchy of iterative operators / Eds. E. P. Klement, R. Mesiar // 24th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory. Abstracts. February 4–8, 2003. – Linz, 2003. – P. 27–35.
21. *Homenda W.* Balanced fuzzy sets // Information Sciences. – 2006. – **176**.– P. 2467–2506.
22. *Jenei S.* On the relationship between the rotation construction and ordered Abelian groups // Fuzzy Sets and Systems. – 2010. – **161**. – P. 277–284 (doi: 10.1016/j.fss.2009.05.005).
23. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Département de Mathématiques. – Université de Saint-Etienne, Décembre 1985. – № 3.
24. *Jourlin M., Pinoli J.-C*. A model for logarithmic image processing // J. Microscopy. – 1988. – **149**, Pt. 1. – P. 21–35.
25. *Jourlin M., Pinoli J.-C*. Image dynamic range enhancement and stabilization in the context of the logarithmic image processing model // Signal Processing. – 1995. – **41**, № 2. – P. 225–237.
26. *Jourlin M., Pinoli J.-C*. Logarithmic image processing // Advances in Imaging and Electron Physics. – 2001. – **115**. – P. 129–196.
27. *Klement E. P., Mesiar R., Pap E*. Triangular Norms. – Dordrecht: Kluwer AP. – 2000. – 385 p.
28. *Kolmogorov A. N.* On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition // Amer. Math. Soc. Transl. 1963. – **28**. – P. 55–59.
29. *Ling C.-H.* Representation of associative functions // Publicationes Mathematicae. – Institutum Mathematicum Universitatio Debreceniensis, 1965. – **12**. – P. 189–212.
30. *Menger K.* Statistical metrics // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1942. – **8**. – P. 535–537.
31. *Oppenheim A. V.* Superposition in a class of non-linear system // Technical Report 432. Research Laboratory of Electronics. M. I. T. – Cambridge Ma., 1965. – 62 p.
32. *Oppenheim A. V.* Generalized superposition // Information and Control. – 1967. – **11**, № 5&6. – P. 528–536.
33. *Pătraşcu V., Buzuloiu V.* The Affine Transforms for Image Enhancement in the Context of Logarithmic Models // Proc. Int. Conf. on Computer Vision and Graphics, ICCVG 2002, September 25–29, 2002. – Poland: Zakopane, **2**. – P. 596–601.
34. *Pătraşcu V.* Gray Level image Enhancement Method Using the Logarithmic Model // Acta Tehnica Napocensis, Electronics and Telecommunications. – Romania: Cluj-Napoca, 2003. – **43**, № 2. – P. 39–50.
35. *Pinoli J.-C.* A general comparative study of the multiplicative homomorfic, log-ratio and logarithmic image processing approaches // Signal Processing. – 1997. – **58**, № 1. – P. 11–45.
36. *Pinoli J.-C.* The logarithmic image processing model: connection with human brightness perception and contrast estimators // J. Math. Imaging and Vision. – 1997. – **7**. – P. 341–358.
37. *Pinoli J. C., Debayle J.* Logarithmic adaptive neighborhood image processing (LANIP): introduction, connections to brightness perception, and application issues // EURASIP J. Advances in Signal Processing. – 2007. – Vol. 2007, Article ID 36105 (doi: 10.1155/2007/36105, 22 p.).
38. *Sierpiński W.* Algèbre des ensembles // Monografie Mat. – Warszawa–Wrocław, 1951. – **23**.
39. *Weber E. H.* Der tastsinn und das gemeingefiihl / Ed. E. Wagner // Handwörterbuch der Physiologie. – 1846. – **3**. – P. 481–588.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
10.03.2010

КОРЕКЦІЯ

Виправлення до статті збірника “Відбір і обробка інформації”, № 32(108).
Воробель Р. А. Конструювання алгебр логарифмічног типу.
ISSN 0474-8662. Відбір і обробка інформ. 2010. Вип. 32 (108), сторінка 140.

Надруковано:

$$\varphi_{\tilde{f}}(u\langle\times\rangle_{\tilde{f}} v) = \varphi_{\tilde{f}}(u) + \varphi_{\tilde{f}}(v) . \qquad (41)$$

$$\varphi_{\tilde{f}}(u\langle\times\rangle_{\tilde{f}} v) = M \cdot \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))) =$$

$$= M \cdot (\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)) = M \cdot (sign\,(u) \cdot f(|u|/M) + sign\,(v) \cdot f(|v|/M)) . \qquad (43)$$

Правильно:

$$\varphi_{\tilde{f}}(u\langle+\rangle_{\tilde{f}} v) = \varphi_{\tilde{f}}(u) + \varphi_{\tilde{f}}(v) . \qquad (41)$$

$$\varphi_{\tilde{f}}(u\langle+\rangle_{\tilde{f}} v) = M \cdot \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))) =$$

$$= M \cdot (\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v)) = M \cdot (sign\,(u) \cdot f(|u|/M) + sign\,(v) \cdot f(|v|/M)) . \qquad (43)$$