

УДК 519.6, 550.8

**М.Л. МИРОНЦОВ**

## **ПОХИБКА ТА ЕКВІВАЛЕНТНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОМЕТРІЇ СВЕРДЛОВИН**

***Анотація.** Розглянуто питання зв'язку похибки каротажу з похибкою розв'язання оберненої задачі. Описано спосіб визначення похибки оберненої задачі в залежності від похибки каротажу для заданої моделі пласта. Наведено приклади визначення похибки оберненої задачі для реального свердловинного матеріалу.*

***Ключові слова:** обернена задача, еквівалентні розв'язки, каротаж, електрометрія свердловин, геофізичне дослідження свердловин.*

### **Вступ**

Математика як наука виникла у зв'язку з необхідністю вирішення практичних завдань: вимірювання на місцевості, навігації, торгівлі. Тому вона була в першу чергу числовою наукою. Її метою було отримання розв'язку у вигляді конкретного числа. Але майже будь-який числовий розв'язок передбачає похибку. Що ж тоді розуміти під точним числовим розв'язком?

Розглянемо питання визначення числового значення ірраціонального числа  $\pi$ . Цілком очевидно, що ми не можемо його записати в явному вигляді повністю. Ми можемо записати тільки якусь його округлену частину. Але чи означає це, що задача обчислення його значення не має точного числового розв'язку і будь-який її розв'язок буде отримано з похибкою?

Якщо питання похибки виникає в такому простому прикладі, його не можна не розглядати в задачах, які мають практичну спрямованість. Особливо якщо врахувати, що ГДС є однією з найбільш числових областей науки у буквальному розумінні цього слова: замовника геофізичних послуг цікавлять числа, а саме цифра кількості можливого корисного флюїду і цифра можливої швидкості його видобутку у конкретній свердловині.

Природно, що всі дані, одержані неточно, але необхідні для розрахунку цих двох чисел, вносять свою похибку в загальний результат. Таким чином, для розуміння підсумкової похибки остаточного результату нам необхідно проаналізувати, на якому етапі вирішення задачі яка похибка виникає і як вона впливає на остаточний результат.

Також нам необхідно визначитися, що ж все-таки слід розуміти під точним числовим розв'язком.

Виникнення похибки розв'язання оберненої задачі може бути обумовлене, наприклад, наступними причинами:

- 1) її математичний опис є неточним, зокрема неадекватно або неточно описана сама модель чи її параметри тощо;
- 2) метод, що застосовується для її вирішення, не є точним;
- 3) при введенні даних в ЕОМ, при виконанні арифметичних операцій і при виведенні даних здійснюється округлення.

Похибки, що відповідають цим причинам, називають:

- 1) неусувною похибкою,
- 2) похибкою методу,
- 3) обчислювальною похибкою.

Чи означає наявність однієї або декількох таких похибок неможливість точного числового розв'язання?

Для початку наведемо в якості ілюстрації приклад ЕК. Розглянемо числове моделювання лабораторного експерименту визначення коефіцієнта зонда в електролітичній ванні. Рівняння, яке описує розподіл потенціалу (рівняння Лапласа):

$$\Delta U = 0.$$

Похибка моделі відразу закладена у самому рівнянні: ми припускаємо, що середовище є однорідним, що є наближенням (ідеально однорідних середовищ не існує).

Більш того, так як на практиці в зондах ЕК не використовується суворо постійний струм (частота генератора коливається, як правило, від десятків до сотень Гц), то розв'язок задачі вже набуває неусувної похибки на стадії вибору моделі постійного струму, бо при ненульовій частоті струму між поверхнею електрода і середовищем виникає електрохімічна різниця потенціалів, вплив якої можна спрощено представити у вигляді наявності ємності  $C_0$ , включеної послідовно з опором  $R_0$  (рис. 1).

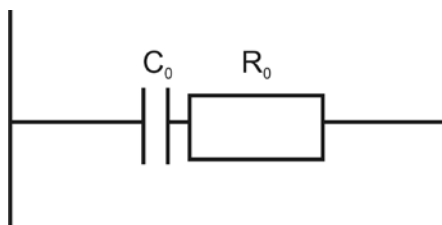


Рисунок 1 – Зміна характеру контактного опору на границі електрод-свердловина

Інше джерело похибки міститься в неможливості абсолютно точно задати числові значення геометричних параметрів моделі. Тобто навіть врахувавши реальну частоту струму і реальну неоднорідність середовища, ми не можемо абсолютно точно описати геометрію експерименту.

Сама назва цієї похибки «неусувна» відповідає її суті: вона неконтрольована в процесі числового розв'язання задачі і може зменшитись тільки за рахунок більш точного опису фізичної задачі, математичного її опису чи більш точного визначення її параметрів, а не за рахунок вибору параметрів алгоритму моделювання.

Але рівняння Лапласа, крім усього іншого, для заданих «точно» реальних умов все одно не розв'язується в явному вигляді: для його вирішення потрібно застосування числового методу. І тут знов виникає

похибка – обчислювальна. Наприклад, через необхідне обмеження кількості розрядів чисел, що беруть участь в обчисленнях (див. приклад з числом  $\pi$ ).

Отже, наша похибка буде сумою непереборної, похибки методу та обчислювальної.

Часто виникає ситуація, коли замовник геофізичних послуг пред'являє непомірні вимоги до точності результату. Це може бути викликано тим, що у нього вельми перебільшене уявлення про можливості обчислювальної техніки або він не до кінця розуміє, що саме в кінцевому підсумку йому необхідно знати і з якою точністю. Або ж він взагалі не розуміє, що в області числового моделювання при вирішенні реальних прикладних задач не існує «абсолютно точного» розв'язання задачі.

Такі вимоги часто знімаються у процесі:

- більш детального підходу до вивчення завдання в цілому (виявляється, що точність, яка вимагається, є занадто перебільшеною);
- математична модель явища надто груба і вимагати високу розрахункову точність безглуздо;
- параметри моделі не можуть бути визначені з більш високою точністю;
- замовнику взагалі потрібен не кількісний, а якісний результат.

Але припустимо, що наша модель адекватно описує процес. Тобто обрана фізична модель і її параметри вважаються частиною постановки задачі: фактично ми відокремлюємо питання точності методу розв'язання. Отже, ніякої іншої похибки, окрім похибки моделювання, немає.

Чи можна формально говорити тоді про точне розв'язання задачі моделювання?

Під точним числовим розв'язанням оберненої задачі каротажу ми будемо розуміти реалізовану можливість отримати числове значення розв'язку з як завгодно малою, проте наперед заданою величиною похибки для заданої фізичної і геометричної моделі простору, в якому цей процес відбувається.

Використовуючи такий підхід, ми можемо стверджувати, що не тільки задача визначення значення числа  $\pi$  має розв'язок, але й обернена задача ЕК чи ІК (в межах обраної моделі розрізу) може мати розв'язок.

## 1. Розв'язання оберненої задачі з похибкою

Нагадаємо, що електрометрія дає відповідь на два питання [1, 2]:

- скільки вуглеводнів є у розрізі?
- де саме вони в ньому розташовані?

Відповіді на ці питання криються не у значеннях уявних величин зондів різної фізики виміру (електричний каротаж (ЕК), індукційний каротаж (ІК), високочастотне індукційне каротажне ізопараметричне зондування (ВІКІЗ) [3] тощо) чи різної конструкції (нефокусовані, фокусовані, багатозондові тощо), а у визначенні параметрів моделі пласта колектора, яку в умовах Дніпровсько-Донецької западини природно у більшості випадків вважати тришаровою (див. рис. 2) [4].

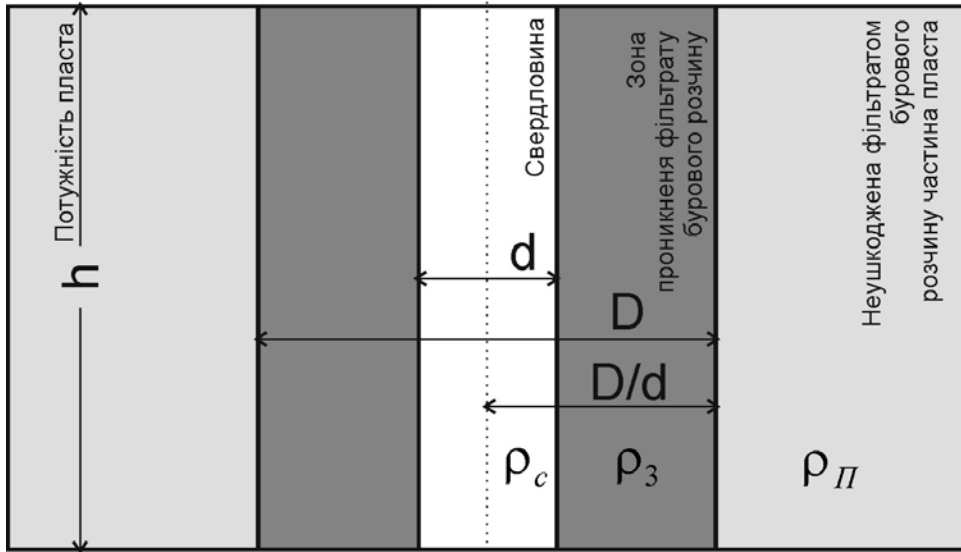


Рисунок 2 – Тришарова модель пласта скінченної потужності

Найпростіший шлях, що взагалі можливо обрати для дослідження впливу похибки в граничних умовах оберненої задачі на її остаточний результат, є знаходження області можливих розв'язків, яка відповідає області можливих значень граничних умов.

Тобто ми не будемо зараз досліджувати, завдяки чому виникла похибка. Ми будемо досліджувати, як її величина впливає на величину похибки розв'язання оберненої задачі.

Перед цим нагадаємо два визначення.

Коректно поставленою (за Адамаром) задачею називається задача, яка задовольняє трьома наступним вимогам:

- задача має розв'язок (вимога існування);
- існуючий розв'язок є єдиним (вимога єдності);
- існуючий та єдиний розв'язок безперервно залежить від вхідних даних (умова неперервності).

Погано обумовленою задачею називається задача, для якої невелика помилка (похибка) в початкових (граничних) даних здатна призвести до значно більшої помилки (похибки) у розв'язку.

Для зручності ми будемо називати погано обумовлену задачу нестійкою (тобто задача може задовольняти умові неперервності, але бути погано обумовленою, тобто нестійкою).

Дослідимо тепер відображення області допустимих значень кожного вектора виміру у простір векторів геоелектричної моделі розрізу. Ми будемо використовувати значення похибок, що відповідають дійсно можливим. Так, одним із можливих способів завдання похибки є [5] (в мСм/м)  $\varepsilon_{JK} = 0,03\tilde{\sigma} \pm 1$ , де  $\tilde{\sigma}$  – значення вимірної уявної провідності.

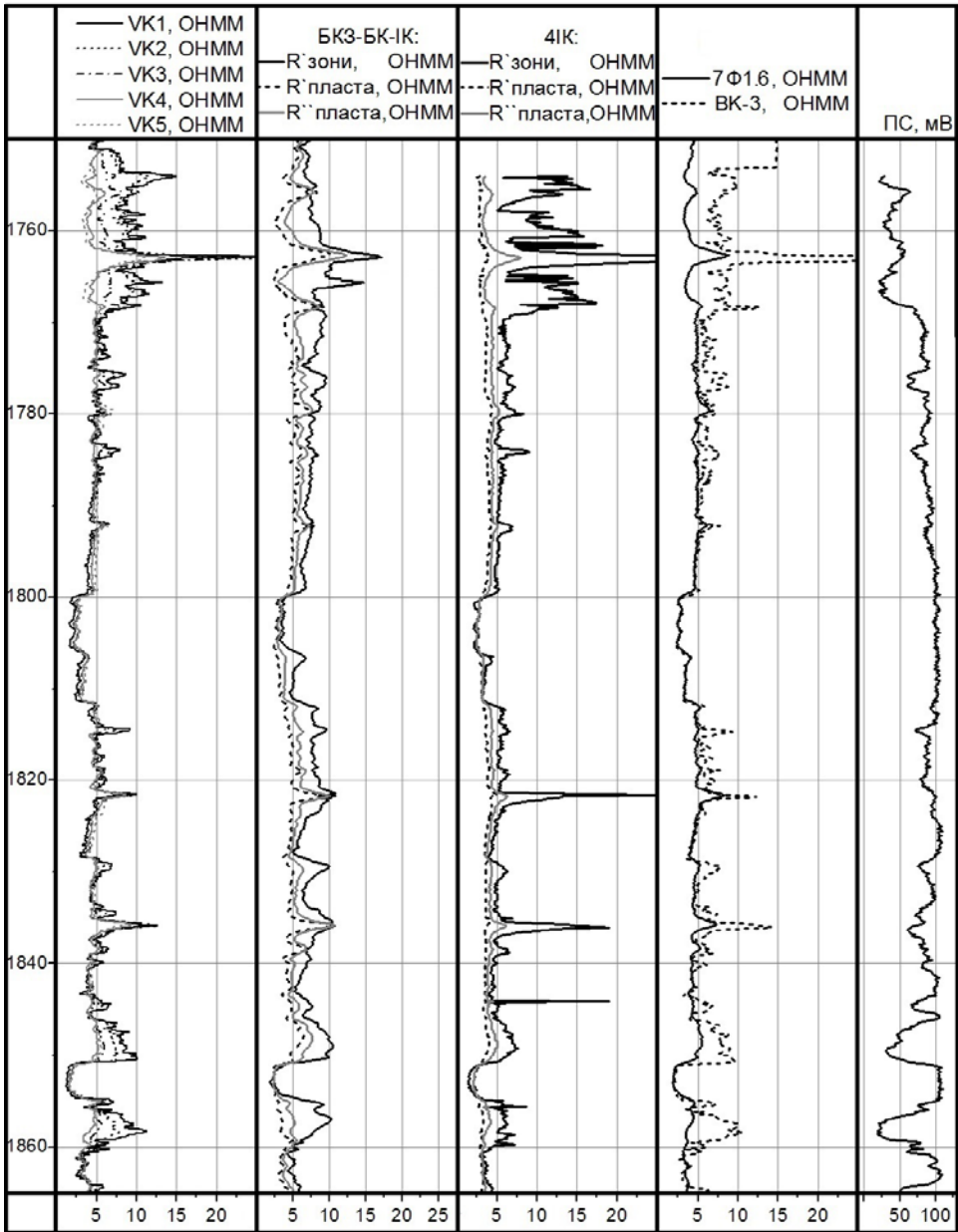


Рисунок 3 – Св. Ватинська (ПО бурового розчину 1.6 Ом·м). Результат розв'язання оберненої задачі для комплексів BK3+BK+IK та 4IK у порівнянні з даними ВКІЗ

Похибку будемо задавати двома шляхами:

– вимір кожного зонда має похибку в межах заданої величини  $\varepsilon$ , тобто вимірювана величина  $\rho$  належить інтервалу:  $(1-\varepsilon)\rho < \rho < (1+\varepsilon)\rho$  (для

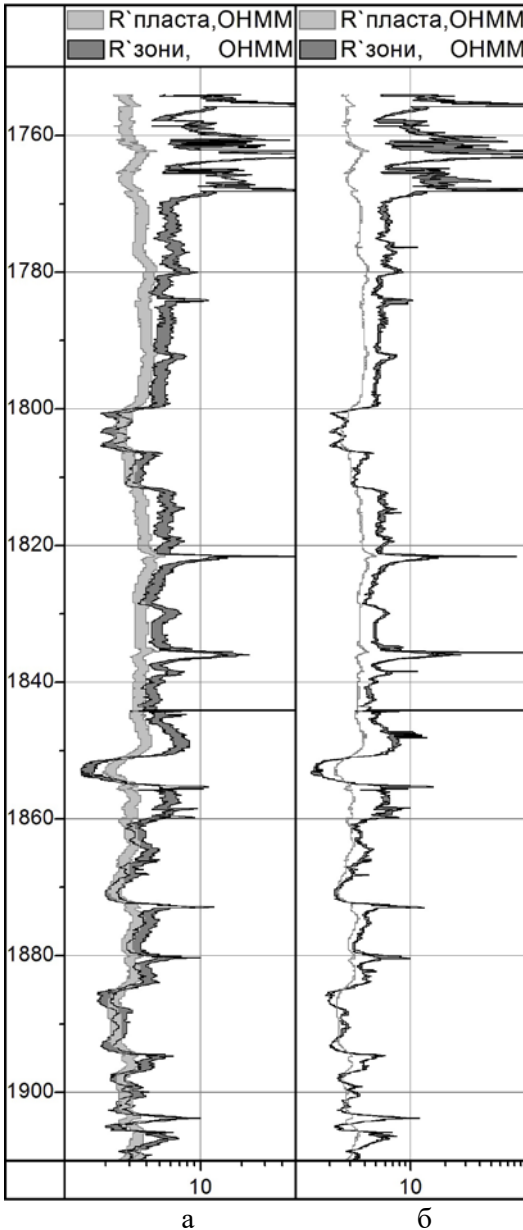


Рисунок 4 – Св. Ватинська (ПО бурового розчину 1.6 Ом·м). Результат розв'язання оберненої задачі (пояснення в тексті)

зручності і без обмеження загальності розглянемо однакову похибку для всіх зондів комплексу, що розглядається), тобто є не числом, а довірчим інтервалом;

– питомий опір (ПО) свердловини  $\rho_C$  визначено з деякою похибкою  $\delta$ , тобто він може набувати будь-якого значення з інтервалу:  $(1-\delta)\rho_C < \rho_C < (1+\delta)\rho_C$ .

При розв'язанні оберненої задачі ми будемо використовувати мінімізацію функціонала [6]:

$$F(\rho_1^T, \dots, \rho_n^T) = \sqrt{K_i \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i^T - \rho_i^P}{\rho_i^T} \right)^2},$$

де  $n$  – кількість зондів апаратури,  $\rho_i^T$  – розраховані значення уявного опору (УО) для моделі, що розглядається,  $\rho_i^P$  – фактично отримані значення УО,  $K_i$  – вагові коефіцієнти кожного зонда комплексу (було покладено  $\forall i: K_i = 1$ ).

На рис. 3 наведено порівняння даних ВІКІЗ з результатом розв'язання оберненої задачі комплексу БКЗ+БК+ІК [4, 5] та комплексу 4ІК [2] у свердловині під умовною назвою "Ватинська" (ПО бурового розчину 1.6 Ом·м).

Обернена задача розв'язувалась без урахування похибки.

Тепер продемонструємо запропонований "найпростіший шлях" дослідження впливу похибки в граничних умовах оберненої задачі на її остаточний результат на прикладі комплексу 4ІК в цій свердловині. Отриманий результат представлений на рис. 4 (для обраних значень параметрів  $\varepsilon = 0.2$  (рис. 4.а),  $\delta = 0.2$  (рис. 4.б)).

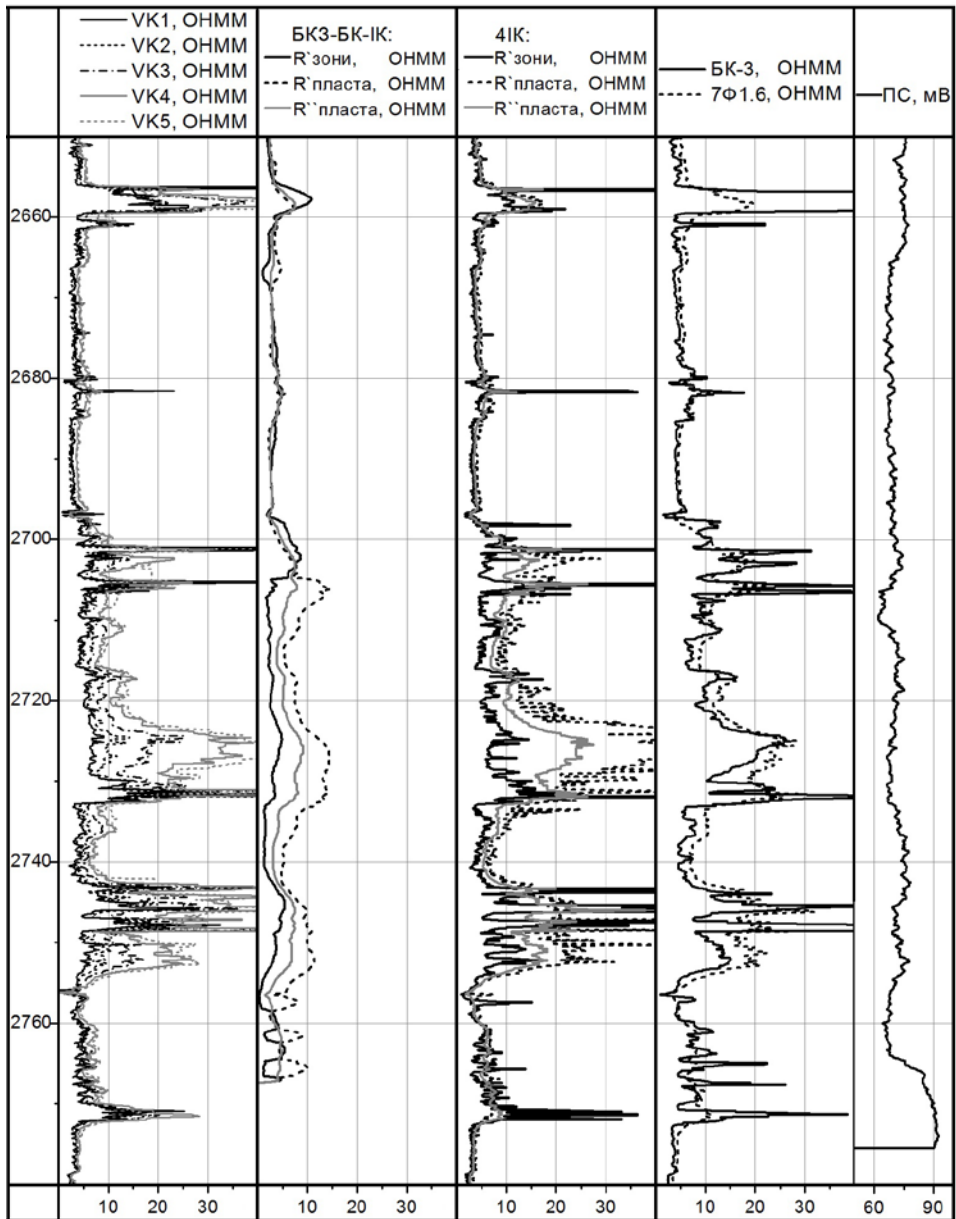


Рисунок 5 – Св. Єганська (ПО бурового розчину 0.34 Ом·м). Результат розв'язання оберненої задачі для комплексів BK3+BK+4K та 4K у порівнянні з даними VK1-5

Отже, для випадку свердловини, що заповнена глиняним буровим розчином, можна зробити наступні висновки:

– обернена задача комплексу 4K в межах значень шуканих параметрів є стійкою відносно похибки виміру: величина інтервалу можливих значень параметрів моделі майже пропорційна величині інтервалу можливих значень виміру (рис. 4. а);

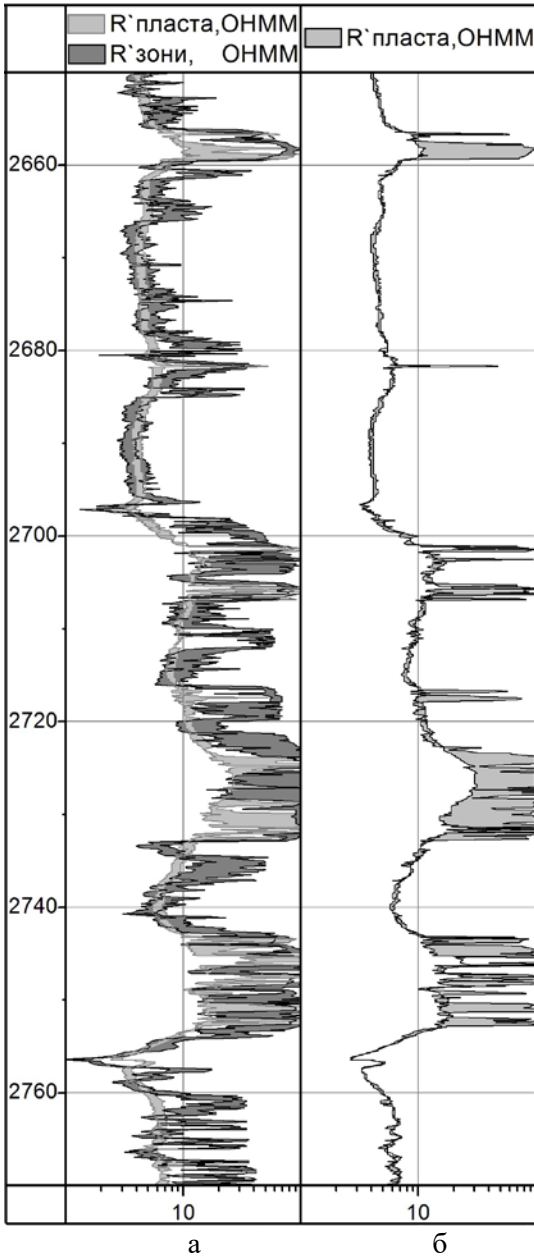


Рисунок 6 – Св. Єганська (ПО бурового розчину 0.34 Ом·м). Результат розв'язання оберненої задачі (пояснення в тексті)

урахуванням похибки (для обраних значень параметрів  $\varepsilon = 0.2$  (рис. 6.а),  $\delta = 0.2$  (рис. 6.б)).

Отже, для випадку свердловини, що заповнена соляним буровим розчином, можна зробити наступні висновки:

– обернена задача комплексу 4ІК в межах значень шуканих параметрів до 10 мСм/м є стійкою відносно похибки виміру: величина інтервалу

– обернена задача для комплексу 4ІК в межах значень шуканих параметрів до 10 мСм/м є стійкою відносно зміни ПО бурового розчину: величина інтервалу можливих значень параметрів моделі майже пропорційна величині інтервалу можливих значень ПО бурового розчину (рис. 4.б);

– обернена задача для комплексу 4ІК в межах значень шуканих параметрів більше 10 мСм/м задовольняє умові неперервності, але не є стійкою відносно зміни ПО бурового розчину: величина інтервалу можливих значень параметрів моделі значно більша величини інтервалу можливих значень ПО бурового розчину (рис. 4.б);

– значення  $R'$ зони більш "чутливі" до зміни параметрів свердловини, ніж значення  $R'$ пласта.

Розглянемо іншу свердловину під умовною назвою "Єганська" (ПО бурового розчину 0.34 Ом·м), заповнену тепер соленим буровим розчином.

На рис. 5 наведено порівняння даних ВКІЗ з результатом розв'язання оберненої задачі комплексу БКЗ+БК+ІК та комплексу 4ІК в цій свердловині (обернена задача розв'язувалась без урахування похибки), а на рис. 6 – результат розв'язання оберненої задачі 4ІК з



можливих значень параметрів моделі майже пропорційна величині інтервалу можливих значень виміру (рис. 6.а);

– обернена задача комплексу 4К в межах значень шуканих параметрів більше 10 мСм/м задовольняє умові неперервності, але не є стійкою відносно похибки виміру: величина інтервалу можливих значень параметрів моделі значно більша величини інтервалу можливих значень виміру (рис. 6.а);

– обернена задача комплексу 4К не є стійкою відносно зміни ПО бурового розчину: величина інтервалу можливих значень одного з параметрів моделі (а саме  $R$  зони) значно більша величини інтервалу можливих значень ПО бурового розчину;

– параметр  $R$  пласта має як стійку область визначення (до 10 мСм/м), так і нестійку область визначення (більше 10 мСм/м), як це видно на рис. 6.б.

Подібних прикладів можна навести багато для різних свердловин і різних комплексів, але головним для нас є факт того, що в принципі існують області нестійких (хоча і неперервних) розв'язків.

Тобто, задавши конкретні значення УП, ми звичайно отримаємо конкретне значення розв'язку, але яке, можливо, буде нестійким: незначній зміні УП, можливо, буде відповідати значна зміна розв'язку.

Зрозуміло, що з точки зору ГДС такий розв'язок використовувати неможливо або використання такого розв'язку для подальшої інтерпретації призведе до помилкових висновків відносно визначення характеристик продуктивності свердловини.

Отже, ми дійшли висновку, що недостатньо мати сам по собі спосіб розв'язання оберненої задачі. Треба ще і мати спосіб, який дозволить для кожної моделі розрізу і кожного комплексу визначати області стійкості її розв'язків.

## 2. Характеристики просторової роздільної здатності

Для того щоб дослідити області стійкості розв'язання, ми розглянемо так звані характеристики просторової роздільної здатності [2, 6, 7].

Для цього розглянемо простір  $P$  параметрів  $\bar{p}$  досліджуваних об'єктів і простір  $G$  можливих значень  $\bar{g}$  вимірювання зондуючим комплексом каротажу. Аби задача мала розв'язок, будемо вимагати, щоб кількість незалежних вимірювань була більшою або дорівнювала кількості шуканих параметрів моделі. Існує однозначне відображення:  $P \rightarrow G$  (будемо позначати відповідну функцію відображення  $G$ ). Розглянемо особливості оберненого відображення  $G \rightarrow P$  (будемо позначати відповідну функцію  $G^{-1}$ ), яке в разі відображення одного елемента будемо вважати однозначним. Якщо об'єкт відображення – не один елемент  $\bar{g}$ , а область  $\bar{g} \pm \delta\bar{g}$ , де  $\delta\bar{g}$  приймає будь-які значення в межах допустимої похибки, то образом такого відображення також буде якась область.

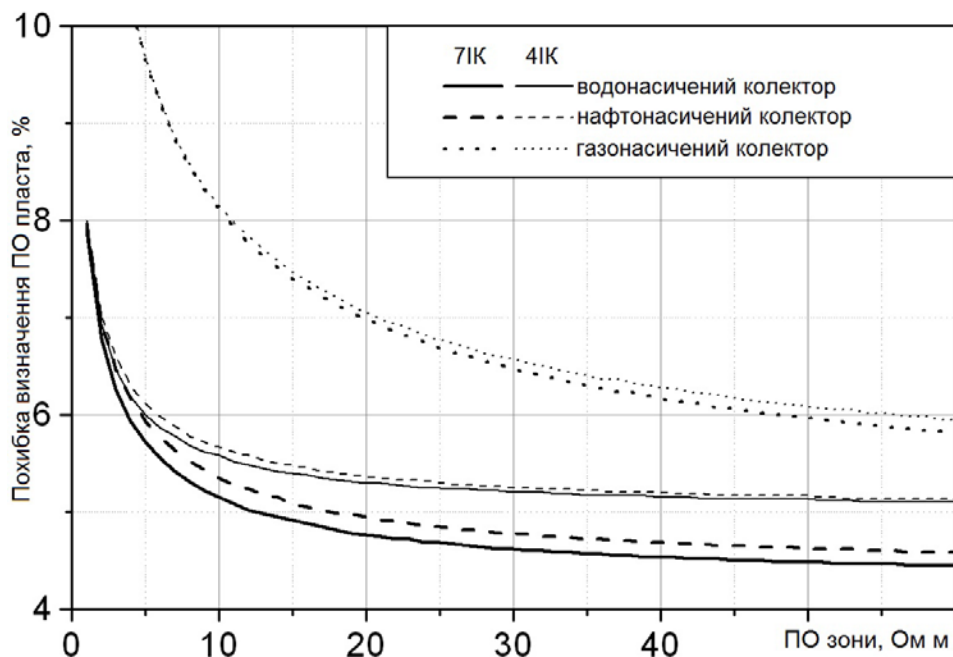


Рисунок 7 – Залежність похибки визначення ПО пласта від ПО зони

Розглянемо таке відображення:  $\bar{p} \pm \delta\bar{p} = G^{-1}(\bar{g} \pm \delta\bar{g})$ . Зауважимо, що оскільки обернена задача є нелінійною, величина  $\delta\bar{p}$  залежить і від самої моделі та від похибки вимірювання:  $\delta\bar{p} = \delta\bar{p}(\bar{p}, \delta\bar{g})$ . Похибка вимірювання також в загальному випадку залежить від моделі середовища:  $\delta\bar{g} = \delta\bar{g}(\bar{p})$  (зокрема, це пояснюється тим, що похибка будь-якого вимірювального пристрою неоднакова на всьому робочому діапазоні).

Така складна залежність не дозволяє ввести загальне просте поняття та визначення характеристики просторової роздільної здатності апаратури не тільки для всього діапазону параметрів всіх можливих актуальних моделей розрізів, але навіть для сукупності кількох окремих моделей. Це вимагає вивчення кількісної залежності  $\bar{p} \pm \delta\bar{p} = G^{-1}(\bar{g} \pm \delta\bar{g})$  окремо для кожної з моделей (для різних  $\bar{g} \pm \delta\bar{g}$ ).

Відповідно, говорити про характеристики просторової роздільної здатності конкретної апаратури можна тільки для конкретної моделі розрізу: навіть при незначній зміні параметрів моделі характеристики можуть значно змінитися, що ми добре спостерігали у попередньому пункті.

Отже, аналіз таких характеристик потрібно проводити для якоїсь окремо обраної моделі.

Для кожної такої обраної моделі будемо виконувати наступні дії.

1. Задавати її параметри (визначення вектора параметрів моделі  $\bar{p}$ ).
2. Розв'язувати пряму задачу для  $\bar{p}$  (визначення вектора вимірювань  $\bar{g} = G(\bar{p})$ ).

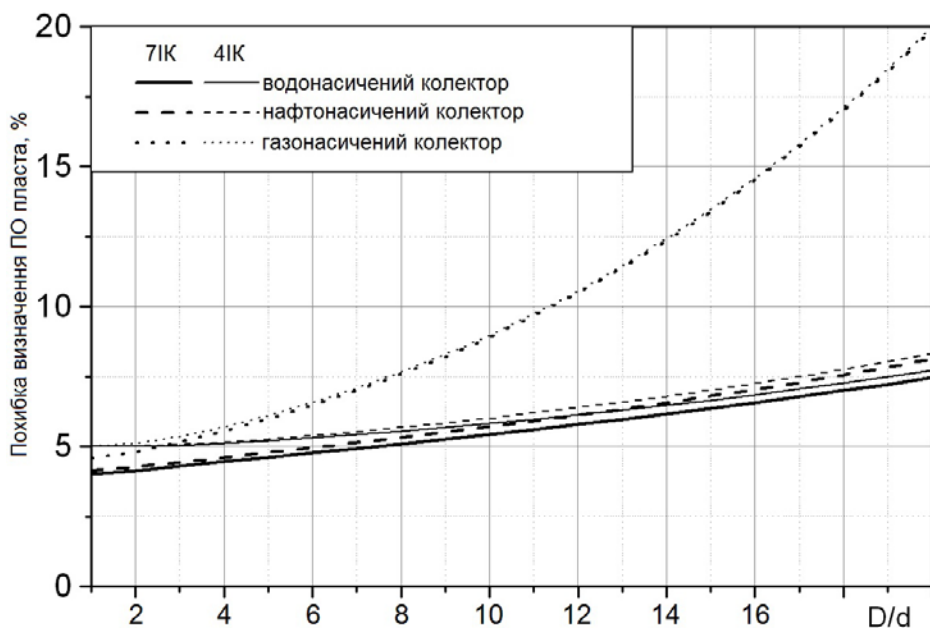


Рисунок 8 – Залежність похибки визначення ПО пласта від діаметра зони проникнення

3. Розв'язувати обернену задачу для визначеного  $\bar{g}$ , тобто знаходити такий елемент  $\bar{p}'$ , для якого:

$$\bar{p}' = G^{-1}(g) = G^{-1}(G(\bar{p})). \quad (1)$$

4. Порівнювати  $\bar{p}'$  і  $\bar{p}$  (визначення точності розв'язання оберненої задачі).

У разі, якщо  $\bar{p}'$  не відрізняється від  $\bar{p}$  (в межах допустимої, як завгодно малої, заздалегідь заданої похибки), ми будемо вважати, що:

$$\bar{p}' \equiv \bar{p}. \quad (2)$$

Виконання (2) буде означати, що отримана характеристика просторової роздільної здатності вірна і не залежить від методу розв'язання оберненої задачі.

5. Розв'язувати обернену задачу для області  $\bar{g} + \delta\bar{g}$  (знаходження множини можливих моделей  $\bar{p} + \delta\bar{p}$ , що відповідають  $\bar{g} + \delta\bar{g}$ ).

Продемонструємо такий зв'язок похибки каротажу з похибкою можливого визначення шуканих параметрів на декількох прикладах пластів-колекторів нескінченної потужності.

В якості апаратури ми будемо розглядати апаратуру 4ІК та теоретично розроблену апаратуру 7ІК, яка утворена з 4ІК шляхом додавання трьох малих зондів (довжин 0.35, 0.25, 0.15 м).

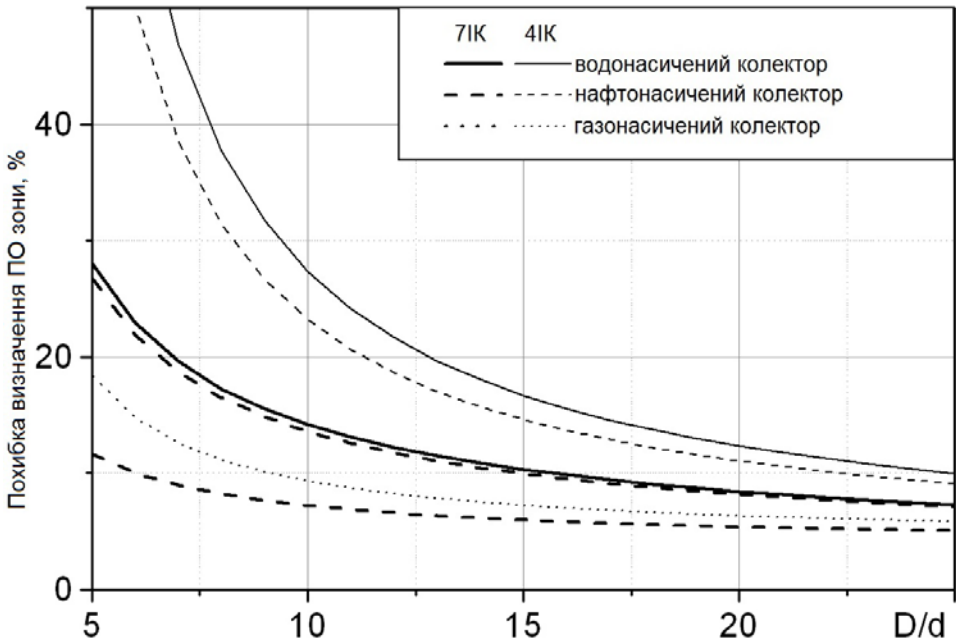


Рисунок 9 – Залежність похибки визначення ПО зони від діаметра зони

Похибку будемо задавати окремо для кожного зонда.

Для якісного пояснення очікуваних результатів досить скористатися наближеною теорією Доля і записати УП, вимірювану кожним зондом, нехтуючи сигналом від свердловини у вигляді:

$$\sigma^i = \frac{g_3^i}{\rho_3} + \frac{g_{II}^i}{\rho_{II}}, \quad (3)$$

де  $\sigma^i$  – уявна провідність  $i$ -го зонда;  $g_3^i, g_{II}^i$  – геометричні фактори зони проникнення і пласта.

Очевидно, що відносна точність визначення ПО пласта і зони проникнення пов'язана із взаємним відношенням першого і другого доданків в (3). Так, при:

$$\frac{g_3^i}{\rho_3} \ll \frac{g_{II}^i}{\rho_{II}}, \quad (4)$$

параметри ближньої зони визначаються з набагато більшою похибкою при  $\rho_{II} = const$ , ніж параметри далекої зони при  $\rho_3 = const$ .

Крім того, умова (4) виконується особливо суворо при підвищуючому проникненні, коли, крім  $g_3 < g_{II}$ , вона посилюється ще і  $\rho_3 > \rho_{II}$ .

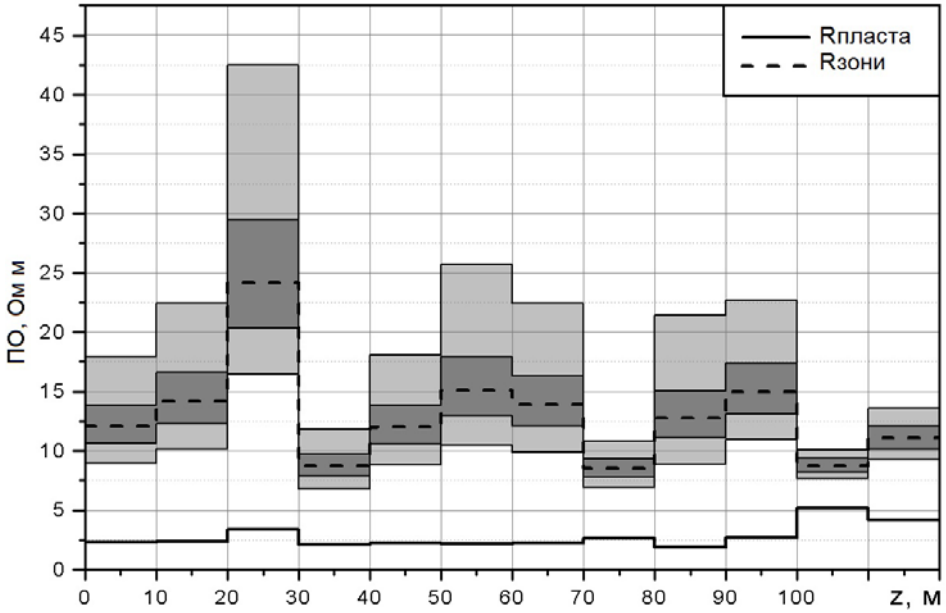


Рисунок 10 – Визначення ПО за комплексами 4ІК та 7ІК для заданих ПО пласта та ПО зони:

- – довірчий інтервал визначення ПО зони по 4ІК,
- – довірчий інтервал визначення ПО зони по 7ІК

Похибка визначення параметрів ближньої зони поліпшується при знижуючому проникненні, тому що умова  $\rho_z < \rho_D$  значно послаблює умову (4).

Так, на рис. 7 наведена залежність точності визначення ПО пласта від ПО зони проникнення, на рис. 8 – залежність точності визначення ПО пласта від діаметра зони проникнення, на рис. 9 – залежність точності визначення ПО зони від діаметра зони проникнення.

Також була розрахована похибка визначення ПО зони проникнення для різних пластів, значення параметрів яких були взяті за результатами інтерпретації даних ВКІЗ у конкретній свердловині теригенного розрізу Західного Сибіру (рис. 10).

Отже, спосіб розрахунку характеристик просторової роздільної здатності дозволяє: по-перше, визначити, наскільки досліджувана апаратура чутлива до тих чи інших шуканих параметрів моделі; по-друге, порівняти такі характеристики різних типів апаратури і тим самим вибрати об'єктивно більш ефективну для кожної конкретної моделі розрізу.

## Висновки

Наведені результати дозволяють дійти наступних висновків:

- перед практичним застосуванням будь-якого способу розв'язання оберненої задачі доцільно дослідити області стійкості її розв'язків, що дозволить їх використовувати в подальшому без втрати корисної інформації;

– для можливості ефективної подальшої роботи з отриманими результатами доцільно також дослідити області еквівалентних моделей, що відповідають реальній похибці каротажу та його геофізичним умовам.

Або, простіше кажучи, недостатньо отримати сам по собі результат розв'язання оберненої задачі: необхідно бути впевненим, що цей результат отриманий правильно; необхідно знати похибку, з якою він отриманий; необхідно бути впевненим, що він отриманий в області стійкості; необхідно розуміти, який геофізичний зміст містить отриманий розв'язок математичної задачі.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Anderson B.I. Modeling and inversion methods for the interpretation of resistivity logging tool response. – Delft: DUP Science. 2001. – p.p. 377.
2. Миронцов Н.Л. Численное моделирование электротометрии скважин. Київ: Наукова думка, 2012. 224 с.
3. Технология исследования нефтегазовых скважин на основе ВИКИЗ. Методическое руководство / Под. ред. М.И. Эпова, Ю.Н. Антонова. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 121 с.
4. Сгурнова М.Г., Зайковський М.Я., Заворотько Я.М., Цьоха О.Г., Кнішман О.Ш., Муляр П.М., Дем'яненко І.І. Нафтогазоперспективні об'єкти України. Нафтогазоносність та особливості літогеофізичної будови відкладів нижнього карбону і девону Дніпровсько-Донецької западини. Київ: Наукова думка, 2005. 196 с.
5. Техническая инструкция по проведению геофизических исследований и работ приборами на кабеле в нефтяных и газовых скважинах / под. ред. Р.Т. Хаматдинова. – Москва.: ГЕРС, 2002. – 270 с.
6. Миронцов М.Л. Електротометрія нафтогазових свердловин. Київ: ТОВ «Юстон», 2018.
7. Миронцов Н.Л. О связи характеристик пространственного разрешения зондирующей аппаратуры каротажа и эффективности решения обратных задач // Геофизический журнал. – 2012. – Т. 34, № 3 – С. 155-159.

*Стаття надійшла до редакції 03.12.2018.*