УДК 004.047

О.О. КРЯЖИЧ, О.В. КОВАЛЕНКО

ДЕЯКІ УДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ СПОСОБУ ОПИСУ ЗАБРУДНЕНОЇ ТЕРИТОРІЇ

Анотація. *У статті представлений підхід до побудови ітерацій вищого порядку. Це дозволяє за модифікованим методом отримати ряд розкладення за степенями та одержати базову послідовність ітераційних формул. Наведені математичні основи призначені для побудови модуля прогнозування до раніше створеної авторами програмної розробки «Випадкова точка».*
Ключові слова: *спосіб, невизначеність, похідна, ітерація, функція.*

Вступ

У статті [1] був представлений спосіб опису забрудненої території, на основі якого розроблена програмна реалізація [2]. У процесі подальшого тестування програмної реалізації та проведення вимірів розповсюдження в навколишньому середовищі небезпечних речовин, здійсненого на основі аналізу розповсюдження радіоізотопу водню – тритію – в біомасі рослин, було виявлено, що для більш точних замірів та побудови карт розповсюдження потрібні ітерації більш високого порядку. Це вимагає створення ряду базових послідовностей ітераційних формул для різних функцій та використання різних методів апроксимацій. Це, у свою чергу, вимагає звернути увагу на алгоритмізацію задачі вирішення різноманітних функцій в процесі реалізації другої версії комп’ютерної програми [2], враховуючи питання генерування алгоритмів, адаптації алгоритмів до конкретних умов застосування і т. ін.

Метою роботи є представлення деяких удосконалень математичних основ способу опису забрудненої території з метою створення нової версії програмного продукту, що дозволяє деталізувати опис та візуальне представлення забруднених поверхонь.

У роботі поставлені та розкриті наступні задачі:

– проаналізувати питання невизначеності інформації при створенні моделей розповсюдження забруднення в навколишньому середовищі та розглянути можливий шлях подолання цього;

– представити підхід до побудови ітерацій вищого порядку для програмної реалізації модуля для вдосконалення програмної реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка».

1. Невизначеність інформації в моделях розповсюдження забруднення та її подолання

У моделі опису забрудненої території [1, 3] з врахуванням впливів перетворення інформації при її обробці наведені підходи та алгоритми, які дозволяють реалізувати технологію поступового переходу від інформаційної невизначеності до повної визначеності і зворотну переробку інформації від маси неупорядкованих даних моніторингу до повного аналізу стану системи і її можливостей. Апробація програмної реалізації та методу опису забрудненої території [4] дозволяють стверджувати про необхідність перевірки інформації на різних рівнях її трансформації щодо її несуперечності та повноти, адже неузгодженість вхідних даних до моделі призводить до зростання ентропії інформації, що отримує дослідник при реалізації моделі.

Ентропія інформації описується математичною формулою, яка визначає невизначеність повної групи випадкових подій або випадкових станів [5]:

$$E = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \quad (1)$$

За змістом ентропія виступає зворотною величиною до кількості інформації. Величина E – міра невизначеності множини, яка складається з n випадкових подій з імовірністю $p_1 \ldots p_n$.

Ентропія як міра невизначеності інформації має декілька способів її вимірювання. Міра невизначеності інформації Шенона відноситься до процесів передачі повідомлень. Міра різноманіття інформації Хартлі характеризує лише процеси утримання системи у стабільному стані. До мір Шенона й Хартлі корелює міра складності відновлення двоїстих слів А. Колмогорова. Міра А. Харкевича, яка визначає смислову цінність інформації через критерій досягнення мети, також потребує адаптації для вирішення задач, поставлених в дослідженні. Зокрема, міра невизначеності (E) у досліджуваному ракурсі повинна об’єднувати відсутність, суперечність та несвоєчасність інформації про ряд керуючих впливів на досліджувану систему.

Для її застосування потрібні системні умови до формування бази знань про систему, яка досліджується. Такими умовами є структура записів інформації в базу даних, на основі яких будується модель про стан забруднення системи. Деяка сукупність знань може бути представлена у вигляді суми записів у базі даних про деякі точки вимірів X, реальні показники забруднення в цих точках Y та вплив непереборних факторів на систему (температура, вітер, погодні умови та ін.) Z:

$$X(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{n} x_i(a,b,c,d), \quad (2)$$

на множині записів про точки вимірів на території, де відбулося забруднення $I = \{\, i \mid 1 \le i \le n \,\}$, де a – порядковий номер точки виміру; b – назва точки; c – напрям кроку вимірів; d – довжина кроку вимірів.

$$Y(a,c,d,e) = \sum_{j=1}^{m} y_j(a,c,d,e), \quad (3)$$

на множині записів про показники забруднення в результаті роботи підприємства $\mathrm{J} = \{\, \mathrm{j} \mid 1 \le i \le \mathrm{m} \,\}$, де a – ім’я елементарної операції з проектних технологій функціонування, що призвела до викиду; c – кількість речовини, що потрапляє в навколишнє середовище в результаті виконання елементарної операції при регламентній роботі; d – кількість речовини, що потрапила в навколишнє середовище в результаті виконання елементарної операції, що призвела до аварії (викиду); e – ознаки операції із забезпечення мінімізації викиду.

$$Z(a,c,d,e) = \sum_{q=1}^{l} z_q(a,c,d,e), \tag{4}$$

на множині записів про непереборні фактори, що мають вплив на досліджувану систему $Q = \{q \mid 1 \le q \le l\}$, де a – температура повітря; c – напрям вітру; d – сила вітру; e – вологість.

Звичайно, що до моделі ми не зможемо ввести різновимірні показники. У зв'язку з цим, пропонується на фізико-хімічних особливостях поведінки конкретної забруднюючої речовини і виходити з перерахунку потрапляння відповідної облікової кількості речовини-забруднювача (тонни, кілограму, кубічного метру, 1 – 1000 літрів) в навколишнє середовище при фактичних погодних умовах на момент аварії.

Виходячи з (2)–(4), мірою невизначеності інформації E може бути показник відношення загальної суми неповних записів у базі даних про точки вимірів, забруднення та погодні умови до ідеально повної бази даних:

$$E(x,y,z) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} + \sum_{j=1}^{m} y_j^{'} + \sum_{q=1}^{l} z_q^{'}) / (\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{q=1}^{l} z_q), \tag{5}$$

де підсумовується кількість записів у базі даних автоматизованої системи. Якщо $E(x,y,z) \to 0$, невизначеність знань про об'єкт зростає, якщо $E(x,y,z) \to 1$, невизначеність зникає і зростає визначеність $E(x,y,z) = 1$, що відображає повний обсяг знань про територію та її забруднення.

2. Побудова ітерацій вищого порядку

У процесі досліджень для багатьох точок виміру визначатимуться різні показники забруднення, які відповідають окремо визначеній точці на місцевості при незмінних (або малозмінних) кліматичних показниках на конкретний момент дослідження. Тому оперувати в процесі побудови моделей, особливо моделей прогнозування розповсюдження забруднення, доведеться здебільшого показниками x та y. При цьому x виступатиме аргументом, а y – функцією, яку вишукують. Як зазначалося в [1], модель та програмна реалізація використовують метод Чебишова – одним зі способів находження базових послідовностей ітераційних формул є модифікація метода Чебишова побудови ітерацій вищих порядків на випадок, якщо задано рівняння виду

$$F(x,\ y) = 0. \tag{6}$$

П. Чебишов будував ітераційні формули вищого порядку для відшукання коренів рівняння, що дорівнює 0. Для отримання модифікованого методу побудови ітерації вищого порядку для заданого рівня (6) приймемо, що в оточенні простого кореня зазначеного рівняння можна записати наступне:

$$Z = F(x,\ y). \tag{7}$$

Нехай тепер

$$y = \Phi(x,\ z), \tag{8}$$

відповідно,

$$y \equiv \Phi[x, F(x, y)], \tag{9}$$

де функція y задана на сегменті $[a,b]$(4):

$$Z \equiv F[x, \Phi(x, z)]. \tag{10}$$

Тоді функція непереборних факторів Z може бути представлена на сегменті $[c,d]$ і корінь рівняння (6) матиме вигляд:

$$\alpha = \Phi[x, 0]. \tag{11}$$

Відносно функції $F[x,0]$ передбачено, що вона безперервна на сегменті $[c,d]$, має безперервні часткові похідні за y достатньо високого порядку та $F'y(x,y) \neq 0$. Розкладуючи функцію (8) за степенями, приймаючи, що $Z - z$, та вважаючи, що точки виміру на території x (2) та результати вимірів за визначеними показниками погодних умов для конкретної речовини z (4) є фіксованими, отримаємо:

$$y = \Phi(x,z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z}(Z - z) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial z^2}(Z - z)^2 + \ldots \quad . \tag{12}$$

Приймаючи $Z = 0$ та враховуючи (11), отримаємо:

$$\alpha \equiv \Phi(x,z) - \frac{1}{1!}\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial z^2} z^2 + \ldots \quad . \tag{13}$$

Враховуючи (5), отримаємо

$$\alpha = y + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)}[x, F(x,y)] z^k . \tag{14}$$

У даному випадку обмежимося кінцевим числом членів розкладення. Тоді опис можна представити наступним чином:

$$\alpha = y + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)} [x, F(x,y)] z^k + R_{m+1},$$

де R_{m+1} – залишковий член.

Позначимо через $\Psi_m(x,y)$ вираз (14), підставляючи z^2:

$$\Psi_m(x,y) = y + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)} [x, F(x,y)] (F(x,y))^k.$$

Рівняння

$$y = \Psi_m(x,y),$$

при заданому x має корінь $y = \alpha$, а з врахуванням

$$\Psi_m(x,\alpha) = \alpha + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!} \Phi_y^{(k)} [x, F(x,\alpha)] (F(x,\alpha))^k = \alpha,$$

через те, що $F(x,\alpha) = 0$.

У разі прийняття, що

$$y_{i+1} = \Psi_m(x, y_i), \text{ для } i = 1,2,3,\ldots$$

отримаємо ітераційний метод $(m+1)$-го порядку, бо

$$\left. \frac{\partial \Psi_m(x,y)}{\partial y} \right|_{y=\alpha} = \left. \frac{\partial^2 \Psi_m(x,y)}{\partial y^2} \right|_{y=\alpha} = \ldots = \left. \frac{\partial^m \Psi_m(x,y)}{\partial y^m} \right|_{y=\alpha} = 0.$$

Для забезпечення збіжності послідовності $y_{i+1} = \Psi_m(x, y_i)$ при $i = 1,2,3,\ldots$ до пошукованого кореня α необхідно вимагати, щоб перше наближення до пошукованого кореня y_0 належало оточенню кореня α, в якому

$$\left| \Psi_y'(x,y) \right| \le q < 1.$$

Зв'язок між $\Phi_z^{(k)}(x,y)$ та $\Phi_y^{(k)}[x, F(x,y)]$ може бути визначений за правилами заміни в диференційних виразах.

Враховуючи (9), а також

$$\Phi_y^{(k)}[x, F(x,y)] = \begin{cases} 1, \text{ при } k = 1 \\ 0 \text{ при } k > 1 \end{cases} \tag{15}$$

отримаємо

$$\Phi_z^{(1)} = \frac{1}{F_y^{(1)}(x,y)},\ \Phi_z^{(2)} = \frac{F_y^{(2)}(x,y)}{\left[F_y^{(1)}(x,y)\right]^3}, \dots \tag{16}$$

Таким чином, $\Phi_z^{(k)}$ буде зворотною похідною функції, яка вишукується. Підставимо вираз (9) в (14), отримаємо ряд, що вишукується.

Прийнявши в (14) $\alpha \equiv y$, а y в правій частині рівняння початкове наближення $y \approx \alpha$, можна записати:

$$y = y_0 - \frac{1}{1!Z_y^{(1)}(x,y_0)} Z_0 - \frac{Z_y^{(2)}(x,y_0)}{2!\left[Z_y^{(1)}(x,y_0)\right]^3} Z_0^2 - \frac{3\left[Z_y^{(2)}(x,y_0)\right]^2 - Z_y^{(1)}(x,y_0) Z_y^{(3)}(x,y_0)}{3!\left[Z_y^{(1)}(x,y)\right]^5} Z_0^3 - \dots$$

де

$$Z_0 = F(x,y_0). \tag{17}$$

З розкладення вище видно, що функція розкладається за степенями Z_0, а не за степенями x, що є характерним для розкладення в ряд Тейлора, тобто отримали базову послідовність ітераційних формул. Цей ряд можна перетворити в ітераційну формулу, якщо обмежитися кінцевим числом членів і зробити заміну

$$y = y_{i+1},\ y_0 = y_i,\ Z_0 = Z_i\ ,$$

враховуючи, що при $i = 0,\ y_0 \equiv y_0$.

У підсумку можна отримати

$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{1!Z_y^{(1)}(x,y_i)} Z_i - \frac{Z_y^{(2)}(x,y_i)}{2!\left[Z_y^{(1)}(x,y_i)\right]^3} Z_i^2 - \frac{3\left[Z_y^{(2)}(x,y_i)\right]^2 - Z_y^{(1)}(x,y_i) Z_y^{(3)}(x,y_i)}{3!\left[Z_y^{(1)}(x,y_i)\right]^5} Z_i^3 - \dots \tag{18}$$

Наприклад, якщо $y = \sqrt[n]{x}$ и $Z(x,y_i) = y^n / x - 1$, тоді

$$y_{i+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)y_i + x/y_i^{n-1}\right] - \frac{n-1}{2!n^2}\left(y_i^n - x\right)^2 / y_i^{2n-1} - (n-1)(2n-1)\left(y_i^n - x\right)^3 / 3!n^3 y_i^{3n-1} - \dots$$

Відносні погрішності ітераційних формул другого, третього і четвертого порядку можуть бути представлені виразами

$$\delta_{i+1} = \frac{n-1}{2!}\delta_i^2 - \frac{(n-1)(n+1)}{3!}\delta_i^3 + \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4!}\delta_i^4 - \dots,$$

$$\delta_{i+1} \approx \frac{(n-1)(2n-1)}{3!}\delta_i^3 - \frac{(n-1)\left(2n^2+n-1\right)}{4!}\delta_i^4$$

$$\delta_{i+1} \approx \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{4!}\delta_i^4$$

Ці формули отримуються за методом розкладення функцій за рядом нев'язок [6], де нев'язка має вигляд $Z_0 = x/y_0^n - 1$.

Висновки

За запропонованими удосконаленнями способу опису забрудненої території [1] виникла можливість подальшого створення модуля прогнозування забруднення до програмної реалізації цього способу «Комп'ютерна програма з реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка» («Випадкова точка (Random point)» [2], для якого зараз розробляється технічне завдання.

Побудова ітерацій вищого порядку дозволяє за модифікованим методом отримати ряд розкладення за степенями x та отримати базову послідовність ітераційних формул. Тобто, в програмній реалізації це дозволить нам отримати точки прогнозованого забруднення та визначити вірогідний вміст небезпечних речовин, що потрапили в навколишнє середовище, обмежене визначеними точками.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кряжич О.О., Коваленко О.В., Іванченко В.В. Спосіб опису забрудненої території: програмна реалізація / О.О. Кряжич, О.В. Коваленко, В.В. Іванченко // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – №2. – С. 22–35.
2. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 67750 «Комп'ютерна програма з реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка» («Випадкова точка (Random point)»). Автори: Кряжич Ольга Олександрівна, Коваленко Олександр Васильович. Дата заявки: 12.07.2016. Дата реєстрації: 12.09.2016.
3. Трофимчук О.М., Кряжич О.О. Апроксимація функцій для створення алгоритму опису пересіченої місцевості / Олександр Миколайович Трофимчук, Ольга Олександрівна Кряжич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 1. – С. 134–141.
4. Коваленко О.В., Кряжич О.О. Математичні залежності процесу міграції тритію / Олександр Васильович Коваленко, Ольга Олександрівна Кряжич // Математичне та імітаційне моделювання систем – МОДС 2016: тези доповідей Одинадцятої міжнародної науково-практичної конференції (Жукин, 27 червня – 1 липня 2016 р.). – М-во осв. і наук. України, Нац. акад. наук України, Академія технологічних наук України, Інженерна академія України та ін. – Чернігів: ЧНТУ, 2015. – С. 51–55.
5. Згуровський М.З. Системний аналіз. Проблеми, методологія застосування / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. – К.: «Наукова думка», 2011. – 728 с.
6. Теслер Г.С., Гелемб'юк Р.В. Розв'язування жорстких диференціальних рівнянь з використанням методу розвинення функцій в ряди нев'язок / Г.С. Теслер, Р.В. Гелемб'юк // Мат. машини і системи. – 2006. – № 4. – С. 90–98.

Стаття надійшла до редакції 29.08.2018.