УДК 537.874

Я. П. Кулинич, Д. Б. Куриляк, О. С. Коваль

РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ МАЛОЮ КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ В ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ ПІВПРОСТОРІ

The technique of analytical determination of the electromagnetic field, scattered by the small crack in the semi-unbounded body is developed. The scattered field components are determined as the field components of the equivalent electric dipole.

Key words: *electric dipole, small parameter method, scattering, electromagnetic field, crack.*

Викладено методику аналітичного визначення електромагнітного поля, розсіяного малою тріщиною у напівбезмежному тілі. Вектори розсіяного поля визначаються як вектори поля деякого еквівалентного електричного диполя.

Ключові слова: *електричний диполь, метод малого параметра, розсіяння, електромагнітне поле, тріщина.*

Одним із фундаментальних аспектів вихрострумового контролю електропровідних конструкцій є дослідження розподілу вирових струмів за наявності дефектів типу тріщини у матеріалі. Їх результати разом з теорією відбору та обробки багатопараметрової інформації становлять основу для створення відповідних методик та засобів систем контролю.

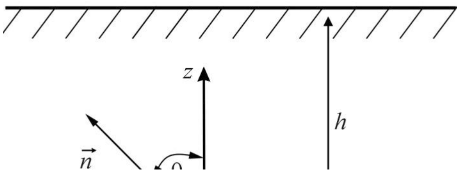
Математичне моделювання більшості практичних задач електромагнітного неруйнівного контролю матеріалів і виробів зводиться до розв'язування задач розсіювання електромагнітного поля на дефектах у електропровідному середовищі з плоскими границями поділу. У строгій постановці розв'язок таких задач складний і громіздкий. Проте значну частину цих задач можна розглядати як задачі розсіювання на малих тілах, оскільки дефекти у матеріалах та виробах (тріщини, включення, порожнини) зазвичай мають малі розміри порівняно з довжиною хвилі зондуючого електромагнітного поля в основному матеріалі. Тому проблема розробки ефективної методики розв'язання задач розсіювання електромагнітних хвиль на малих у вищезазначеному сенсі дефектах, зокрема, на дефектах типу тріщини (порушення суцільності) у шаруватих середовищах, є актуальною. Вироблення такої методики становило б теоретичну основу для створення нових способів виявлення дефектів та визначення їх геометричних параметрів.

Метою цього дослідження є розробка методики аналітичного визначення векторів електромагнітного поля, розсіяного на малій тріщині у електропровідному середовищі з плоскими межами поділу. В основі цієї методики – подання розсіяного поля тріщини як поля деякого еквівалентного електричного диполя, момент якого визначається вектором первинного електричного поля у центрі тріщини [1, 2]. Зауважимо, що аналогічна методика викладена у праці [3] для дослідження електромагнітного поля локальних дефектів (включення, порожнини).

Основні припущення та постава задачі. Розглянемо тривимірне напівбезмежне електропровідне тіло (середовище) електропровідністю σ, що містить кругову тріщину радіуса a. Магнітна проникність тріщини і тіла дорівнює μ_0. Позначимо через ω– кругову частоту низькочастотного зондувального поля та через k – хвильове число тіла ($k^2 = i\omega\sigma\mu_0$). Необхідно визначити вектори електромагнітного поля, розсіяного тріщиною у довільній точці поза тілом, за умови $ka \to 0$.

За умови $ka \to 0$ в однорідному безмежну тілі електромагнітне поле тріщини наближено описується полем еквівалентного електричного диполя з моментом [3]

$$\vec{p}_{eq} = \frac{8}{3} a^3 (\vec{n}, \vec{j}_0) \vec{n} \,, \tag{1}$$



де $\vec{j}_0$ – вектор густини еквівалентних вихрових струмів у центрі тріщини; $\vec{n}$ – одинична нормаль до поверхні тріщини; $(\vec{n}, \vec{j}_0)$ – скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\vec{j}_0$. Коли поблизу тріщини є границя поділу середовищ, то вихрові струми формуються як полем взаємодії еквівалентного диполя з межею середовища, так і полем, що не залежить від еквівалентного диполя (первинне поле у тій точці). Отже, справедлива рівність

$$\vec{j}_0 = \alpha (\vec{n}, \vec{j}_0)\, \vec{j}_r + \vec{j}_{inc} \,, \tag{2}$$

де $\alpha = \frac{8}{3} a^3$, $\vec{j}_{inc}$ – вектор густини вихрових струмів, зумовлених первинним електромагнітним поле за відсутності тріщини; $\vec{j}_r$ – вектор густини вихрових струмів у центрі тріщини, зумовлених електричним полем взаємодією електричного диполя з моментом $\vec{n}$ та межею середовища. Рівність (2) описує систему лінійних рівнянь для визначення компонент вектора $\vec{j}_0$.

Знаходження моменту еквівалентного диполя. Для подальшого викладу отримаємо вирази компонент вектора густини вихрових струмів, зумовлених взаємодією електричного диполя з границею провідного середовища, у точці знаходження диполя. Систему координат *Oxyz* виберемо так, щоб її початок *O* збігався з точкою, у якій знаходиться диполь з моментом $\vec{n}$ (див. рисунок). Вісь *Oz* спрямуємо перпендикулярно до границі середовища. Осі *Ox* і *Oy* виберемо так, щоб вибрана система була правою системою координат. Згідно з працею [4] вирази електричного поля диполя у провідному півпросторі запишемо так:

$$E_x^s(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{4\pi\sigma} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos\varphi\, P_1 + \sin\theta_0 \cos\varphi\, \cos(\varphi-\varphi_0) P_2 + \\ + \sin\theta_0\, \cos(2\varphi-\varphi_0) P_3 + \sin\theta_0 \sin\varphi\, \sin(\varphi-\varphi_0) P_4 \end{pmatrix},$$

$$E_y^s(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{4\pi\sigma} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \sin\varphi\, P_1 + \sin\theta_0 \sin\varphi \cos(\varphi-\varphi_0) P_2 + \\ + \sin\theta_0\, \sin(2\varphi-\varphi_0) P_3 + \sin\theta_0 \cos\varphi\, \sin(\varphi-\varphi_0) P_4 \end{pmatrix},$$

$$E_z^s(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\cos\theta_0 P_5 - \sin\theta_0 \sin(\varphi-\varphi_0)\, P_1 \right).$$

Тут $$P_1 = \int_0^\infty e^{(z-2h)\eta} \lambda^2 J_1(\lambda\rho)\, d\lambda \,, \quad P_2 = \int_0^\infty e^{(z-2h)\eta} \lambda\eta J_0(\lambda\rho)\, d\lambda \,,$$

$$P_3 = -\frac{1}{\rho} \int_0^\infty e^{(z-2h)\eta} \frac{(\lambda-\eta)k^2 + (\lambda+\eta)\eta^2}{\eta(\eta+\lambda)} J_1(\lambda\rho)\, d\lambda \,,$$

$$P_5 = -\int_0^\infty e^{(z-2h)\eta} \frac{\lambda^3}{\eta} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda \,, P_4 = k^2 \int_0^\infty e^{(z-2h)\eta} \frac{\lambda(\lambda-\eta)}{\eta(\eta+\lambda)} J_0(\lambda\rho)\, d\lambda \,,$$

де $J_i(\lambda\rho)$ – функція Бесселя, $\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$; φ_0, θ_0 – полярні кути вектора $\vec{n} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$; (ρ,φ,z) координати точки у циліндричній системі, зв'язаній з декартовою системою *Oxyz*.

Врахувавши поведінку функцій Бесселя $J_i(\lambda\rho)$ в околі точки $\rho = 0$ та поклавши $z = 0$ і $\varphi = 0$, маємо

$$j_r^x = \sigma E_x^s(0,0,0) = \frac{1}{4\pi} r \sin\theta_0 \cos\varphi_0 ,$$

$$j_r^y = \sigma E_y^s(0,0,0) = \frac{1}{4\pi} r \sin\theta_0 \sin\varphi_0 , \qquad j_r^z = \sigma E_z^s(0,0,0) = \frac{1}{4\pi} q \cos\theta_0 ,$$

де
$$r = \int_0^\infty \frac{e^{-2h\eta}(2\eta - \lambda)\lambda^2}{2\eta} d\lambda , \qquad q = -\int_0^\infty e^{-2h\,\eta} \frac{\lambda^3}{\eta} d\lambda .$$

Далі, використовуючи відомі формули

$$\int_0^\infty \frac{\lambda\, e^{-t\sqrt{\lambda^2 - a^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}} d\lambda = iah_0^{(1)}(at) , \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-t\sqrt{\lambda^2 - a^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}} d\lambda = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(at) ,$$

отримуємо

$$r = \frac{i k^2}{4h}\left(\pi H_2^{(1)}(2kh) - 2h_1^{(1)}(2kh)\right), \; q = -\frac{i k^2}{h} h_1^{(1)}(2kh) .$$

Звідси

$$\left.\begin{aligned} j_r^x &= \frac{i k^2}{16\pi h}\left(\pi H_2^{(1)}(2kh) - 2h_1^{(1)}(2kh)\right)\sin\theta_0 \cos\varphi_0 \\ j_r^y &= \frac{i k^2}{16\pi h}\left(\pi H_2^{(1)}(2kh) - 2h_1^{(1)}(2kh)\right)\sin\theta_0 \sin\varphi_0 \\ j_r^z &= -\frac{i k^2}{4\pi h} h_1^{(1)}(2kh)\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} . \qquad (3)$$

Після підстановки (3) у (2) отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих компонент вектора $\vec{j}_0$:

$$\begin{cases} A_1 j_0^x - \alpha r \sin 2\varphi_0 \sin^2\theta_0\, j_0^y - \alpha r \cos\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_0^z = 8\pi j_{inc}^x , \\ -\alpha r \sin 2\varphi_0 \sin^2\theta_0\, j_0^x + A_2 j_0^y - \alpha r \sin\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_0^z = 8\pi j_{inc}^y , \\ -\alpha q \cos\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_0^x - \alpha q \sin\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_0^y + A_3 j_0^z = 8\pi j_{inc}^z , \end{cases}$$

де
$$A_1 = 8\pi - 2\alpha r \cos^2\varphi_0 \sin^2\theta_0 , \; A_2 = 8\pi - 2\alpha r \sin^2\varphi_0 \sin^2\theta_0 ,$$
$$A_2 = 8\pi - 2\alpha r \sin^2\varphi_0 \sin^2\theta_0 .$$

Далі, після громіздких елементарних перетворень, розв'язок системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} j_0^x = (B_1 j_{inc}^x + \alpha r \cos 2\varphi_0 \sin^2\theta_0\, j_{inc}^y + \alpha r \cos\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_{inc}^z)/\Delta, \\ j_0^y = (\alpha r \sin 2\varphi_0 \sin^2\theta_0\, j_{inc}^x + B_2 j_{inc}^y + \alpha r \sin\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_{inc}^z)/\Delta, \\ j_0^z = (\alpha q \cos\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_{inc}^x + \alpha q \sin\varphi_0 \sin 2\theta_0\, j_{inc}^y + B_3 j_{inc}^z)/\Delta, \end{cases}$$

де
$$B_1 = [16\pi - \alpha(r + 2q) + \alpha(r - 2q)\cos 2\theta_0 + 2\alpha r \cos 2\varphi_0 \sin^2\theta_0]/2 ,$$
$$B_2 = [16\pi - \alpha(r + 2q) + \alpha(r - 2q)\cos 2\theta_0 - 2\alpha r \cos 2\varphi_0 \sin^2\theta_0]/2 ,$$
$$A_3 = [8\pi - \alpha r + \alpha r \cos 2\theta_0] , \; \Delta = 8\pi - \alpha(r + q) + \alpha(r - q)\cos 2\theta_0 .$$

Тоді момент еквівалентного електричного диполя тріщини згідно з (1) дорівнюватиме

$$\vec{p}_{eq}=\frac{(\vec{n},\vec{j}_{inc})\,\vec{n}}{1-\delta}, \tag{4}$$

де
$$\delta=2a^3[r\sin^2\theta_0+q\cos^2\theta_0]/3\,.$$

Чисельник у формулі (4) враховує вплив на формування дипольного моменту тієї частини первинного поля, що пройшла через границю розділу середовищ. У загальному випадку його можна використовувати як наближений вираз для розрахунку еквівалентного дипольного моменту. Знаменник описує внесок у дипольний момент поля взаємодії тріщини і границі розділу середовищ.

Визначення магнітного поля, розсіяного тріщиною. Для опису низькочастотного магнітного поля тріщини у непровідному півпросторі (повітря) достатньо використати відомі вирази для компонент магнітного поля довільно орієнтованого електричного диполя у шаруватому середовищі [1].

Нехай верхній півпростір заповнює немагнітний діелектрик і струм зміщення в ньому значно менший за сумарний струм провідності провідного немагнітного середовища, що заповнює нижній півпростір. У нижньому півпросторі розміщений диполь, момент якого описується формулою (4).

Тоді складові напруженості магнітного поля, розсіяного тріщиною, $\vec{H}_{sct}$ у верхньому півпросторі, описують вирази [1]:

$$H^{\rho}_{sct}=\frac{p_{eq}\sin\theta_0\sin 9\varphi_0-\varphi)}{2\pi k^2}\int\limits_0^{\infty}\lambda^2 9\lambda-\eta)J_1'(\lambda\rho)\,e^{\lambda(h-z)-h\eta}d\lambda\,,$$

$$H^{\varphi}_{sct}=-\frac{p_{eq}\sin\theta_0\cos(\varphi_0-\varphi)}{2\pi k^2\rho}\int\limits_0^{\infty}\lambda(\lambda-\eta)J_1(\lambda\rho)\,e^{\lambda(h-z)-h\eta}d\lambda\,,$$

$$H^{z}_{sct}=-\frac{p_{eq}\sin\theta_0\sin(\varphi_0-\varphi)}{2\pi k^2}\int\limits_0^{\infty}\lambda^2 9\lambda-\eta)J_1(\lambda\rho)\,e^{\lambda(h-z)-h\eta}d\lambda\,.$$

Наведені вирази є базовими для проведення чисельного моделювання відгуку вихрострумового первинного перетворювача, зумовленого дефектом типу тріщина.

ВИСНОВКИ

Запропоновано методику розрахунку компонент вектора напруженості магнітного поля, розсіяного малою тріщиною, у напівбезмежному провідному тілі. В основі цієї методики – подання розсіяного поля тріщини як поля деякого еквівалентного електричного диполя. Отримано в аналітичному вигляді вирази для еквівалентного дипольного моменту, які враховують взаємодію поля тріщини і границі поділу середовищ.

1. *Гордиенко В. И., Кулинич Я. П., Убогий В. П.* Моделирование электромагнитных полей в морской среде. – К.: Наук. думка, 1988. – 222 с.
2. *Колодій Б. І., Орловський А. А., Панасюк В. В.* Розсіяння електромагнітних хвиль на дрібних дефектах в плоскошаруватих середовищах. – К.: Наук. думка, 1985. – 132 с.
3. *Назарчук З. Т., Кулинич Я. П., Дацко Я. В.* Числовий метод визначення електромагнетного поля у металі з тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 2. – С. 85–93.
4. *Nazarchuk Z. T., Kulynych Ya. P., Koval O. S* . Low-frequency electromagnetic scattering on the circular crack in a conductive body // Proc. XIVth Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (Lviv, Ukraine, September 21–24, 2009). – Lviv: IAPMM NASU, 2009. – P. 103–106.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Одержано 05.03.2010