КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.85

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация вычислений

Исследуются невыпуклые сепарабельные минимаксные задачи квадратичной оптимизации. Получено достаточное условие нахождения значения и точки глобального экстремума задачи данного класса путем нахождения двойственной оценки эквивалентной квадратичной экстремальной задачи.

Невыпуклые квадратичные экстремальные задачи – это класс важных и трудных с вычислительной точки зрения задач глобальной оптимизации, которые возникают во многих практических приложениях. В последние десятилетия особое внимание было сосредоточено на их исследовании с использованием различного типа выпуклых релаксаций, в частности, SDP-релаксаций (semidefinite programming relaxation problems), SOCP-релаксаций (second-order cone programming relaxation problems), лагранжевых релаксаций (lagrangian relaxation problems). Одним из основных направлений этих исследований является выделение специальных подклассов квадратичных задач, для которых релаксации позволяют найти значение глобального экстремума, а возможно и саму точку глобального экстремума [1 – 8].

В работе [1] рассмотрен класс невыпуклых сепарабельных задач квадратичной оптимизации, под которыми понимались задачи с целевой функцией в виде функции максимума p квадратичных функций при q квадратичных ограничениях-неравенствах:

$$f^* = \inf_{x \in R^n} \max_{1 \le i \le p} \left\{ f_i(x) = \frac{1}{2} x^T A_i x + a_i^T x + \sim_i \right\}, \quad (1)$$

$$g_i(x) = \frac{1}{2} x^T B_j x + b_j^T x + \quad_j \le 0, \quad j = 1, \ldots, q, \quad (2)$$

где A_i, $i = 1, \ldots, p$, и B_j, $j = 1, \ldots, q$ – симметричные матрицы размерностью $n \times n$ с одинаковыми собственными векторами;

a_i, $i=1,\dots,p$, и b_j, $j=1,\dots,q$, – n-мерные векторы, α_i, $i=1,\dots,p$, и β_j, $j=1,\dots,q$, – вещественные числа. Для решения задачи (1) – (2) в [1] построена ее SOCP-релаксация и получено достаточное условие, когда она будет точной, т. е. $f_{SOCP}=f^*$ (значения глобальных экстремумов исходной задачи и ее SOCP-релаксации совпадают).

Теорема 1 [теорема 2.1, 1]. Если в задаче (1) – (2) множество $E(f_1,f_2,\dots,f_p,g_1,g_2,\dots,g_q)$ выпукло и замкнуто, то $f_{SOCP}=f^*$. ■

Множество $E(f_1,f_2,\dots,f_p,g_1,g_2,\dots,g_q)$ в формулировке теоремы 1 определяется следующим образом

$$E(f_1,f_2,\dots,f_p,g_1,g_2,\dots,g_q)=$$
$$=\{(y,z)\in R^p\times R^q:\exists x\in R^n \text{ such that } f_i(x)\le y_i, i=1,\dots,p,$$
$$\text{and } g_j(x)\le z_j,\ j=1,\dots,q\}.$$

Условие точности, сформулированное в виде теоремы 1, достаточно жесткое. Поэтому далее предлагается исследовать точность другого подхода для решения задачи (1) – (2) – построение эквивалентной квадратичной постановки для задачи (1) – (2) и нахождение для этой постановки двойственной оценки ψ^* [2] (лагранжева релаксация по всем ограничениям). Хотя вычисление двойственной оценки сложнее, чем решение SOCP-задачи, ее значение, как правило, более точное по отношению к f^*, и, что более интересно в данном случае, для нее можно сформулировать достаточное условие нулевого разрыва двойственности (т. е. условия, когда $\psi^*=f^*$), не зависящее от знаков собственных чисел матриц A_i, $i=1,\dots,p$, и B_j, $j=1,\dots,q$, существенно влияющих на выпуклость множества $E(f_1,f_2,\dots,f_p,g_1,g_2,\dots,g_q)$, на которой базируется теорема 1.

Для получения двойственной квадратичной оценки заменим исходную задачу (1) – (2) очевидной эквивалентной квадратичной экстремальной задачей

$$f^*=\inf_{t\in R^1,x\in R^n} t, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}x^TA_ix+a_i^Tx+\alpha_i\le t,\ i=1,\dots,p, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}x^TB_jx+b_j^Tx+\beta_j\le 0,\ j=1,\dots,q, \tag{5}$$

которую и будем исследовать в данной работе. Учитывая, что все матрицы задачи имеют одинаковые собственные числа, без ограничения общности можно считать, что они имеют диагональный вид:

$$A_i=diag(A_{i1},A_{i2},\dots,A_{in}),\ i=1,\dots,p,$$
$$B_j=diag(B_{j1},B_{j2},\dots,B_{jn}),\ j=1,\dots,q,$$

где A_{ik}, $i = 1,\ldots,p$, $k = 1,\ldots,n$, и B_{jk}, $j = 1,\ldots,q$, $k = 1,\ldots,n$, – вещественные числа.

В работе [3] для квадратичной экстремальной задачи общего вида

$$f^{*} = f_0(x^{*}) = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x), \qquad (6)$$

где $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ},\ f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}\}$, $f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$, – квадратичные функции в n-мерном пространстве, $m = \left|I^{LQ}\right| + \left|I^{EQ}\right|$, сформулирован критерий получения точной двойственной оценки $\cdot^{*}$ ($\cdot^{*} = f^{*}$), которая определяется следующим образом [2]:

$$\psi^{*} = \sup_{u \in R^m} \left(\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(u,x) \right) \le f^{*}, \qquad (7)$$

при ограничениях

$$A(u) \succ= 0,$$

$$u \in U^{+} = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LQ}, u \in R^m\},$$

где $L(u,x) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функция Лагранжа для задачи (6), $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i$, $b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i$, $m = \left|I^{LQ}\right| + \left|I^{EQ}\right|$, $A \succ= 0$ ($A \succ 0$) обозначает неотрицательно (положительно) определенную матрицу A.

Для того, чтобы сформулировать этот критерий введем обозначение Γ^{+} для множества граничных точек множества $\{u : A(u) \succ= 0, u \in R^m\}$, удовлетворяющих условию $u_i \ge 0$, $i \in I^{LQ}$, и определим для каждого $u \in \Gamma^{+}$ множество

$$J(u) = \{j : \lambda_j(u) = 0, j \in \{1,\ldots,n\}\},$$

где $\lambda_j(u)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ – собственные числа матрицы $A(u)$. Обозначим $\xi_j(u)$ – собственные вектора, соответствующие собственным числам $\lambda_j(u)$.

Теорема 2 [9]**.** Если существуют такой вектор p и такое положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \Gamma^{+} \ \ \exists j \in J(u) \ \text{такое, что} \ \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \ne 0, \qquad (8)$$

то двойственная оценка ψ^{*} (7) для квадратичной экстремальной задачи (6) точная ($\psi^{*} = f^{*}$). Причем, если условие (8) выполняется при $p = 0$, то вектор

$$x^{*} = x(u^{*}) = -A^{-1}(u^{*}) b(u^{*}) / 2$$

решения задачи (7) является и решением задачи (6). ■

Воспользуемся теоремой 2 для исследования случаев, когда для квадратичной задачи (3) – (5), которая эквивалентна рассматриваемой в данной работе невыпуклой сепарабельной задаче (1) – (2), двойственный подход гарантирует нахождение оптимального значения ее целевой функции (т. е. когда $\psi^* = f^*$).

Функция Лагранжа задачи (3) – (5) равна

$$L(x,t,u,v) = t + \sum_{i=1}^{p} v_i \left(\frac{1}{2} x^T A_i x + a_i^T x + \alpha_i - t \right) + \sum_{j=1}^{q} u_j \left(\frac{1}{2} x^T B_j x + b_j^T x + \beta_j \right) =$$

$$= \left(1 - \sum_{i=1}^{p} v_i \right) t + x^T A(u,v) x + b^T(u,v) x + c(u,v),$$

где

$$A(u,v) = diag\left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk} \right), k = 1,\dots,n \right),$$

$$b(u,v) = \sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j, \quad c(u,v) = \sum_{i=1}^{p} v_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} u_j \beta_j,$$

$$u, v \geq 0.$$

По переменной t квадратичный член отсутствует. Поэтому точки эффективного множества должны удовлетворять условию равенства нулю коэффициента при линейном члене по t (иначе решение внутренней задачи равно $-\infty$)

$$\sum_{i=1}^{p} v_i = 1.$$

При выполнении этого условия переменная t «исключается» из задачи нахождения двойственной оценки и далее будем «работать» с функцией $L(x,0,u,v)$ (по этой причине и матрица $A(u,v)$, и вектор $b(u,v)$ были выписаны только из расчета переменных x).

Все собственные векторы матрицы $A(u,v)$ направлены по координатным осям и не зависят от двойственных переменных, а собственные числа равны

$$\lambda_k(u) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{ik} \right), \ k = \overline{1,n}.$$

Таким образом, для задачи (3) – (5)

$$\Gamma^+ = (\bar{D} \setminus D) \cap U^+ = \left\{ u,v : \min_{k=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk} \right) = 0; \sum_{i=1}^{p} v_i = 1; u,v \geq 0 \right\}.$$

Путем подстановки в неравенство условия (8) при $p = 0$ соответствующих значений параметров задачи (3) – (5) имеем

$$\xi_k^T(u,v) b(u,v) = e_k^T \left(\sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j \right) \neq 0,$$

где $\xi_k(u) = e_k$, $k = \overline{1,n}$, – собственные векторы матрицы $A(u,v)$, e_k – n-мерный вектор, k-я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю.

Таким образом, условие (8) при $p = 0$ для задачи (3) – (5) примет вид

$$\forall u,v \in \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \min_{k=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk} \right) = 0; \sum_{i=1}^{p} v_i = 1; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

$$\exists k \in J(u,v) \text{ такое, что } e_k^T \left(\sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j \right) \neq 0. \quad (9)$$

Пусть для некоторого $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in (\overline{D} \setminus D) \cap U^+$ равно нулю $\tilde{k}$-е собственное число матрицы $A(u,v)$: $\min_{k=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk} \right) = \sum_{i=1}^{p} v_i A_{i\tilde{k}} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{j\tilde{k}} = 0$. Один из способов удовлетворить условие (9) – потребовать, чтобы $e_{\tilde{k}}^T \left(\sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j \right) \neq 0$ независимо от значения вектора $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$. Другими словами, чтобы $\tilde{k}$-я координата конической комбинации векторов $\{a_i, i = \overline{1,p}; b_j, j = \overline{1,q}\}$ никогда не принимала бы значение ноль. Это возможно, когда $\tilde{k}$-е координаты всех векторов $\{a_i, i = \overline{1,p}; b_j, j = \overline{1,q}\}$, одного знака (поскольку $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$). Таким образом, обобщая сказанное на все $\tilde{k} \in \{1,\dots,n\}$, получаем, что условие (9) при $p = 0$ выполняется, если все векторы $\{a_i, i = \overline{1,p}; b_j, j = \overline{1,q}\}$, расположены в одном открытом ортанте.

Таким образом, доказан следующий результат.

Утверждение 1. Если $\{a_i, i = \overline{1,p}; b_j, j = \overline{1,q}\}$ в задаче (1) – (2) расположены в одном открытом ортанте, то значение двойственной оценки задачи (3) – (5) совпадает со значением ее глобального минимума f^* и точка решения $x^* = -A^{-1}(u^*,v^*)b(u^*,v^*)/2$. ■

О.А. Березовський

ПРО ОДНУ ОЦІНКУ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНОЇ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Досліджуються неопуклі сепарабельні мінімаксні задачі квадратичної оптимізації. Отримано достатню умову знаходження значення і точки глобального екстремуму задачі даного класу шляхом знаходження двоїстої оцінки еквівалентної квадратичної екстремальної задачі.

O.A. Berezovskyi

ON AN ESTIMATE FOR QUADRATIC OPTIMIZATION SEPARABLE MINIMAX PROBLEM

Quadratic optimization non-convex separable minimax problems are studied. We obtain a sufficient condition for finding the value and the point of the global extremum for the problem of a given class by finding a dual estimate for the equivalent quadratic extremal problem.

Список литературы

1. Jeyakumar V., Li G. Exact Second-Order Cone Programming Relaxations for Some Nonconvex Minimax Quadratic Optimization Problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2018. Vol. 28, Iss. 1. P. 760–787.
2. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p.
3. Березовский О.А. Нулевой разрыв двойственности в квадратичных экстремальных задачах. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. С. 20–25.
4. Березовский О.А. Критерии точности SDP-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 6. С. 95 – 101.
5. Burer S., Anstreicher K.M. Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems. *SIAM Journal on Optimization*. 2013. Vol. 23, Iss. 1. P. 432–451.
6. Beck A., Eldar Y.C. Strong duality in nonconvex quadratic optimization with two quadratic constraints. Technion-IIT, Department of Electrical Engineering, 2005.
7. Jeyakumar V., Li G. Trust-region problems with linear inequality constraints: exact SDP relaxation, global optimality and robust optimization. *Mathematical Programming*. 2014. Vol. 147, Iss. 1. P. 171 – 206.
8. Jeyakumar V., Li G. Y. Strong duality in robust convex programming: complete characterizations. *SIAM Journal on optimization*. 2010. Vol. 20, Iss. 6. P. 3384 – 3407.
9. Березовский О.А. О решении одной специальной оптимизационной задачи, связанной с определением инвариантных множеств динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 3. С. 33 – 40.

Получено 20.03.2019

Об авторе:

Березовский Олег Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: o.a.berezovskyi@gmail.com