КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Системный анализ

Методом сингулярных интегральных уравнений решена задача о взаимодействии стационарных гармонических волн плоской деформации с неподвижным жестким включением произвольного поперечного сечению в бесконечной упругой среде. С повышенной точностью получены значения максимальных контурных напряжений.

УДК 519.6, 539.3

Б.Е. ПАНЧЕНКО, Ю.Д. КОВАЛЕВ, И.Н. САЙКО

ВЫСОКОТОЧНЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ВОЛН С НЕПОДВИЖНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Введение. Задачи математической физики для круговых цилиндров различной природы рассмотрены в [1 – 8]. Дифракция плоских гармонических волн на эллиптическом неподвижном включении исследована в [3]. В случае неоднородностей сложной геометрической формы эффективно работает метод интегральных уравнений [3, 10 – 15]. В работе [12] этим методом впервые исследована задача о взаимодействии плоских гармонических волн с упругим включением в бесконечной изотропной среде. В данной работе методом сингулярных интегральных уравнений исследованы напряжения на контуре неподвижного цилиндрического включения произвольного поперечного сечения, находящегося под воздействием плоских гармонических волн. Указанные характеристики получены с повышенной точностью [14, 16, 17].

Постановка задачи. Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечный вдоль оси OZ неподвижный цилиндр [12 – 15], поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова. В качестве внешнего воздействия на неоднородность будем рассматривать набегающую из бесконечности монохроматическую волну расширения-сжатия (P-случай)

$$U_0 = 0\,, V_0 = \mathrm{Re}\{\tau e^{-i\gamma_1 y - i\omega t}\}\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}\,, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \qquad (1)$$

или волну сдвига (SV-случай)

$$U_0 = \mathrm{Re}\{\tau e^{-i\gamma_2 y - i\omega t}\},\ V_0 = 0,\ \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2},\ c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \tag{2}$$

Здесь τ – амплитуда падающей волны, c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн, ω – частота колебаний, t – время, λ и μ – постоянные Лямэ, ρ – плотность среды, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

При взаимодействии волны с неоднородностью возникают отраженные волны двух типов (продольные и поперечные), причем другие типы волн не образуются. Пусть $u = \mathrm{Re}\{\tau e^{-i\omega t} U_1(x,y)\}$ и $v = \mathrm{Re}\{\tau e^{-i\omega t} V_1(x,y)\}$ – смещения отраженного поля. Тогда общее поле амплитуд перемещений соответствует сумме

$$U = U_0 + U_1,\ V = V_0 + V_1. \tag{3}$$

Предполагается, что поперечное сечение отражателя описывается гладкой замкнутой кривой L, в точках которой удовлетворяются граничные условия. В случае неподвижного включения (отверстия с защемленным контуром) они имеют вид [12].

$$U\big|_L = V\big|_L = 0. \tag{4}$$

В случае установившихся волновых колебаний изотропной среды (зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$) амплитудные значения отраженных волн перемещений удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho\omega^2 U = 0,$$

$$\mu\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho\omega^2 V = 0. \tag{5}$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений U и V формулами

$$\tau_x + \tau_y = 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial(U+iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U-iV)}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$\tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy} = -4\mu\frac{\partial(U-iV)}{\partial z},$$

$$\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy} = -4\mu\frac{\partial(U+iV)}{\partial \bar{z}}. \tag{6}$$

Следуя методике решения краевых задач, впервые примененной для описанной постановки в [12], построим систему СИУ 1-го рода. Пусть L – некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L. Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом:

$$2i(S_1 + iS_2) = (\tau_x + \tau_y)e^{i\phi_0} + (\tau_y - \tau_x - 2i\tau_{xy})e^{-i\phi_0},$$

$$-2i(S_1 - iS_2) = (\tau_x + \tau_y)e^{-i\varphi_0} + (\tau_y - \tau_x + 2i\tau_{xy})e^{i\varphi_0}, \tag{7}$$

где φ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью Ox.

На границе тела представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений τ_{s_0}, τ_{n_0}, $\tau_{n_0 s_0}$, которые будем находить по формулам:

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin\varphi_0 - S_2 \cos\varphi_0, \ \ \tau_{n_0 s_0} = S_1 \cos\varphi_0 + S_2 \sin\varphi_0, \ \ \tau_{s_0} = (\tau_x + \tau_y) - \tau_{n_0}. \tag{8}$$

Будем строить интегральные представления амплитуд перемещений U_1 и V_1 так, чтобы они автоматически удовлетворяли уравнениям движения (5) и условиям излучения на бесконечности, т. е., чтобы они представляли собой расходящиеся волны. Следуя [12], представим U_1 и V_1 в виде потенциалов типа простого слоя:

$$U_1(x,y) = \int_L \{ f_1(s) G_{11}(s,s_0) + f_2 G_{12}(s,s_0)\} ds,$$

$$V_1(x,y) = \int_L \{ f_1(s) G_{21}(s,s_0) + f_2 G_{22}(s,s_0)\} ds,$$

$$z = x + iy, \ \ \zeta = \xi + i\eta \in L. \tag{9}$$

Здесь $f_1(s)$ и $f_2(s)$ – неизвестные функции, G_{mn} – компоненты матрицы Грина (m, n = 1, 2), удовлетворяющие соотношениям [12]

$$G_{11} + iG_{21} = d\left(\frac{k}{4}\Phi_{20} - c\Phi_{00}\right), \ \ G_{11} - iG_{21} = \frac{d}{4} e^{-2i\alpha}\Phi_{22},$$

$$G_{12} + iG_{22} = \frac{d}{4} e^{2i\alpha}\Phi_{22}, \ \ G_{12} - iG_{22} = d\left(\frac{k}{4}\Phi_{20} - c\Phi_{00}\right),$$

$$d = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \ \ k = 3 - 4\nu, \ \ c = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\gamma_2^2,$$

$$z - \zeta = re^{i\alpha}, \ \ \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k \mathrm{H}_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k \mathrm{H}_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \tag{10}$$

где $\mathrm{H}_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1-го рода j-го порядка.

Анализ формул (10) показывает, что функции $G_{11} - iG_{21}$ и $G_{12} + iG_{22}$ непрерывны в нуле, а функции $G_{11} + iG_{21}$ и $G_{12} - iG_{22}$ обладают логарифмической особенностью:

$$G_{11} + iG_{21} = G_{12} - iG_{22} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi} \ln r + \ldots$$

По этой причине подстановка представлений (9) в граничные условия (4) сводит краевую задачу к системе двух СИУ с логарифмическими ядрами, численная реализация которых затруднительна.

Для получения системы СИУ с ядром типа Коши [10 – 12] представления (9) дифференцировались по дуговой координате s_0. Имеем

$$\left.\frac{d(U+iV)}{ds_0}\right|_L=\left.\frac{d(U-iV)}{ds_0}\right|_L=0,$$

$$\left.\frac{dW}{ds_0}\right|_L=\left(\frac{\partial W}{\partial z}e^{-i\phi_0}+\frac{\partial W}{\partial \overline{z}}e^{-i\phi_0}\right)_{z\to\zeta_0},\quad \overline{z}=x-iy. \tag{11}$$

Вычисление необходимых для (11) производных дает

$$\frac{\partial}{\partial z}(G_{11}+iG_{21})=-\frac{d}{8}\left(k\Phi_{31}-4c\Phi_{11}\right)e^{-i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(G_{11}-iG_{21})=\frac{d}{8}\Phi_{31}e^{-i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(G_{12}+iG_{22})=\frac{d}{8}\Phi_{31}e^{i\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(G_{12}-iG_{22})=-\frac{d}{8}\left(k\Phi_{31}-4c\Phi_{11}\right)e^{i\alpha}. \tag{12}$$

Можно показать, что ядро Φ_{11}, определенное в (10), является непрерывным, а ядро Φ_{31} – сингулярно ($\Phi_{31}=\frac{2i}{\pi r}+F_{31}$, где F_{31} – непрерывно).

Подставляя (12) в граничные условия (11), приходим к системе СИУ 1-го рода [12 – 15]

$$\int_L f_1(s)B_{11}(s,s_0)+f_2B_{12}(s,s_0)ds=N_1(s_0),$$

$$\int_L f_1(s)B_{21}(s,s_0)+f_2B_{22}(s,s_0)ds=N_2(s_0). \tag{13}$$

$$B_{11}=-d\left[\frac{k}{2\pi i}\frac{\cos(\varphi_0-\alpha)}{r_0}+\left(\frac{k}{4}F_{31}-c\Phi_{11}\right)\cos(\varphi_0-\alpha)\right],$$

$$B_{12}=d\left[\frac{1}{4\pi i}\frac{e^{i\varphi_0}-e^{i(2\alpha-\varphi_0)}}{\overline{\zeta}-\overline{\zeta}_0}+\frac{1}{8}\left(F_{31}e^{i(\varphi_0+\alpha)}-F_{33}e^{i(3\alpha-\varphi_0)}\right)\right],$$

$$B_{21}=d\left[\frac{1}{4\pi i}\frac{e^{-i\varphi_0}-e^{-i(2\alpha-\varphi_0)}}{\zeta-\zeta_0}+\frac{1}{8}\left(F_{31}e^{-i(\varphi_0+\alpha)}-F_{33}e^{-i(3\alpha-\varphi_0)}\right)\right],$$

$$B_{22}=-d\left[\frac{k}{2\pi i}\frac{\cos(\varphi_0-\alpha)}{r_0}+\left(\frac{k}{4}F_{31}-c\Phi_{11}\right)\cos(\varphi_0-\alpha)\right],$$

$$\Phi_{31}=\frac{2i}{\pi r_0}+F_{31},\quad \Phi_{33}=\frac{2i}{\pi r_0}+F_{33},\quad \zeta_0-\zeta=re^{i\alpha},\quad e^{i\phi_0}=\frac{d\zeta_0}{ds_0},$$

$$N_1(s_0)=-N_2(s_0)=-\gamma_1\tau e^{-i\gamma_1\eta_0}\sin\varphi_0 \text{ в } P\text{-случае},$$

$$N_1(s_0)=N_2(s_0)=i\gamma_2\tau e^{-i\gamma_2\eta_0}\sin\varphi_0 \text{ в } SV\text{-случае}.$$

Переменные d, k, c и Φ_{kj} заданы выше.

В работах [10, 11] показано, что необходимые дополнительные условия для разрешимости сингулярных интегральных уравнений 1-го рода (13) вытекают из равенства нулю смещений на L в некоторой фиксированной точке s_* или из равенства нулю средних смещений на L. В последнем случае имеем (l – длина контура L)

$$\frac{1}{l}\int_L\int_L \{ f_1(s)L_{11}(s,s_0) + f_2 L_{12}(s,s_0)\} ds ds_0 = A_1,$$
$$\frac{1}{l}\int_L\int_L \{ f_1(s)L_{21}(s,s_0) + f_2 L_{22}(s,s_0)\} ds ds_0 = A_2. \quad (14)$$

$$L_{11} = G_{11} + iG_{21},\ \ L_{12} = G_{12} + iG_{22},\ \ L_{21} = G_{11} - iG_{21},\ \ L_{22} = G_{12} - iG_{22},$$

$$A_1 = -A_2 = -\frac{1}{l}\int_L \tau i e^{-i\gamma_1\eta_0} ds_0 \qquad \text{в } P\text{-случае},$$

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{l}\int_L \tau i e^{-i\gamma_2\eta_0} ds_0 \qquad \text{в } SV\text{-случае}.$$

В работе [13] применялось дополнительное условие как в одной точке контура [10, 11], так и интегральное. Результаты получены стабильные, но разные. Этот факт отличается от выводов работ [10, 11] Данный результат говорит не о точности вычислительной схемы, а о том, что разные типы дополнительного условия определяют разные математические модели, соответствующие разным задачам.

Результаты численных исследований. Для численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод, теоретически обоснованный в работах [10, 11] и основанный на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем вычислении интегралов с непрерывными и сингулярными ядрами.

Для исследования достоверности полученной модели рассматривалось пространство, содержащее цилиндрическое неподвижное включение эллиптического поперечного сечения, аналогичное описанному в работе [3]. В работе [13] приведены доказательные сравнения полученных результатов.

$$\xi = a\cos\beta,\ \ \eta = b\sin\beta,\ \ 0 \le \beta \le 2\pi. \quad (15)$$

На контуре включения проводилось вычисление напряжений как в [3]:

$$\sigma_n = \left|\tau_{n_0}\right| / P,\ \ \sigma_{n\beta} = \left|\tau_{n_0 s_0}\right| / P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений τ_{n_0}, $\tau_{n_0 s_0}$ находились по формулам (8), P – максимальное значение напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1\tau(\lambda + 2\mu)$ в случае излучения P-волны (1) и $\gamma_2\tau\mu$ – в случае излучения SV-волны (2).

На рис. 1 показаны графики распределения амплитудных значений соответствующий контурных напряжения σ_n (рис. 1, а) и $\sigma_{n\beta}$ (рис. 1, б) для *P*-волны, которая распространяется вдоль оси *OX*. Тут кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра $\nu = 0.2; 0.3; 0.4$ при $b/a = 2$ и $\gamma_1 a = 1$.

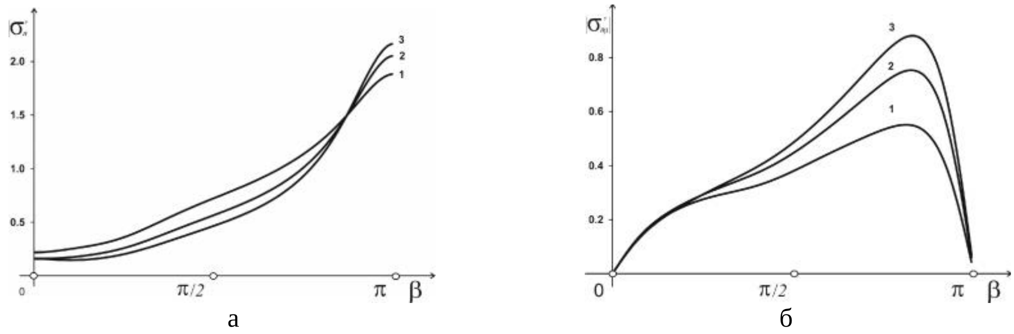

РИС. 1. Контурные напряжения

На рис. 2 показаны графики распределения амплитудных значений соответствующий контурных напряжения σ_n для *SV*-волны. Тут кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют значениям параметра $b/a = 5; 2; 1; 0.5$ при $\nu = 0.3$ и $\gamma_2 a = 1.0$. На рис. 2, а показаны результаты для схемы распространения волны вдоль оси *OX*, а на рис. 2, б – вдоль оси *OY*. Обращает внимание взаимно-обратный ход нумерации кривых, что говорит о смене тенденций распределения напряжений при схеме обтекания «вдоль» отражателя и «поперек». Очевидно, что на рисунках кривые 3 идентичны и соответствуют окружности контура обтекателя.

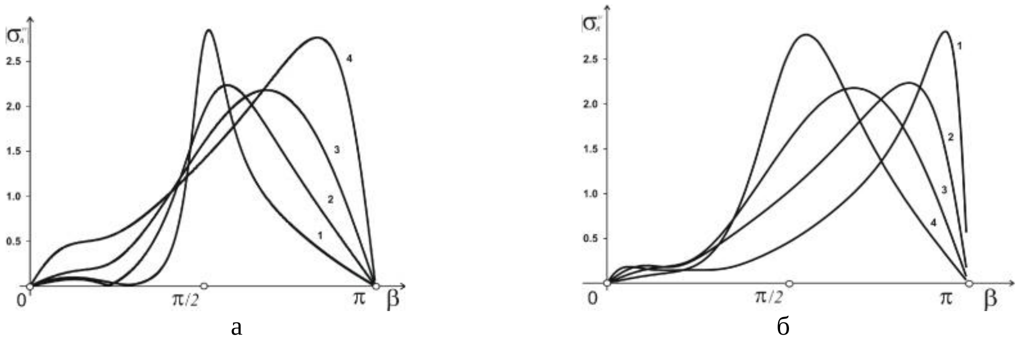

РИС. 2. Контурные напряжения

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать уникальную таблицу высокоточных значений (до 10^{-9}) максимумов напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптической неподвижной шайбы. По мнению авторов, такая таблица сформирована впервые.

ТАБЛИЦА

Тип напря-жения	Тип волны	b / a	$\gamma_{1,2}a$	Угол β в радианах	Значение максимума
$\sigma_{n\beta}$	*SV*	2.5	1.0	3.568418043	0.768847265
$\sigma_{n\beta}$	*SV*	2.5	1.7	3.575753080	0.692199102
$\sigma_{n\beta}$	*SV*	5.0	1.0	2.936553365	0.892519995
$\sigma_{n\beta}$	*SV*	5.0	1.7	3.349197404	0.771068955
$\sigma_{n\beta}$	*P*	2.5	1.0	π	3.912802208
$\sigma_{n\beta}$	*P*	2.5	1.7	π	5.581266807
$\sigma_{n\beta}$	*P*	5.0	1.0	π	5.058362558
$\sigma_{n\beta}$	*P*	5.0	1.7	π	7.036265048
σ_n	*SV*	2.5	1.0	π	2.108209816
σ_n	*SV*	2.5	1.7	π	2.015249855
σ_n	*SV*	5.0	1.0	π	2.352339483
σ_n	*SV*	5.0	1. 7	π	2.157445727
σ_n	*P*	2.5	1.0	2.728934906	2.329773281
σ_n	*P*	2.5	1.7	3.551254281	3.464610649
σ_n	*P*	5.0	1.0	3.344222974	2.812280920
σ_n	*P*	5.0	1. 7	3.344465718	4.034423103

Б.Є. Панченко, Ю.Д. Ковальов, І.М. Сайко

ВИСОКОТОЧНІ МАКСИМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ З НЕРУХОМИМ ВКЛЮЧЕННЯМ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв’язано задачу про взаємодію стаціонарних гармонічних хвиль плоскої деформації з нерухомим включенням з поперечним перетином довільної формі у нескінченному пружному середовищі. З підвищеною точністю отримано значення максимальних контурних напружень.

B.Ye. Panchenko, Yu.D. Kovalev, I.N. Saiko

HIGH-PRECISION MAXIMUM STRESSSES IN THE PROBLEM OF THE INTERACTION OF ELASTIC WAVES WITH A RIGID INCLUSION UNDER PLANE STRAIN

The problem of interaction of stationary harmonic plane strain waves with a rigid inclusion of an arbitrary cross-section in an infinite elastic medium is solved using the method of singular integral equations. The values of maximum contour stresses are obtained with extra high precision.

Список литературы

1. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. К.: Наукова думка, 2012. 204 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. К.: Наук. думка, 1978. 307 с.
3. Shibahara M., Tateno S., Kuroyanagi O. Diffraction of Steady Stress Waves by Arbitrary Shaped Discontinuities in Elastic Medium. *Bulletin of the JSME*, April 1980. Vol. 23, N 178/
4. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. *Society for Industrial and Applied Mathematics.* Philadelphia, 2013. 271 p.
5. Jain D.L., Kanwal R.P. Scattering of elastic waves by circular cylindrical flaws and inclusion. *J. Appl. Phys*., 1979, 50, N 6.
6. Bostrom A. Scattering by a smooth elastic obstacle. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. Vol. 7, Vol. 6. P. 1904 – 1913.
7. Mow C.C., Pao Y.-H. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. New York, Rand-report, 1971. 681 p.
8. Pao Y.-H. Elastic Waves in Solids, ASME. *J. Applied Mechanics*, 1983. **50**, P. 1152 – 1164.
9. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
10. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. К.: Наук. думка, 1984. 344 с.
11. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, 3-е изд.М.: Наука, 1968. 513 с.
12. Панченко Б.Е. Решение двумерных задач дифракции упругих волн на цилиндрических неоднородностях: дисс. ... канд.физ.-мат. наук. Сумы. 1996. 125 с.
13. Панченко Б.Е., Ковалев Ю.Д., Сайко И.Н. О численном исследовании систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом. Труды V Междунар. конф. HPC-UA 2018. Киев, октябрь 22 – 23, 2018. С. 111.
14. Панченко Б.Е. Сайко И.Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 5. С. 139 – 148.
15. Назаренко А.М. Ложкин А.М., Панченко Б.Е. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения. Донецьк: Вiсник ДонНУ. Сер. А: *Природничi науки*. 2006. № 1. С. 143 – 147.
16. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD-компьютера «Инпарком». Киев: Наукова думка, 2007. 220 с.
17. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. Киев: Наукова думка, 2008. 247 с.

Получено 18.04.2019

Об авторах:

Панченко Борис Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
профессор Одесской Национальной академии связи им. О.С. Попова,
старший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Ковалев Юрий Дмитриевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент Одесской Национальной академии связи им. О.С. Попова,

Сайко Игорь Николаевич,
кандидат технических наук, научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.