КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.85

В.І. ПЕТРЕНЮК, Д.А. ПЕТРЕНЮК

НОВА ВЕРХНЯ МЕЖА НЕОРІЄНТОВАНОГО РОДУ СКЛЕЙКИ ПРОСТИХ ГРАФІВ

Наведено нову верхню межу неорієнтованого роду склейки двох простих графів заданого роду без спільних ребер.

Вступ. Основні позначення взяті з [1, 2]. Нехай 2-многовид S без країв неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S')\geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S')+r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r>0$, наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S')=0$ і $r=2$, чи поверхня S роду $\tilde{\gamma}(S)=3$ матиме S' тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення f, $f: G\to S$, графа G в S та заданої множини точок X, $X\subset G^0\cup G^1$ визначимо $t_G(X,S,f)$, $t=t_G(X,S,f)$, число досяжності множини X відносно S, якщо існує множина $S_G(X)$, $S_G(X) = S\setminus f(G)$, $S_G(X)=\{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X)\subseteq\bigcup_{i=1}^{t}\partial s_i\cap X)\wedge(f(X)\not\subset \bigcup_{i=1,i\neq j}^{t}\partial s_i\cap X)$, $j=1,2,\dots,t$. Будемо говорити, що множина X має число досяжності t, $t_G(X,S)=t$, відносно S, якщо серед всіх неізоморфних вкладень f, $f:G\to S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X,S,f)$. Вважатимемо надалі, що $\bar{\gamma}$ позначено γ.

Визначення 1. Нехай задано вкладення f, $f:G\to S$, графа G в S, яке реалізує t, $t_G(X,S)=t$, де $S_G(X)=S\setminus f(G)$, $S_G(X)=\{s_i\}_1^t$.

Будемо говорити, що відносно заданої поверхні S множина X матиме характеристику $\theta_G(X,S,f)$, $\theta_G(X,S,f)=\theta$, $\theta\geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини X_i, $X_i\subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню: $G^0\cap\partial s_1\cap\partial s_2\supseteq\{a_1\}\wedge G^0\cap\partial s_2\cap\partial s_3\supseteq\{a_2\}\wedge G^0\cap\partial s_1\cap\partial s_3\supseteq\{a_3\}$, та породжує найменший за включенням підграф G' графа G (можливо вироджений у точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$. Множина X матиме характеристику $\theta_G(X)$, якщо $\theta_G(X)=\max\theta_G(X,f)$, де максимум береться за всіх вкладень f , $f:G\to S$, що реалізують $t_G(X)=t$, $\gamma\left(G\right)=0$, $\theta=\theta_G(X)$, $\theta\in\{0,1\}$, θ – описує деякі структурні властивості множини точок X, що розташована на границях граней графа G.

Визначення 2. Нехай задане вкладення f, $f:G\to S$, графа G в S, $S_G(X)=S\setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X)=0$. Будемо говорити, що множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X,f)$, $\partial\theta=\partial\theta_G(X,f)$, $\partial\theta\geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i,s_j,s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням $G^1\cap\partial s_i\cap\partial s_j\supset\{(a_1,b_1)\}$ і $G^1\cap\partial s_k\cap\partial s_j\supset\{(a_2,b_2)\}$, для всіх $i\neq j\neq k$, $i, j, k=1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i,\partial s_j,\partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1,b_1), (a_2,b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j\setminus L(a_1,a_2)\cup\{(a_2,a_{20}),(a_1,a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00}. $L(a_1,a_2)$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вироджених у точку, $L_1(a_1,a_{12})$, $L_1(a_2,a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k, відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}). Клітка s_{00}, $s_{00}\in(S\setminus f(G))\setminus(S_G(X)\cup\{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10},a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j. Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X,S)$, якщо $\partial\theta_G(X,S)=\max\partial\theta_G(X,S,f)$, де максимум з неізоморфних вкладень f, $f:G\to S$, що реалізують $t_G(X,S)=t$ та $\theta_G(X,S)$.

Твердження 1. Нехай для графа G, вкладеного в поверхню S – неорієнтованого роду, на множині $S_G(X)$ задано відношення інцидентності наявністю, принаймні, однієї спільної точки на границях двох кліток. Мають місце наступні співвідношення: 1, а). Якщо S – проективна площина, то визначення 1 та 2 не виконуються в загальному випадку, лише визначення 2 задовольняється тоді, коли клітка s_0 має на ∂s_0 тільки одне ребро графа G, що не належить до $\partial s_i \cap G^1$, $i = 1, 2, 3;$;1, б). Якщо S – пляшка Клейна, то визначення 1 та визначення 2 виконуються в загальному випадку; 2. Якщо S – неорієнтованого роду $\gamma(S)$, $\gamma(S) > 2$, то визначення 1 та 2 виконуються в загальному випадку; 3. $\theta_G(X,S) + \partial\theta_G(X,S) \le \lceil t_G(X,S) - 2 \rceil$.

Доведення. 2-многовид S – неорієнтованого роду $\gamma(S)$, $\gamma(S) > 0$, являтиме собою проективну площину P із $\gamma(S) - 1$приклеєними лентами Мебіуса. Якщо $S = P$, то співвідношення 1 випливає з наступного. Припустимо $\theta(X,S) = 1$, тобто на проективній площині P є зіркова структура. У виродженому виді зіркову структуру описуватиме перша карта на рис. 1 тільки за умови, що навколо кліток s_1, s_3 немає інших кліток, які б мали спільні ребра із s_1, s_3. Це суперечитиме умові, що $t_G(\bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i \cap X) = 3$. Припущення неправильне для виродженої зіркової структури. На проективній площині не вироджену зіркову структуру описуватиме друга та третя карти на рис. 1 за умови, що три ребра трикутника (a,b,c) не входять до $L = \bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i \cap X$. Це суперечитиме умові, що $t_G(\bigcup_{i=1,3} \partial s_i \cap X) = 2$. Припущення неправильне для невиродженої зіркової структури.

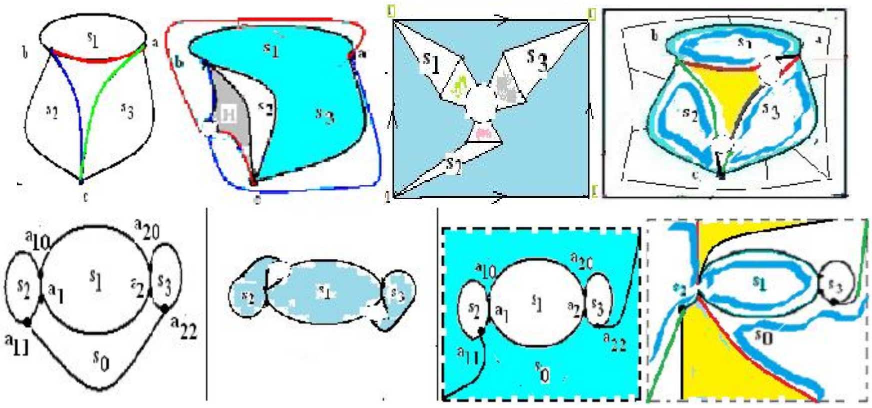

РИС. 1. На перших 4-х картах маємо зіркову кліткову структуру (лента Мебіуса – пунктирний овал), а на інших ланцюжкову кліткову структуру на пляшці Клейна

Для проективної площини співвідношення 1, а) доведено. Доведення співвідношення 1, а) стосовно визначення 2 випливає з того, що на проективній площині ланцюгова кліткова структура, (показана на 4, 5, 6 картах рис. 1) задовольняє визначенню 2 тільки тоді, коли інших внутрішніх граней графа G окрім кліток з множини $\{\partial s_i\}_{i=0}^{3}$ не буде, а на ∂s_0 є ребро графа G, можливо 1-підрозділене, яке не належить до $\bigcup_{i=1}^{3}\partial s_i$, а на ∂s є тільки одне ребро графа G, яке не належить до $\bigcup_{i=1}^{3}\partial s_i$, та на спільних ребрах немає точок множини X. Доведення співвідношення 1, а) закінчено. Доведемо співвідношення 1, б). Якщо S – пляшка Клейна, то визначення 1 та 2 виконуються, як це показано та перших трьох для зіркової кліткової структури та четвертій картах для ланцюгової кліткової структури в другому ряду рис. 1. Доведемо співвідношення 2. Оскільки 2-многовид S – неорієнтованого роду $\gamma(S)$, $\gamma(S) > 2$, то S являтиме собою тор із приклеєними $\left\lfloor \frac{\gamma(S)-1}{2} \right\rfloor$ 2-ручками та, принаймні, однією лентою Мебіуса. Тому на множини кліток $S_G(X,S)$ можливе виконання тих перетворень зіркової кліткової структури за визначенням 1, що виписані в алгоритмі_О [3] для орієнтованого 2-многовида, тобто матимемо нерівність $\theta_G(X,S) \geq 0$. Якщо $\theta_G(X,S) = 0$, то на множини кліток $S_G(X,S)$ можливе виконання перетворень за визначенням 2, що виписані в алгоритмі_О [3] тобто матимемо нерівність $\partial\theta_G(\mathrm{X},S) \geq 0$. Доведення співвідношення 3, тобто обчислення формальної суми, випливає із співвідношень 1, 2.

Наслідок 1. Перетворення множини кліток-граней графа G, вкладеного до 2-многовида S, виконані за визначеннями 1 та 2, трансформують елементи з $S_G(X)$ за алгоритмом_НО, не змінюючи сусідні з ними клітки.

Алгоритм_НО. Вхід. До 2-многовида S неорієнтованого роду вкладено граф G вкладенням f, $f: G \to S$, що реалізує $t_G(X,S) = t$ та $\theta_G(\mathrm{X},S) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$. Вважатимемо заданими функції _θ(M) та _∂ θ(M), які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, для M – множини кліток, впорядкованої відношенням суміжності на множині границь кліток з M.

Крок 0. Якщо $\theta = 0$, то переходимо до кроку 3, інакше, доки $\theta > 0$ виконувати циклічно наступні дії: початок циклу 1.

Крок 1. Для $S_G(X)$ використання характеристики θ для неорієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3$

із границями, що мають, принаймні, одну спільну вершину чи вони попарно мають спільні вершини, на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_{1}^{3} \partial s_i$, $S := S + h.$

Крок 2. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\};$ $\theta :=$ функція_$\theta(S_G(X))$, $\theta := \theta - 1;$ перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб перші три клітки з $S_G(X)$, для яких має місце визначення 1, мали номери 1, 2, 3; кінець циклу 1.

Крок 3. $\partial\theta :=$ функція_$\partial\theta(S_G(X))$, де $S_G(X)$ побудована циклом 1 множина кліток. Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо клітки з побудованої вищенаведеним циклом множини кліток $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, як $\{s_i\}_1^3$ та s_0. Якщо $\partial\theta = 0$, то переходимо до кроку 6, інакше, доки $\partial\theta > 0$ виконувати наступні дії: початок циклу 2.

Крок 4. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для неорієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h на заміну трьох клітин-граней $\{s_i\}_1^3$ із границями, де s_2 одна з трьох має два спільні ребра з двома іншими, та четвертої клітки s_0, $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$ на нову клітку-грань s поверхні на 1 більшого роду, що має границею $\partial s = \bigcup_{1}^{3} \partial s_i \setminus R$, де множина R складена, або з двох попарно спільних ребер без точок з множини X, або з тієї частини границі ∂s_2 , що не належить до границь $\partial s_1 \cup \partial s_2 \cup \partial s_0$ та без точок з множини X; $\gamma(S) := \gamma(S) + 1.$

Крок 5. $S_G(X) := (S_G(X) \setminus \{s_i\}_1^3) \cup \{s\}$; $\partial\theta :=$ функція_$\partial\theta(S_G(X)$, $\partial\theta := \partial\theta - 1.$ Якщо $\partial\theta > 0$, то перенумеруємо всі елементи нової множини $S_G(X)$ так, щоб три клітки $\{s_i\}_1^3$ та четверта s_0, для яких має місце визначення 2, мали номери 1, 2, 3, кінець циклу 2.

Крок 6. Виводимо $S_G(X)$ та множина X розташована на границях кліток-граней з множини $S_G(X)$, «перетвореної до нульових характеристик $\theta, \partial\theta$, 2-многовида неорієнтованого роду $\gamma(S)$», кінець алгоритму.

Твердження 2. Алгоритм_НО коректно перетворює 2-многовид S та вкладення $f : G \to S$ графа G в S, де $\gamma(G) \leq \gamma(S)$, в 2-многовид S' та вкладення $f' : G \to S'$ графа G в S',, де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом використання характеристик $\theta, \partial\theta$, множини точок X графа G та має поліноміальну часову складність.

Доведення. Згідно твердження 1 неорієнтований 2-многовид S може бути або проективною площиною, або тором чи орієнтовним 2-многовидом із приклеєною, принаймні, однією лентою Мебіуса. Алгоритм перетворення неорієнтованого 2-многовида S із вкладеним графом G в неорієнтований 2-многовид S', де $\gamma(S') > \gamma(S)$, шляхом приклеювання до S нових 2-ручок спирається на використання характеристики θ множини точок X графа G. Вважатимемо, що ручка h приклеєна до кліток $s', s'' \in S(G, f)$ і позначати її через $h(s', s'')$, якщо задано φ-перетворення φ' в такий спосіб: $\varphi'\big((s' \cup s'') \setminus (\tau' + \tau''), \partial\tau' + \partial\tau''\big) = \big(h, \tau^*\big)$, де τ', τ'' – такі регулярні двоклітки, що задовольняють $\tau' \subset s', \tau'' \subset s'', \partial\tau' \cap \partial\Delta s' = \partial\tau'' \cap s'' = \varnothing$. Вважатимемо заданими функцію_$\theta(M)$ та функцію_$\partial\theta(M)$, які визначають характеристики $\theta, \partial\theta$, відповідно, на множини кліток M, що впорядкована відношенням суміжності заданим на множині границь кліток з M, тобто якщо границі двох кліток мають принаймні спільну точку, то ці клітки суміжні.

Нехай до 2-многовиду S неорієнтованого роду $\gamma(S)$ вкладено граф G вкладенням f, $f: G \to S$, що реалізує $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S) = \theta$. Занумеруємо перші три клітки з $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 1, як підмножину $\{s_i\}_1^3$ та позначимо G' – найменший з включення підграф графа G, можливо вироджений в точку, який містить точки $\{s_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$, причому $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\}$ і $G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\}$, $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$. Розглянемо плаский диск d з центром в a_1 та нескінченно малим радіусом ε, який своєю границею перетинатиме ребра підграфа G', що інцидентні вершині a_1, у внутрішніх точках a_{1j}, де $j = 1, 2, \ldots. k$. Розщепимо кожну вершину a_{1j} на a'_{1j}, a'_{2j}, де $j = 1, 2, \ldots. k$ степеня 2. Цим розіб'ємо підграф G' на частинні підграфи G'_i, $i = 1, 2$, де G'_1 містить a'_{1j} та всі ребра (a_1, a'_{1j}), G'_2 містить a'_{2j}. Відображенням φ перевернемо на 180° підграф $f(G'_1)$ як множину образів ребер на поверхні, симетрично навколо вісі симетрії, яка є простим ланцюгом $L(a_2, a_3)$, , що проходить через a_2, a_3 та задовольняє умові: $f(G'_2) \cap \partial s_3 = f(G') \cap \partial s_3 = L(a_2, a_3)$. В результаті отримаємо підграф $\varphi f(G'_2)$ вкладений до $\overline{s_3}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$. Відображенням φ' вигнемо за часовою стрілкою на 180° всі висячі ребра інцидентні a'_{2j}, де $j = 1, 2, \ldots. k$, не змінюючи порядок слідування, і розмістимо їхні висячі вершини на лівій частині границі регулярної підклітки τ', де $\tau' \subset \overline{s_3} \setminus \varphi f(G_2^{'})$. В підграфі $f(G_2^{'})$ вкладеному до $\overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, де $\overline{s_3} = s_3 \cup \partial s_3$, відображенням φ'' поміняємо місцями ребра в парах виду $(a_{1j}^{'}, a_1)$, $(a_{1(k-j+1)}^{'}, a_1)$ для всіх j, $j = 1, 2, \ldots k$, та за часовою стрілкою розмістимо на правій частині границі регулярної підклітки τ'', де $\tau'' \subset (\overline{s_1} \cup \overline{s_2}) \setminus f(G_1^{'})$. Ототожнимо, за часовою стрілкою, пари вершин $(a_{1j}^{'}, a_{2j}^{'})$ у внутрішню точку $a_j^{'}$ деякого j-го ребра $(a_{1j}^{'}, a_j^{'}, a_{2j}^{'})$, для всіх j, $j = 1, 2, \ldots k$. Приклеєна ручка h до кліток $s' = \overline{s_3}$, $s'' = \overline{s_1} \cup \overline{s_2}$, $s', s'' \in S(G, f')$, позначена $h(s', s'')$, матиме вкладені відображенням φ''' склеєні половинки ребра $\varphi''\varphi'\varphi f((a_{1j}^{'}, a_j^{'}, a_{2j}^{'}))$, які розрізають її на клітки, де $j = 1, 2, \ldots k$. В результаті суперпозиції $\varphi'''\varphi''\varphi'\varphi f$ наведених вище відображень отримаємо вкладення f', $f': G \to S'$, $f' = \varphi'''\varphi''\varphi'\varphi f$, графа G до 2-многовиду S' орієнтованого роду $\gamma(G)+1$, причому $S'(G, f') =$ $= (S(G, f) \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \cup h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^{k} f'(a_{1j}^{'}, a_j^{'}, a_{2j}^{'})$, тобто тіж самі клітки, тільки замість s_1, s_2, s_3 буде клітка s, $s \in h(s', s'') \setminus \sum_{j=1}^{k} f'(a_{1j}^{'}, a_j^{'}, a_{2j}^{'})$, така, що $\partial s = \bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i$. Крім цього множина $f'(X)$ на S' буде розміщуватися на границях $t_G(X, S) - 2$ кліток та матиме характеристику $\theta_G(X, S) - 1$. Цим виконані всі дії ітерації циклу 1 алгоритма_НО.

Нехай до 2-многовиду S неорієнтованого роду $\gamma(S)$ вкладено граф G вкладенням f, $f: G \to S$, що реалізує $t_G(X,S) = t$, $\theta_G(X, S) = 0$ та $\partial\theta_G(X, S) = \partial\theta$, $\partial\theta > 0$. Перші три з чотирьох кліток з множини $S_G(X)$, що задовольняють визначенню 2, утворюють підмножину $\{s_i\}_1^3$, а четверта s_0. Для $S_G(X)$ використання характеристики $\partial\theta$ для орієнтованого роду означає приклеювання нової 2-ручки h, $h = h(s_1, s_0)$ чи $h = h(s_1, s_{00})$, на заміну чотирьох кліток-граней $\{s_i\}_1^3$, s_0, де s_1 одна з трьох має два спільні ребра e_i з s_3, s_2 та клітки s_0, $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, на нову клітку s з границею $\partial s = \bigcup_1^3 \partial s_i \setminus R$, де множина R матиме два наступні варіанти складання: 1) якщо $h = h(s_1, s_0)$, то R є тією частиною границі ∂s_1, що не належить до границь ∂s_0 та без точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$; 2) якщо $h = h(s_{00}, s_0)$ (за умови існування такої клітки s_{00}, що множина точок $(\partial s_{00} \cap \partial s_1) \cup (\partial s_0 \cap \partial s_1)$ містить кінцеві вершини обох ребер e_i), то $R = e_1 \cup e_2$ і ребра e_i не містять точок з множини $X \setminus \{\partial e_1 \cup \partial e_2\}$, де $e_1 \in \partial s_2 \cap \partial s_1$, $e_2 \in \partial s_1 \cap \partial s_3$. В кожному з цих випадків на приклеєній 2-ручці розміщуються ребра e_i за допомогою вкладення f', $f' : G \to S'$, $f'|G \setminus \{e_2, e_2\} = f \,|G \setminus \{e_2, e_2\}$, графа G до 2-многовиду S' неорієнтованого роду $\gamma(G)+1$, причому множина $S'(G, f')$ для варіанта 2) матиме вид $(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^{3} s_i \cup s_{00}\}) \cup (h(s_{00}, s_0) \setminus \sum_{j=1}^{k} f'(e_1, e_2))$, для варіанта 1) є $(S(G, f) \setminus \{\bigcup_{i=0}^{3} s_i\}) \cup (h(s_1, s_0) \setminus \sum_{j=1}^{k} f'(e_1, e_2))$. Тим самим всі дії однієї ітерації циклу 2 алгоритму_НО виконані. Кількість ітерацій в обох циклах дорівнюватиме $\theta_G(X, S) + \partial\theta_G(X, S)$. Оскільки $t_G(X, S)$ не перевищує числа кліток – граней графа G неорієнтованого роду, вкладеного до 2-многовиду S роду $\gamma(G)$ і $\theta_G(X, S) + \partial\theta_G(X, S) < t_G(X, S) - 2$, то алгоритм рекурсивно перетворюватиме множину кліток поки не отримаємо перетворену множину кліток-граней із нульовими характеристиками $\theta, \partial\theta$. Число ітерацій обох циклів не перевищуватиме $2(2 - 2\gamma(G) - |G^0| + |G^1|)$, тобто матиме поліноміальну часову складність. Твердження 2 доведено.

Зауважимо, що використання $\partial\theta$ можливе тільки після використання характеристики θ для орієнтованого роду і є перетворенням трьох клітин-граней, дві пари з яких мають два спільні ребра, шляхом приклеювання до них нової 2-ручки, на нову клітку-грань поверхні більшого роду, що має границею об'єднання границь цих трьох кліток без двох спільних ребер. Доведення закінчене.

Визначення 3. Позначимо $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr – кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G, як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M, узята по всіх мінімальних вкладеннях f, $f : G \to S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ. Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k – сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки $\bar{s}$ до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G, де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s, $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f – задане мінімальне вкладення $f:G \to S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ, яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M. Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f, $f:G \to S_\gamma$, графа G у поверхню S_γ, позначимо $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f, $f:G \to S_\gamma$, графа G в S_γ.

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), ... ms_G(M, f_N))$ вектором l-стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки $\bar{s}$, $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M, де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ – множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k, $f_k : G \to S_\gamma$ графа G в S_γ. Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяте за усіма s та усіма f_k, $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l-стороннього доступу до множини M точок графа G.

Теорема. Якщо задано наступне φ-перетворення графів G_i та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду: $\varphi : (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^{m}(x_{1j} \dot{+} x_{2j}) \to (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ – квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2, X_i множина точок графа G_i, $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності t_i та характеристики. $\theta_i, \partial\theta_i$, то $\gamma(G) \leq$ $\leq \sum_{i=1}^{2}\gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st$, де $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$, $k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j})$, $k4 - st$ – число 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$, $k4 - st \geq 0$, f – мінімальне вкладення $f : G_1 \to \sigma_{r_1}$ $r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st – стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 2-ручок і вкладено граф G_2), що при ототодженні всіх пар точок приєднання типу (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів або частин графа G гомеоморфних K_4, чи $K_{2,3}$.

В.И. Петренюк, Д.А. Петренюк

НОВАЯ ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА НЕОРИЕНТИРОВАННОГО РОДА СКЛЕЙКИ ПРОСТЫХ ГРАФОВ

Приведена новая верхняя граница неориентированного рода склейки двух простых графов заданного рода без общих ребер.

V.I. Petrenjuk, D.A. Petrenjuk

A NEW UPPER BOUNDARY OF THE NON-ORIENTED TYPE OF GLUING OF SIMPLE GRAPHS

A new upper bound is given for the non-oriented type of gluing together two simple graphs of a given type without common edges.

Список літератури

1. Хоменко М.П. φ-перетворення графів. (Препринт. ІМ АНУ. Київ. 1973. 383 с.).
2. Хоменко М.П. Топологические аспекты теории графов. (Препринт. ИМ АНУ. Киев. 1970).
3. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Шулінок І.Е. Нова верхня межа орієнтованого роду склейки простих графів. *Теорія оптимальних рішень*. 2018. С. 69 – 79.

Одержано 10.04.2019

Про авторів:

Петренюк Володимир Ілліч,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Центральноукраїнського національного технічного університету,
E-mail: petrenjukvi@i.ua

Петренюк Дмитро Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики имені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: guitar_player@ukr.net