КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.854

В.О. МИХАЙЛЮК, Т.І. ЧЕПРАСОВА, Н.А. ДРЕЙЧАН

РЕОПТИМІЗАЦІЯ 2-КРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ВИКОНУВАНІСТЬ

Показано, що є виграш як наближення для реоптимізації 2-критеріальної задачі про узагальнену виконуваність. При додаванні деякого зваженого обмеження, відповідне відношення апроксимації є $1/(2-d(P)) > d(P)$*, де для відповідної однокритеріальної задачі існує* $d(P)$ *– наближений поліноміальний алгоритм, (*$d(P)$ *– це ймовірність виконання довільного обмеження предиката* P *при рівноймовірному виборі.*

Вступ. Елементи багатокритеріальної оптимізації виникають при дослідженні багатьох технічних, економічних, природних і соціально-наукових процесів. Наприклад, в логістиці зацікавлені в маршрутах з одночасною мінімізацією транспортних витрат і часу транспортування. Не існує єдиного розв'язку, який є оптимальним для обох цілей, так як вони є суперечливими. Треба враховувати компроміси між обома завданнями, тобто деякі маршрути будуть дешевими, інші – швидкими. Множина Парето описує поняття оптимальності в цьому випадку. Вона складається з усіх розв'язків, які оптимальні в тому сенсі, що не існує розв'язку, який строго кращий. Для осіб, що приймають рішення множина Парето дуже корисна, оскільки враховує компроміси між оптимальними розв'язками для поточного екземпляра. Багатокритеріальні задачі про узагальнену виконуваність (Multicriteria Constraint Satisfaction problems, Multicriteria CSPs) – частинний випадок багатокритеріальної оптимізації, коли при задаванні критеріїв використовують предикати, а не функції. Ми матимемо справу з комбінаторною багатокритеріальною оптимізацією та багатокритеріальними задачами про узагальнену виконуваність [1, 2].

Концепція реоптимізації [2 – 8] полягає в наступному. Нехай Q – деяка NP-складна (можливо NP-повна) задача, I – початковий екземпляр задачі Q, оптимальний розв'язок якого відомий.

Пропонуємо новий екземпляр I' задачі Q, отриманий деякими «незначними» змінами I. Виникає питання: як ми можемо ефективно використовувати знання про оптимальний розв'язок I для знаходження точного або наближеного розв'язку екземпляра I'? Мета реоптимізації при використанні наближених методів – застосування знань про розв'язок початкового екземпляра I для досягнення кращої якості наближення (відношення апроксимації), або більш ефективного (за часом) алгоритму для визначення оптимальних або близьких до них розв'язків, або виконання першого і другого пунктів.

Є дуже мало результатів з реоптимізації комбінаторних багатокритеріальних задач взагалі й узагальнених задач про виконуваність, зокрема. Один з підходів є так звана бюджетна реоптимізація [9, 10], коли бюджетні обмеження додаються до основної задачі, а потім досліджуються впливи на оптимальний розв'язок.

У цій роботі вивчається ефект додавання довільного зваженого обмеження до довільного екземпляра 2-критеріальної задачі про узагальнену виконуваність.

Будемо використовувати поняття роботи [1, 11].

Поняття багатокритеріального розв'язку і багатокритеріальної NP-складності. Нехай $k \geq 1$. Комбінаторна k-критеріальна оптимізаційна задача (k-критеріальна задача, коротко) є кортежем $(S, f, \leftarrow)$, де

1. $S : N \to 2^N$ відображає екземпляр $x \in N$ на множину допустимих розв'язків екземпляра, позначених як $S^x \subseteq N$. Має існувати деякий поліном p, такий, що для довільного $x \in N$ і кожного $s \in S^x$ випливає $|s| \leq p(|x|)$ і множина $\{(x, s) : x \in N, s \in S^x\}$ має бути поліноміально розв'язною.

2. $f : \{(x, s) : x \in N, s \in S^x\} \to N^k$ відображає екземпляр $x \in N$ і розв'язок $s \in S^x$ до його значення $f^x(s) \in N^k$. f має бути поліноміально обчислювальною.

3. $\leftarrow \subseteq N^k \times N^k$ – відношення часткового порядку, що визначає напрямок оптимізації. Має виконуватись

$$(a_1, ..., a_k) \leftarrow (b_1, ..., b_k) \Leftrightarrow a_1 \leftarrow_1 b_1 \wedge \cdots \wedge a_k \leftarrow_k b_k,$$

де $\leftarrow_i$ є $\leq$, якщо ціль i-го критерію полягає в мінімізації і $\leftarrow_i$ є $\geq$, якщо ціль i-го критерію полягає у максимізації (для задач про узагальнену виконуваність це буде саме так).

Для екземплярів і розв'язків дозволимо інші об'єкти (наприклад, графи), де передбачається зручне кодування, можливо, встановивши $S^x = \varnothing$, якщо x недопустимий код. Пишемо $\leq$ і $\geq$ також для багатовимірних варіантів, тобто використовується як частковий порядок $\leq$, де $\leftarrow_i = \leq$ для всіх i. N^k-вершинно-помічений (відповідно N^k-реберно-помічений) граф є трійка $G = (V, E, l)$, така, що (V, E) представляє собою граф, і $l : V \to N^k$ (відповідно, $l : E \to N^k$) є загальна функція.

Верхній індекс x у f і S може бути опущений, якщо це ясно з контексту. Проекція f^x на i-ту компоненту позначається як f_i^x, де $f_i^x(s) = v_i$, якщо $f^x(s) = (v_1,...,v_k)$. Крім того, відношення порядку $\leftarrow$ визначається як $\leftarrow_1,...,\leftarrow_k$ також записується у вигляді $(\leftarrow_1,...,\leftarrow_k)$. Якщо $a \leftarrow b$ ми говоримо, що a слабо домінує b (тобто, a за меншою мірою, так само добре, як b). Якщо $a \leftarrow b$ і $a \neq b$ ми говоримо, що a домінує b. Зверніть увагу, що $\leftarrow$ завжди вказує у напрямку кращого значення. Якщо f і x зрозуміло з контексту, то ми поширюємо $\leftarrow$ на комбінації значень і розв'язків. Таким чином, ми можемо говорити про слабке домінування між розв'язками і писати $s \leftarrow t,$ якщо $f^x(s) \leftarrow f^x(t), s \leftarrow c,$ якщо $f^x(s) \leftarrow c$, і так далі, де $s, t \in S^x$ і $c \in N^k$.

Для наближення треба послабити поняття домінування на коефіцієнт α. Для будь-якого дійсного $a \geq 1$ визначимо $u \overset{a}{\leq} v \Leftrightarrow u \leq a \cdot v$ і $u \overset{a}{\geq} v \Leftrightarrow a \cdot u \geq v$. Фіксуємо $\leftarrow = (\leftarrow_1,...,\leftarrow_k)$, де $\leftarrow_i \in \{\leq, \geq\}$ нехай $p = (p_1,...p_k),$ $q = (q_1,...,q_k) \in N^k$ і $\alpha = (a_1,...,a_k) \in R^k$, де $a_1,...,a_k \geq 1$. Будемо говорити, що p слабо α – домінує $q, p \overset{\alpha}{\leftarrow} q$ скорочено, якщо $p_i \overset{\alpha_i}{\leftarrow_i} q_i$, для $1 \leq i \leq k$.

Нехай A і B множини. F – багатозначна функція з A у B, якщо $F \subseteq A \times B$. Множина значень x є $set - F(x) = \{y : (x, y) \in F\}$. F називається загальною, якщо для всіх $x,$ $set - F(x) \neq \varnothing.$

Для порівняння понять розв'язків оптимізаційних задач нам необхідне відповідне поняття зведення. Введемо поняття розв'язків F:

$$set - F(x) = \{y : y \text{ розв'язує } x \text{ у термінах розв'язків поняття } F\}.$$

В цьому сенсі, поняття розв'язку – загальна багатозначна функція, яка відображає екземпляр x на всі $y \in set - F(x)$. Таким чином, поняття розв'язку можна порівняти з допомогою зведень для загальної багатозначної функції. Ми використовуємо означення Зельмана [12] зведення за поліноміальний час Тюрінга для багатозначних функцій, обмежених загальною багатозначною функцією. Загальна функція f – уточнення загальної багатозначної функції $F,$ якщо для всіх $x, f(x) \in set - F(x).$ Загальна багатозначна функція F поліноміально зводиться по Тюрінгу до загальної багатозначної функції $G, F \leq_T^p G,$ якщо існує детермінована поліноміально обмежена оракульна машина Тюрінга M, така, що уточнення g функції G випливає, що M з g, як оракул обчислює загальну функцію, що є уточненням $F.$ Зазначимо, що оракульна модель передбачає, що $\leq_T^p$ – транзитивний, навіть якщо довжина елементів в $set - F(x)$ не є поліноміально обмеженою по $|x|$.

F називається поліноміально розв'язною, якщо існує загальна поліноміально обчислювана функція f, така, що f – уточнення F. Поняття розв'язку F називається NP -складним, якщо всі задачі в NP поліноміально зводяться до F.

Для k -критеріальної задачі $O=(S,f,\leftarrow)$ обговоримо кілька понять «розв'язання O». Таким чином, ми зацікавлені тільки в недомінованих розв'язках, які називаються Парето-оптимальними розв'язками.

$D-O$ **домінуюче поняття розв'зку.**

Обчислити розв'язок, який слабо домінує заданий цільовий вектор.

Вхід: екземпляр x, цільовий вектор $c\in N^k$.

Вихід: деякий $s\in S^x$ з $f^x(x)\leftarrow c$ або повідомити, що немає таких s.

$W-O$ **зважене поняття суми** (тільки, якщо всі цілі треба мінімізувати або максимізувати).

Одноцільова задача яка «зважує» всі цілі заданим способом.

Вхід: екземпляр x, вектор ваги $w\in N^k$.

Вихід: деякий $s\in S^x$, що оптимізує $\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s)$ або повідомити, що $S^x=\varnothing$.

Припускатимемо, що ці поняття аналогічні поняттю точного оптимального розв'зку в звичайній однокритеріальній оптимізації.

Багатокритеріальні поняття наближення. Ми обговоримо розумні поняття «наближеного розв'язку для O» для k -критеріальної задачі $O=(S,f,\leftarrow)$, де $\leftarrow$ визначене з $\leftarrow_1,...,\leftarrow_k$. Наведемо α – наближені версії $D-O$ і $W-O$.

$D^{\alpha}-O$ α **– наближене поняття домінуючого розв'язку.**

Обчислити розв'язок, який слабо α – домінує заданий цільовий вектор.

Вхід: екземпляр x, цільовий вектор $c\in N^k$.

Вихід: деякий $s\in S^x$, такий, що $s\overset{\alpha}{\leftarrow}c$ або повідомити, що не існує таких $s\in S^x$, що $s\overset{\alpha}{\leftarrow}c$.

$W^{\delta}-O$ δ **– наближене поняття зваженої суми** (якщо всі завдання зводяться до мінімуму або максимуму).

Однокритеріальна задача, що «зважує» цілі заданим способом.

Вхід: екземпляр x, вектор ваги $w\in N^k$.

Вихід: деякий $s\in S^x$, такий, що

$$\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s)\overset{\delta}{\leftarrow}_1\sum_{i=1}^{k} w_i f_i^x(s')\text{ для всіх } s'\in S^x \qquad (1)$$

або повідомити, що $S^x=\varnothing$.

Означення 1. Нехай $P:\{-1,1\}^k \to \{0,1\}$ – предикат. Екземпляр задачі $Max-CSP-P$ складається з m зважених обмежень, кожне з яких є k-кортеж літералів $(z_{i_1},...,z_{i_k})$, взятих з множини $\{x_1,...,x_n,\overline{x}_1,...,\overline{x}_n\}$. Всі змінні в цьому кортежі вважаються різними. Обмеження виконано тоді і тільки тоді, коли P приймає цей кортеж. Розв'язок є приписування істиннісних значень до $\{x_1,...,x_n\}$. Значення розв'язку є $\sum_{i=1}^{m} w_i P(z_{i_1},...,z_{i_k})$, де w_i – (невід'ємна) вага i-го обмеження. Мета полягає у максимізації цього значення. Коли P залежить від не більше ніж k літералів $Max-CSP-P$ будемо називати $Max-kCSP-P$, якщо в P рівно k літералів, то $Max-EkCSP-P$. Поряд з проблемами типу $Max-CSP-P$ розглядаються проблеми типу $CSP-P$, де мета полягає у знаходженні такого приписування, що всі обмеження виконані (аналогічно визначаються $kCSP-P$ і $EkCSP-P$).

Якщо в комбінаторній k-критеріальній оптимізаційній задачі, що визначається кортежем $(S, f, \leftarrow)$ f визначається через предикати P, а $\leftarrow$ є $\geq$, то будемо говорити про k **-критеріальну задачу про виконуваність.**

У випадках $W^{\delta}-O$ розв'язок s, будемо називати δ-наближеним розв'язком. Має місце твердження 1, 2, що є аналогом тверджень 2, 3 з [11].

Твердження 1. Для будь-якої k-критеріальної задачі про виконуваність $O=(S, f, \geq)$ і будь-якого $0<\delta\leq 1$ виконується

$$D^{(k\cdot\delta,...,k\cdot\delta)}-O \leq_T^p W^{\delta}-O.$$

Твердження 2. Наступні твердження еквівалентні для деякої k-критеріальної задачі про виконуваність $O=(S, f, \geq)$:

- $D^{\alpha}-O$ поліноміально розв'язувана для деяких $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_k)$ з $0<\alpha_i\leq 1$.
- $W^{\delta}-O$ поліноміально розв'язувана для деякого $0<\delta\leq 1$.

Реоптимізація 2-критеріальної задачі про узагальнену виконуваність. Нехай $O=(S, f, \geq)$ – 2-критеріальна задача про узагальнену виконуваність ($2-CSP$, скорочено) екземплярами є предикат P, вагові коефіцієнти $w(p)=(w_1(p),\ w_2(p)), p\in P$ з невід'ємними компонентами, $f^P = \sum_{p_1\in P} (p_1 w_1(p_1) + p_1 w_2(p_1)$ для вагового вектора з невід'ємними компонентами $w=(w_1, w_2)$, $f^P \to \max$.

Нехай $Max-EkCSP-P-$довільна CSP задача, $I-$ довільний екземпляр задачі $Max-EkCSP-P$, екземпляр I' задачі отримується з екземпляра I додаванням довільного $(m+1)$-го обмеження

$$z^{(m+1)} = (z_{i_1}^{(m+1)},..., (z_{i_j}^{(m+1)} \in \{x_1,...,x_n,\overline{x}_1,...,\overline{x}_n\}, j \in [k])$$

з деякими вагами

$$w^{(m+1)}(p) = \; = (w_1^{(m+1)}(p), w_2^{(m+1)}(p)).$$

Визначимо реоптимізаційний варіант задачі $Max - EkCSP - P$ і $2 - CSP$.

Задача $Ins - 2 - CSP$. **Вхідні дані.** Довільний екземпляр I задачі $Max - EkCSP - P$ або $2 - CSP$, $p^* -$ оптимальний розв'язок екземпляра I.

Результат. Знайти оптимальний розв'язок екземпляра I' (отриманого виходячи з I, як описано вище) задачі $2 - CSP$, використовуючи p^*.

Мета. Знайти p, який максимізує число виконаних обмежень екземпляра I'.

Оскільки випадкове приписування виконує довільне P-обмеження з ймовірністю $d(P) = 2^{-k}\left|P^{-1}(1)\right|$, має місце теорема.

Теорема 1. 1) 2-критеріальна задача про узагальнену виконуваність ($2 - CSP$) задовольняє поняттю $W^{d(P)} - O$ і є поліноміально розв'язуваною;

2) 2-критеріальна задача про узагальнену виконуваність ($2 - CSP$) задовольняє поняттю $D^{(2d(P),2d(P))} - O$ і є поліноміально розв'язуваною.

Доведення. 1. Припустимо є екземпляр з m обмеженнями. Випадкове приписування виконує кожне дане обмеження з ймовірністю $d(P)$ і, таким чином, виконує $d(P)\cdot m$ обмежень в середньому. Оскільки оптимальне приписування виконує не більше m обмежень маємо випадковий $d(P)-$ наближений алгоритм. Методом умовних ймовірностей цей випадковий алгоритм може бути дерандомізованим [13].

2. Цей результат можна встановити, застосовуючи твердження 1 і 2 до доведення 1.

Теорема 2. 1) реоптимізаційна версія 2-критеріальної задачі про узагальнену виконуваність ($Ins - 2 - CSP$) задовольняє поняттю $W^{\frac{1}{2-d(P)}} - O$ і є поліноміально розв'язуваною;

2) реоптимізаційна версія 2-критеріальної задачі про узагальнену виконуваність ($Ins - 2 - CSP$) задовольняє поняттю $D^{\left(\frac{2}{2-d(P)},\frac{2}{2-d(P)}\right)} - O$ і є поліноміально розв'язуваною.

Доведення 1. Нехай $I -$ екземпляр задачі $2 - CSP$, який складається з системи обмежень $C = \{z^{(i)}, i \in [m]\}$ і оптимального розв'язку p^*; $w(p^*) -$ число виконаних обмежень у системі C є розв'язком p^*. До системи додається обмеження $z^{(m+1)}$ з деякими вагами $w^{(m+1)}(p) = (w_1^{(m+1)}(p), w_2^{(m+1)}(p))$, в результаті отримуємо екземпляр I' задачі $2-CSP$, нехай $p_{I'}^*$ – його оптимальний розв'язок. Якщо $p_{I'}^*$ не виконує обмеження $z^{(m+1)}$, тобто p^* – оптимальний розв'язок екземпляра I' задачі $Ins-2-CSP$, звідси отримуємо

$$w(p^*) \geq w(p_{I'}^*) - \rho_{m+1}, \qquad (2)$$

де $\rho_{m+1} = w_1^{(m+1)} + w_2^{(m+1)}$ (у лівій частині записана умова, що p^* – оптимальний розв'язок I', а в правій, що оптимальний розв'язок не виконує обмеження $z^{(m+1)}$). Нехай $p_{I'}^*$ виконує обмеження $z^{(m+1)}$ і є l варіантів, при яких буде виконано обмеження $z^{(m+1)}$ (очевидно, $l < 2^k$). Побудуємо l наближених розв'язків $p^i (i \in [l])$ наступним чином. Беремо i-те приписування, яке виконує $z^{(m+1)}$. Із системи обмежень видаляємо $z^{(m+1)}$ і до обмежень, які залишилися (враховуючи результат приписування), застосовуємо деякий поліноміальний ρ-наближений алгоритм, отримаємо наближений розв'язок p^i. В результаті отримуємо

$$w(p^i) \geq \rho(w(p_{I'}^*) - \rho_{m+1}) + \rho_{m+1} = \rho w(p_{I'}^*) + \rho_{m+1}(1-\rho). \qquad (3)$$

Домножимо (2) на $1-\rho$ і додамо до (3) отримуємо

$$(1-\rho)w(p^*) + w(p^i) \geq (1-\rho)(w(p_{I'}^*) - \rho_{m+1}) + \rho w(p_{I'}^*) + \rho_{m+1}(1-\rho) = w(p_{I'}^*).$$

Серед розв'язків p^* і p^i вибираємо найкращий (тобто з найбільшим значенням цільової функції w) і позначаємо $\overline{p}$. Маємо

$$w(p_{I'}^*) \leq (1-\rho+1)\max\{w(p^*), w(p^i)\} = (2-\rho)w(\overline{p}).$$

Звідки $w(\overline{p}) \geq \frac{1}{2-\rho} w(p_{I'}^*)$. Описаний алгоритм буде поліноміальним, оскільки при $k=2$ $2^k \leq n^c$ (n – загальне число змінних, $c = \text{const}$). Таким чином, в результаті виконання описаного алгоритму отриманий наближений розв'язок $\overline{p}$ екземпляра I' з відношенням апроксимації $\frac{1}{2-\rho}$. Ясно, що завжди $\frac{1}{2-\rho} > \rho (\rho \neq 1)$. Покладемо $\rho = d(P) = 2^{-k}\left|P^{-1}(1)\right|$, тобто застосувавши наближений поліноміальний алгоритм з теореми 1, отримаємо твердження даної теореми.

2. Цей результат можна встановити, застосовуючи твердження 1 і 2 до доведення 1.

Таким чином, для реоптимізаційних версій багатокритеріальних оптимізаційних задач отримані поліпшені розв'язки (з кращою якістю наближення).

Висновки. Вивчається складність і наближення комбінаторних багатокритеріальних NP -складних оптимізаційних задач.

Визначені поняття розв'язків, наближених розв'язків, поняття NP-складності з допомогою поліноміальних зведень Тюрінга з багатозначних функцій.

Наводяться результати в яких випадках поліноміальна розв'язність перекладається з одного поняття на інше. Для задач, де всі цілі максимізуються, результати наближення перекладаються з однокритеріальної оптимізації на багатокритеріальну. Цей факт був встановлений при дослідженні реоптимізаційної версії 2-критеріальної задачі про узагальнену виконуваність при додаванні одного зваженого обмеження.

В.А. Михайлюк, Т.И. Чепрасова, Н.А. Дрейчан

РЕОПТИМИЗАЦИЯ 2-КРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ

Показано, что есть выигрыш в качестве приближения для реоптимизации 2-критериальной задачи об обобщенной выполнимости. При добавлении некоторого взвешенного ограничения, соответствующее отношение аппроксимации есть $1/(2-d(P)) > d(P)$, где для соответствующей однокритериальной задачи существует $d(P)$ – приближенный полиномиальный алгоритм, ($d(P)$ – это вероятность выполнения произвольного ограничения предиката P при равновероятном выборе.

V.A. Mikhailyuk, T.I. Cheprasova, N.A. Dreychan

REOPTIMIZATION OF 2-CRITERIA SATISFIABILITY PROBLEM

It is shown that there is a gain in the quality of the approximation for the reoptimization of the 2-criteria problem of generalized satisfiability. When adding some weighted constraint, the corresponding approximation ratio is $1/(2-d(P)) > d(P)$, where there is a $d(P)$-approximated polynomial algorithm for the corresponding one-objective problem ($d(P)$ is the probability that an arbitrary restriction of the predicate is satisfied with an equal choice).

Список літератури

1. Hardness and approximability in multi-objective optimization/[Glaβer Christian, Reitwieβner Christian, Schmitz Heinz, Witek Maximilian]. Computability in Europe (CiE). 2010. *Lecture Notes in Computer Science* (LNCS), 6158. 2010. P. 180 – 189.
2. Михайлюк В.О., Сергієнко І.В. Постоптимальний аналіз та наближені алгоритми реоптимізації для задач дискретного програмування. Київ: Наукова думка, 2015. 248 с.
3. Ausiello G., Escoffier B., Monnot J. and Paschos V.Th Reoptimization of minimum and maximum traveling salesman's tours. *Lect. Notes Comput. Sci.* 2006. Vol. 4059. P. 196 – 207.
4. Bockenhauer H.J., Forlizzi L., Hromkovic J. et al. On the approximability of TSP on local modifications of optimal solved instances. *Algorithmic Oper. Res.* 2007. Vol. 2, N 2. P. 83 – 93.

5. Bockenhauer H. J., Hromkovic J., Momke T. and Widmayer P. On the hardness of reoptimization. *Lect. Notes Comput. Sci*. 2008. Vol. 4910, P. 50 – 65.
6. Archetti C., Bertazzi L. and Speranza M.G. Reoptimizing the travelling salesman problem. Network. 2003. Vol. 42. N 3. P. 154 – 159.
7. Ausiello G., Bonifacci V. and Escoffier B. Complexity and approximation in reoptimization. In: S. Barry Cooper and Andrea Sorbi, Eds. *Computability in Context: Computation and Logic in the Real World*. London: Imperial College Press. 2011. P. 101 – 130.
8. Mikhailyuk V.A. Reoptimization of set covering problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 6. P. 879 – 883.
9. Berger A.,Bonifaci V., Grandoni F.,Schafer G.Budgeted matching and budgeted matroid intersection via the gasoline puzzle. *Mathematical Programming*. 2011. 128(1–2). P. 355 – 372.
10. Ravi R., Goemans M.X. The constrained minimum spanning tree problem. *Lect. Notes Comput. Sci*. 1996. Vol. 1097. P. 66 – 75.
11. Tkachuk N.A. Some result on reoptimization of 2-objective minimum vertex cover. Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists. Kyiv: Bukrek, 2014. P. 231 – 237.
12. Selman A.L. A taxonomy on complexity classes of functions. *Journal of Computer and System Sciences*. 1994. 48. P. 357 – 381.
13. Vazirani V.V. Approximation algorithms. Berlin: Springer, 2001. 380 p.

Одержано 10.12.2018

Про авторів:

Михайлюк Віктор Олексійович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри прикладної математики та інформатики
Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
E-mail: mikhailyukvictor2@gmail.com

Чепрасова Тетяна Іванівна,
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри прикладної математики та інформатики
Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
E-mail: cheprasova.tatiana@eenu.edu.ua

Дрейчан Надія Анатоліївна,
аспірантка Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки,
факультет інформаційних систем, фізики та математики, Луцьк, Україна.
E-mail: nadyushka.dr@gmail.com