КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.85

П.І. СТЕЦЮК, О.В. ФЕСЮК, О.Ф. БУТКЕВИЧ

ОПУКЛІ КВАДРАТИЧНІ ED-ЗАДАЧІ: ВЛАСТИВОСТІ ТА СУБГРАДІЄНТНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Описано задачу сепарабельного квадратичного програмування для економічного завантаження енергоблоків для покриття планового електричного навантаження енергосистеми. Показано, що для строго опуклої цільової функції задача має єдиний розв'язок. Розглядаються алгоритми розв'язання задачі на основі субградієнтних методів. Наведено результати обчислювальних експериментів з розв'язання квадратичних задач знаходження добового погодинного електричного навантаження десяти енергоблоків.

Вступ. Задачі математичного програмування для економічного завантаження енергоблоків, що знаходяться в роботі для покриття електричного навантаження енергосистеми, відомі в англомовній літературі як задачі Economic Dispatch Problem (ED-задача) [1]. Конкретна ED-задача визначається видом сепарабельної нелінійної функції витрат умовного палива та лінійними обмеженнями, які визначають експлуатаційні вимоги для кожного енергоблоку. Потрібно для кожного з інтервалів планового періоду знайти електричні навантаження кожного енергоблоку, щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати умовного палива на генерацію електроенергії за весь плановий період.

В статті розглядається ED-задача з сепарабельною квадратичною цільовою функцією, за допомогою якої можна апроксимувати реальні функції витрат умовного палива. Експлуатаційні вимоги враховують допустимі межі на навантаження усіх енергоблоків та обмеження на зменшення/збільшення навантажень частини енергоблоків. Досліджується частковий випадок, коли квадратичні функції є опуклими, що дозволяє знайти глобальний екстремум ED-задачі за допомогою субградієнтних методів опуклого програмування. У розділі 1 наведено опис задачі сепарабельного квадратичного програмування та її властивості. У розділі 2 описано алгоритми розв'язання ED-задачі за допомогою субградієнтних методів, описано їх застосування для розв'язання задачі планування добового погодинного навантаження енергосистеми, в яку входять десять енергоблоків.

1. Опукла квадратична ED-задача та її властивості. Енергосистема складається з N паралельно працюючих енергоблоків. Для кожного енергоблоку $i \in N = \{1,\ldots,n\}$ задані P_i^{low} і P_i^{up} – відповідно нижня і верхня границі його електричного навантаження; для кожного енергоблоку $i \in N_R \in N$ задані D_i і U_i – допустимі значення на послідовні зменшення і збільшення його електричного навантаження. Задані T – тривалість планового періоду та E_t – планове електричне навантаження енергосистеми для кожного інтервалу t ($t = 1,\ldots,T$).

Будемо розглядати задачу сепарабельного квадратичного програмування: знайти

$$f^* = f(x^*) = \min\left\{ f(x) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}(c_i x_{i,t}^2 + b_i x_{i,t} + a_i) \right\} \quad (1)$$

при лінійних обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = E_t, \quad t = 1,\ldots,T, \quad (2)$$

$$-D_i \le x_{i,t} - x_{i,t-1} \le U_i,\ i \in N_R,\ t = 2,\ldots,T, \quad (3)$$

$$P_i^{low} \le x_{i,t} \le P_i^{up}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad t = 1,\ldots,T, \quad (4)$$

де $x_{i,t}$ – невідоме електричне навантаження i-го енергоблоку в інтервалі t, $i = 1,\ldots,n$, $t = 1,\ldots,T$, а функція $f_i(x) = c_i x^2 + b_i x + a_i$ – квадратична функція від електричного навантаження x. Якщо $c_i \ge 0$ для всіх $i = 1,\ldots,n$, тобто цільова функція (1) є опуклою функцією. Задачу (1) – (4) умовимось називати опуклою квадратичною ED-задачею. Кількість невідомих у ній дорівнює $n \times T$ та визначається кількістю енергоблоків n та тривалістю планового періоду T.

Лінійні обмеження задачі (1) – (4) мають наступний зміст. Лінійні рівності (2) означають виконання E_t – плану по виробленню електроенергії у кожному інтервалі t планового періоду, $t = 1,\ldots,T$. Двосторонні лінійні нерівності (3) задають максимально допустимі межі на величину можливого збільшення та зменшення потужності i-го енергоблоку між інтервалами $t-1$ і t, $t = 2,\ldots,T$. Дійсно, обмеження (3) можна переписати як дві групи лінійних нерівностей

$$x_{i,t} - x_{i,t-1} \le U_i,\ i \in N_R,\ t = 2,\ldots,T, \quad (5)$$

$$x_{i,t-1} - x_{i,t} \le D_i,\ i \in N_R,\ t = 2,\ldots,T, \quad (6)$$

звідки легко бачити, що обмеження (5) визначають межі на максимальне збільшення навантаження, а обмеження (6) визначають межі на максимальне зменшення навантаження для енергоблоків з множини $N_R \in N$ між інтервалами $t-1$ і t, $t = 2,\ldots,T$. Обмеження (5) – (6) в англомовній літературі називають **ramp-rate limits constrains**. З ним пов'язано позначення N_R для сімейства енергоблоків з обмеженнями на зменшення/збільшення навантажень. Двосторонні обмеження (4) означають, що для кожного i-го енергоблоку та кожного інтервалу t електричне навантаження x_{it} вибирається із діапазону $[P_i^{low},\ P_i^{up}]$ – діапазону можливих електричних навантажень i-го енергоблоку.

Вибір цільової функції (1) буде визначати той чи інший критерій для знаходження оптимального завантаження енергоблоків для покриття планового електричного навантаження енергосистеми. Якщо для i -го енергоблоку функція $f_i(x)$ задає витрати умовного палива на генерацію електроенергії, то тоді критерієм будуть мінімальні сумарні витрати умовного палива на генерацію електроенергії за весь плановий період. Якщо для i -го енергоблоку квадратична функція $f_i(x)$ апроксимує опуклу функцію перевитрат палива (тепла) внаслідок відхилення від оптимального режиму [2], то тоді критерієм будуть мінімальні сумарні перевитрати внаслідок відхилення режиму роботи енергосистеми від оптимального.

Теорема 1. Якщо $c_i > 0$ для всіх $i = 1,\ldots,n$ і система обмежень (2) – (4) є сумісною, то задача (1) – (4) має єдиний розв'язок.

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $x^* = \left\{x^*_{i,t}\right\}^{t=1,...,T}_{i=1,...,n}$ та $x^{**} = \left\{x^{**}_{i,t}\right\}^{t=1,...,T}_{i=1,...,n}$ – два неспівпадаючі розв'язки задачі (1) – (4). Їм відповідає оптимальне значення цільової функції $f^* = f(x^*) = f(x^{**})$. Розв'язки x^* та x^{**} задовольняють обмеженням (2) – (4), тобто

$$\sum_{i=1}^{n} x^*_{i,t} = E_t, \quad \sum_{i=1}^{n} x^{**}_{i,t} = E_t, \quad t = 1,\ldots,T, \tag{7}$$

$$-D_i \le x^*_{i,t} - x^*_{i,t-1} \le U_i, \quad -D_i \le x^{**}_{i,t} - x^{**}_{i,t-1} \le U_i, \quad i \in N_R, t = 2,\ldots,T, \tag{8}$$

$$P_i^{low} \le x^*_{i,t} \le P_i^{up}, \quad P_i^{low} \le x^{**}_{i,t} \le P_i^{up}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad t = 1,\ldots,T. \tag{9}$$

Точка $x^{***} = \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}$, де $0 < \lambda < 1$, задовольняє системі обмежень (2) – (4). Дійсно, враховуючи рівності (7), для всіх $t = 1,\ldots,T$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^{n} x^{***}_{i,t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda x^*_{i,t} + (1-\lambda)x^{**}_{i,t}\right) = \lambda\sum_{i=1}^{n} x^*_{i,t} + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} x^{**}_{i,t} = \lambda E_t + (1-\lambda)E_t = E_t,$$

що означає, що точка x^{***} задовольняє рівностям (2). Враховуючи нерівності (8), для всіх $i \in N_R$ та всіх $t = 2,\ldots,T$ справедливі нерівності

$$D_i \le \lambda D_i + (1-\lambda)D_i \le \lambda(x^*_{i,t} - x^*_{i,t-1}) + (1-\lambda)(x^{**}_{i,t} - x^{**}_{i,t-1}) \le \lambda U_i + (1-\lambda)U_i \le U_i,$$

що означає, що точка x^{***} задовольняє двостороннім нерівностям (3). Враховуючи нерівності (9), для всіх $i = 1,\ldots,n$ та всіх $t = 1,\ldots,T$ отримуємо

$$P_i^{low} \le \lambda P_i^{low} + (1-\lambda)P_i^{low} \le \lambda x^*_{i,t} + (1-\lambda)x^{**}_{i,t} \le \lambda P_i^{up} + (1-\lambda)P_i^{up} \le P_i^{up},$$

що означає, що точка x^{***} задовольняє двостороннім нерівностям (4).

Якщо $c_i > 0$ для $i = 1,\ldots, N$, то функції $f_i(x) = c_i x^2 + b_i x + a_i$ для всіх $i = 1,\ldots,n$ є строго опуклими, тобто для $x \ne y$ справедливі нерівності

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y), \quad i = 1,...,n, \tag{10}$$

де $0 < \lambda < 1$. Враховуючи (10), для $f(x^{***})$ – значення цільової функції у точці x^{***} справедливі наступні співвідношення

$$f(x^{***}) = f(\lambda x^{*} + (1-\lambda)x^{**}) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} f_i(\lambda x^{*}_{i,t} + (1-\lambda)x^{**}_{i,t}) <$$

$$< \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda f_i(x^{*}_{i,t}) + (1-\lambda)\, f_i(x^{**}_{i,t})\right) = \lambda\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} f_i(x^{*}_{i,t}) + (1-\lambda)\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} f_i(x^{**}_{i,t}) =$$

$$= \lambda f(x^{*}) + (1-\lambda)\, f(x^{**}) = \lambda f^{*} + (1-\lambda)\, f^{*} = f^{*},$$

з яких випливає, що нерівність $f(x^{***}) < f^{*}$. Вона суперечить тому, що x^{*} та x^{**} розв'язки задачі (1) – (4), так як в точці x^{**}, яка задовольняє обмеженням (2) – (4), значення цільової функції $f(x^{***})$ є меншим за мінімальне значення f^{*}. Теорема 1 доведена.

Частковим випадком задачі (1) – (4) є задача лінійного програмування, якій відповідають $c_i = 0$ для $i = 1,\ldots,n$. Для неї точка екстремуму не завжди є єдиною. Щоб забезпечити єдиність розв'язку достатньо задачу лінійного програмування замінити на таку задачу квадратичного програмування: знайти

$$f^{*} = f(x^{*}) = \min\left\{ f(x) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(\pounds_i x^{2}_{i,t} + d_i x_{i,t} + e_i) \right\} \qquad (11)$$

при обмеженнях (2) – (4), де ε_i – досить малі додатні числа для $i = 1,\ldots,n$.

З теореми 1 випливає наступне твердження.

Теорема 2. Якщо $\varepsilon_i > 0$ для всіх $i = 1,\ldots,n$ і система обмежень (2) – (4) є сумісною, то задача (11), (2) – (4) має єдиний розв'язок.

Вибір досить малих значень ε_i дозволяє наблизити розв'язок задачі (11), (2) – (4) до одного з розв'язків задачі лінійного програмування, якщо остання має багато розв'язків. При цьому як оптимальний розв'язок буде вибиратися одна з внутрішніх точок множини оптимальних розв'язків задачі лінійного програмування. Задачу лінійного програмування легко адаптувати для визначення економічного завантаження енергоблоків, коли окремі енергоблоки можна вмикати та вимикати. Так, наприклад, такою буде задача булевого лінійного програмування наступного вигляду: знайти

$$f^{*} = f(x^{*}) = \min\left\{ f(x) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in N\setminus N_{UC}}(b_i x_{i,t} + a_i) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in N_{UC}}(b_i x_{i,t} + a_i y_{i,t}) \right\} \qquad (12)$$

при лінійних обмеженнях, які включають обмеження (2), (3) та обмеження

$$P_i^{low} \le x_{i,t} \le P_i^{up}, \quad i \in N \setminus N_{UC}, \quad t = 1,\ldots,T, \qquad (13)$$

$$P_i^{low} y_{i,t} \le x_{i,t} \le P_i^{up} y_{i,t}, \quad y_{i,t} \in \{0,1\}, \quad i \in N_{UC}, \quad t = 1,\ldots,T, \qquad (14)$$

де булева змінна $y_{i,t}$ дорівнює нулю, якщо енергоблок i з сімейства енергоблоків $N_{UC} \in N \setminus N_R$ є включеним, та – нулю, якщо енергоблок є вимкненим.

2. Про субградієнтні методи розв'язання задачі (1) – (4). Один із можливих способів розв'язання задачі (1) – (4) полягає у використанні сучасного програмного забезпечення для розв'язання задач нелінійного програмування. Центральні з цих програм можна використовувати, наприклад, через NEOS-сервер [3], який підтримує роботу з такими відомими програмами, як filter, Ipopt, KNITRO, LANCELOT, LOQO, MINOS, MOSEK і SNOPT.

Для розв'язання задачі (1) – (4) розроблено три субградієнтні методи та їх програмні реалізації [4 – 6]. Два методи призначені для випадку $N_R = N$ (допустимі зміни навантажень враховуються для всіх енергоблоків), до якого легко звести задачу, якщо $N_R \neq N$. Третій метод розроблено для випадку $N_R = \varnothing$, коли немає енергоблоків, для яких враховуються допустимі зміни навантажень.

Перший метод [4] базується на використанні методу негладких штрафних функцій для задачі (1) – (4) у сполученні з *r*-алгоритмом Шора [7]. За порушення обмежень (2), (3) та (4) відповідають штрафні множники Q_1, Q_2 та Q_3. Для мінімізації негладкої штрафної функції використовується octave-програма **ralgb5** [8, с. 383–386], яка реалізує $r(\alpha)$-алгоритм з адаптивним кроком. Octave-функція **calcfg(x)** для обчислення значення негладкої штрафної функції та її субградієнта реалізована за допомогою алгебраїчних операцій системи GNU Octave. Програмна реалізація алгоритму використана у системі MANEUVER-NEW для розв'язання задач оптимального завантаження енергоблоків теплових електростанцій [9].

За аналогічною схемою побудовано другий субградієнтний метод та його програмну реалізацію [5]. В його основу покладена модифікація задачі (1) – (4), де обмеження (2) у формі рівності замінено на двосторонні обмеження

$$E_t - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} x_{i,t} \le E_t + \varepsilon, \quad t = 1,\dots,T, \tag{15}$$

де ε – величина, з точністю до якої потрібно виконати планове навантаження енергоситеми у кожному інтервалі планового періоду.

Третій метод пов'язаний з задачею (1), (2), (4) [6], яка розпадається на ряд незалежних по $t = 1,\dots,T$ підзадач такого вигляду: знайти

$$f_t^* = f(x_{i,t}^*) = \min \sum_{i=1}^{n} (c_i x_{i,t}{}^2 + b_i x_{i,t} + a_i) \tag{16}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,t} = E_t, \tag{17}$$

$$P_i^{low} \le x_{i,t} \le P_i^{up}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Якщо $c_i > 0$ для всіх $i = 1,\dots,n$ то задача (16) – (18) має єдиний розвязок.

Наведемо два приклади розв’язання опуклих квадратичних ED-задач для енергосистеми, яка містить 10 паралельно працюючих енергоблоків, параметри яких взято із статті [10]. Їх значення наведено в табл. 1, де для десятого енергоблоку нижня та верхня границі потужності співпадають і становлять 55 MW.

ТАБЛИЦЯ 1. Характеристики енергоблоків та параметри квадратичних функцій [10]

unit	$P_i^{\max}$ MW	$P_i^{\min}$ MW	a_i \$/h	b_i \$/MWh	c_i \$/MW²h	U_i MW	D_i MW
1	470	150	958.2	21.6	0.00043	80	80
2	460	135	1313.6	21.05	0.00063	80	80
3	340	73	604.97	20.81	0.00039	80	80
4	300	60	471.6	23.9	0.0007	50	50
5	243	73	480.29	21.62	0.00079	50	50
6	160	57	601.75	17.87	0.00056	50	50
7	130	20	502.7	16.51	0.00211	30	30
8	120	47	639.4	23.23	0.0048	30	30
9	80	20	455.6	19.58	0.10908	30	30
10	55	55	692.4	22.54	0.00951	30	30

Знайдені розв’язки ED-задачі планування добового погодинного навантаження енергосистеми при $N_R = N$ та $N_R = \varnothing$ наведено в табл. 2 та 3. Обчислення проводилися на комп’ютері Intel Xeon CPU E5-1607 0 3.00GHz×4 з операційною системою Ubuntu 14.04 та Octave 4.0.2. Використовувалися штрафні множники: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1000$. Параметри програми **ralgb5** вибиралися такими: $\alpha = 4,\ h_0 = 500,\ q_1 = 0.95,\ q_2 = 1.1,\ n_h = 3,\ \varepsilon_x \in 10^{-6},\ \varepsilon_g = 10^{-6}$.

ТАБЛИЦЯ 2. Розв’язок ED-задачі (1) – (4) при $N_R = N$ для даних з таблиці 1

t	$x^*_{1,t}$	$x^*_{2,t}$	$x^*_{3,t}$	$x^*_{4,t}$	$x^*_{5,t}$	$x^*_{6,t}$	$x^*_{7,t}$	$x^*_{8,t}$	$x^*_{9,t}$	$x^*_{10,t}$	E_t
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	150.0	135.0	206.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1036
2	150.0	156.8	258.2	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1110
3	150.0	236.8	326.2	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1258
4	187.7	316.8	340.0	60.0	89.5	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1406
5	183.8	396.8	340.0	60.0	87.4	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1480
6	238.7	460.0	340.0	60.0	117.3	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1628
7	286.6	460.0	340.0	60.0	143.4	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1702
8	348.1	442.3	340.0	60.0	173.6	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1776
9	428.1	460.0	340.0	60.0	223.6	160.0	130.0	47.3	20.0	55.0	1924
10	470.0	460.0	340.0	110.0	243.0	160.0	130.0	77.3	26.7	55.0	2072
11	470.0	460.0	340.0	160.0	243.0	160.0	130.0	106.6	21.4	55.0	2146
12	470.0	460.0	340.0	201.5	243.0	160.0	130.0	120.0	40.5	55.0	2220
13	439.1	460.0	340.0	151.5	226.4	160.0	130.0	90.0	20.0	55.0	2072

Закінчення табл. 2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
14	395.1	460.0	340.0	101.5	202.4	160.0	130.0	60.0	20.0	55.0	1924
15	332.5	460.0	340.0	60.0	171.5	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1776
16	252.5	380.0	328.0	60.0	121.5	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1554
17	230.0	345.0	340.0	60.0	93.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1480
18	310.0	363.0	340.0	60.0	143.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1628
19	390.0	381.0	340.0	60.0	193.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1776
20	470.0	460.0	340.0	110.0	243.0	160.0	130.0	77.0	27.0	55.0	2072
21	390.0	460.0	340.0	66.3	223.0	160.0	130.0	79.5	20.2	55.0	1924
22	310.0	380.0	287.0	60.0	173.0	160.0	130.0	53.0	20.0	55.0	1628
23	230.0	300.0	207.0	60.0	123.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1332
24	150.0	220.0	269.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1184

Оптимальне навантаження десяти енергоблоків, наведене в табл. 2, знайдено за 6663 ітерацій $r(\alpha)$-алгоритму та 13973 виклики функції **calcfg(x).** Час пошуку склав 11.39 секунд і отримано значення цільової функції 1 002 054.05.

ТАБЛИЦЯ 3. Розв'язок ED-задачі (1) – (4) при $N_R = \varnothing$ для даних з таблиці 1

t	$x^*_{1,t}$	$x^*_{2,t}$	$x^*_{3,t}$	$x^*_{4,t}$	$x^*_{5,t}$	$x^*_{6,t}$	$x^*_{7,t}$	$x^*_{8,t}$	$x^*_{9,t}$	$x^*_{10,t}$	E_t
1	150.0	135.0	206.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1036
2	150.0	135.0	280.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1110
3	150.0	223.0	340.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1258
4	150.0	371.0	340.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1406
5	150.0	445.0	340.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1480
6	238.7	460.0	340.0	60.0	117.3	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1628
7	286.6	460.0	340.0	60.0	143.4	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1702
8	334.6	460.0	340.0	60.0	169.4	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1776
9	430.4	460.0	340.0	60.0	221.6	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1924
10	470.0	460.0	340.0	108.0	243.0	160.0	130.0	85.5	20.5	55.0	2072
11	470.0	460.0	340.0	172.2	243.0	160.0	130.0	94.9	20.9	55.0	2146
12	470.0	460.0	340.0	236.4	243.0	160.0	130.0	104.3	21.3	55.0	2220
13	470.0	460.0	340.0	108.0	243.0	160.0	130.0	85.5	20.5	55.0	2072
14	430.4	460.0	340.0	60.0	221.6	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1924
15	334.6	460.0	340.0	60.0	169.4	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1776
16	190.8	460.0	340.0	60.0	91.2	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1554
17	150.0	445.0	340.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1480
18	238.7	460.0	340.0	60.0	117.3	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1628
19	334.6	460.0	340.0	60.0	169.4	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1776
20	470.0	460.0	340.0	108.0	243.0	160.0	130.0	85.5	20.5	55.0	2072
21	430.4	460.0	340.0	60.0	221.6	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1924
22	238.7	460.0	340.0	60.0	117.3	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1628
23	150.0	297.0	340.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1332
24	150.0	149.0	340.0	60.0	73.0	160.0	130.0	47.0	20.0	55.0	1184

Значення потужності оптимального навантаження десяти енергоблоків, знайдені за 4831 ітерацію $r(\alpha)$-алгоритму та 10026 викликів функції **calcfg(x)**, наведено в табл. 3. Час пошуку склав 6.22 секунди. Отримано значення цільової функції 1 001 395.82, що відповідає меншим (на 0,065 % або $ 658,3) витратам, але при цьому порушуються експлуатаційні обмеження на допустимі зміни потужності енергоблоків (відмічені сірим фоном). Зокрема для енергоблоку 1 порушено обмеження в періодах 5 – 6, 8 – 9 та 14 – 23, для енергоблоку 2 – в періоди 2 – 4 та 22 – 24, енергоблоку 4 – в періоди 10 – 13, енергоблоку 5 – в періоди 8 – 9, 14 – 16, 19 – 22, енергоблоку 8 – в періоди 9 – 10, 13 – 14, 19 – 22. Отже, такий розв'язок не є прийнятним.

Висновки. В роботі наведено дослідження опуклої квадратичної ED-задачі – задачі квадратичного програмування для знаходження економічного за витратами умовного палива завантаження енергоблоків для покриття планового електричного навантаження енергосистеми. Експлуатаційні вимоги враховують обмеження щодо навантаження кожного з енергоблоків та обмеження на зменшення/збільшення навантажень частини енергоблоків. Наведено опис алгоритмів та програмного забезпечення для розв'язання ED-задачі за допомогою субградієнтних методів, описано їх застосування для планування добового погодинного навантаження енергосистеми, до складу якої входять десять енергоблоків.

Аналіз результатів проведених обчислювальних експериментів свідчить, що програмне забезпечення можна використовувати для оперативного планування навантаження енергоблоків теплових електростанцій ОЕС України. За його допомогою можна отримувати глобальні екстремуми для задач оптимального завантаження енергоблоків, для яких функції реальних витрат умовного палива апроксимуються опуклими квадратичними функціями, з подальшим їх уточненням (дооптимізацією).

П.И. Стецюк, А.В. Фесюк, А.Ф. Буткевич

ВЫПУКЛЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ED-ЗАДАЧИ: СВОЙСТВА И СУБГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Описана задача сепарабельного квадратичного программирования для экономичной загрузки энергоблоков для покрытия плановой электрической нагрузки энергосистемы. Показано, что для строго выпуклой целевой функции задача имеет единственное решение. Рассматриваются алгоритмы решения задачи на основе субградиентных методов. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению квадратичных задач для нахождения суточной почасовой электрической нагрузки десяти энергоблоков.

P.I. Stetsyuk, O.V. Fesiuk, O.F. Butkevych

CONVEX QUADRATIC ED-PROBLEMS: PROPERTIES AND SUBGRADIENT ALGORITHMS OF SOLUTION

The separable quadratic programming problem for economic loading of power units to cover the planned electrical load of the power system is described. It is shown that the problem has a unique solution for a strictly convex objective function. The algorithms of solving the problem on the basis of subgradient methods are considered. The results of computational experiments on solving quadratic problems of finding the daily hourly electric load of ten power units are presented.

Список літератури

1. Wood A.J., Wollenberg B.F. Power Generation, Operation, and Control. 2end Edition. John Wiley & Sons, 1996. 592 p.
2. Горнштейн В.М., Мирошниченко Б.П., Пономарев А.В., Тимофеев В.А., Юровский А.Г. Методы оптимизации режимов энергосистем. М.: Энергия, 1981. 336 с.
3. NEOS Server [Електронний ресурс]: http://www.neos-server.org/neos/.
4. Стецюк П.І., Фесюк О.В. Використання *r*-алгоритму для розв'язання квадратичної ELD-задачі. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. № 15. С. 225 – 231.
5. *Стецюк П.І., Фесюк О.В., Сидорук В.А.* Алгоритми розв'язання задачі сепарабельного квадратичного програмування. *Компьютерная математика*. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2017. № 2. С. 137 – 146.
6. Стецюк П.И., Фесюк А.В. Двойственный алгоритм решения задачи сепарабельного квадратичного программирования с одним ограничением и границами на переменные. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпропетровськ, 2015. С. 191 – 200.
7. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 200 с.
8. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и *r*-алгоритмы. Кишинэу. Эврика, 2014. 488 с.
9. Фесюк О.В., Стецюк П.І., Буткевич О.Ф. Використання системи MANEUVER-NEW для розв'язання задач оптимального завантаження енергоблоків теплових електростанцій. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 94 – 97.
10. Yuan X., Wang L., Zhang Y., Yuan Y. A hybrid differential evolution method for dynamic economic dispatch with valve-point effects. *Expert Systems with Applications*. 2009. Vol. 36. P. 4042 – 4048.

Одержано 08.06.2018

Про авторів:

Стецюк Петро Іванович,
доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: stetsyukp@gmail.com

Фесюк Олександр Володимирович,
провідний інженер-програміст
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
E-mail: sasha.fesyuk@gmail.com

Буткевич Олександр Федотович,
доктор технічних наук, професор,
головний науковий співробітник
Інституту електродинаміки НАН України.
E-mail: butkevych@ied.org.ua